

课后答案网 您最真诚的朋友



www.hackshp.cn网团队竭诚为学生服务，免费提供各门课后答案，不用积分，甚至不用注册，旨在为广大学生提供自主学习的平台！

课后答案网：www.hackshp.cn

视频教程网：www.efanjy.com

PPT课件网：www.ppthouse.com

第二章 线性规划建模及单纯形法

1. 将下列线性规划问题化为标准型

(1) $\text{Max } z = 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 2x_4$

$$\text{s.t.} : \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 18 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 \geq 13 \\ -x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 9 \\ x_1, x_2, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

引入松弛变量: x_5, x_6 ; 令 $x_3 = x'_3 - x''_3$

标准型为:

$$\text{Max } z = 3x_1 + 5x_2 - 4x'_3 + 4x''_3 + 2x_4$$

$$\text{s.t.} : \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - x'_3 + x''_3 + 2x_4 + x_5 = 18 \\ x_1 - 3x_2 + 2x'_3 - 2x''_3 - 2x_4 - x_6 = 13 \\ -x_1 + 4x_2 - 3x'_3 + 3x''_3 - 5x_4 = 9 \\ x_1, x_2, x'_3, x''_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

(2) $\text{Min } f = -x_1 + 5x_2 - 2x_3$

$$\text{s.t.} : \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 \leq 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0 \end{cases}$$

令 $z = -f$, 则 $\text{Max } z = x_1 - 5x_2 + 2x_3$

引入松弛变量: x_4, x_5 ; 令 $x'_2 = -x_2, x_3 = x'_3 - x''_3$

标准型为:

$$\text{Max } z = x_1 + 5x'_2 + 2x'_3 - 2x''_3$$

$$\text{s.t.} : \begin{cases} 3x_1 - 2x'_2 - 4x'_3 + 4x''_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + 3x'_2 + x'_3 - x''_3 - x_5 = 5 \\ x_1 - x'_2 + x'_3 - x''_3 = 9 \\ x_1, x'_2, x'_3, x''_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

(3) $\text{Min } f = 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4$

$$s.t. : \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 \leq -51 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 \geq -7 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 15 \\ x_1, x_2 \geq 0, x_4 \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{令 } z = -f$$

$$Maxz = -3x_1 - x_2 - 4x_3 - 2x_4$$

$$-2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 51$$

$$-3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 \leq 7$$

引入松弛变量: x_5, x_6 ; 令 $x'_4 = -x_4, x_3 = x'_3 - x''_3$

标准型为:

$$Maxz = -3x_1 - x_2 - 4x'_3 + 4x''_3 + 2x'_4$$

$$s.t. : \begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + x'_3 - x''_3 - 2x'_4 - x_5 = 51 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x'_3 + 2x''_3 - x'_4 + x_6 = 7 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x'_3 + 3x''_3 - 2x'_4 = 15 \\ x_1, x_2, x'_3, x''_3, x'_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

2. 求出以下不等式组所定义的多面体的所有基本解和基本可行解 (极点)

$$(1) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 6 \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 12 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_5 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$$A = (P_1 \ P_2 \ P_3 \ P_4 \ P_5) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = (P_1 \ P_2) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = (P_1 \ P_3) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = (P_1 \ P_4) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_4 = (P_1 \ P_5) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_5 = (P_2 \ P_3) = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B_6 = (P_2 \ P_4) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_7 = (P_2 \ P_5) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_8 = (P_3 \ P_4) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_9 = (P_3 \ P_5) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_{10} = (P_4 \ P_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

对应 B_1 的基本解为：令 $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ 得 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 6 \\ -2x_1 + 3x_2 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2} \\ x_2 = 3 \end{cases}$

$$\text{即} (-\frac{3}{2} \ 3 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

同理对应 B_2 的基本解为 $(-\frac{6}{7} \ 0 \ \frac{18}{7} \ 0 \ 0)^T$

对应 B_3 的基本解为 $(-6 \ 0 \ 0 \ 18 \ 0)^T$

对应 B_4 的基本解为 $(3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 18)^T$ 同时又为基本可行解

对应 B_5 的基本解为 $(0 \ -4 \ 6 \ 0 \ 0)^T$

对应 B_6 的基本解为 $(0 \ 4 \ 0 \ -6 \ 0)^T$

对应 B_7 的基本解为 $(0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 6)^T$ 同时又为基本可行解

对应 B_8 的基本解为 $(0 \ 0 \ 3 \ -3 \ 0)^T$

对应 B_9 的基本解为 $(0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 4)^T$ 同时又为基本可行解

对应 B_{10} 的基本解为 $(0 \ 0 \ 0 \ 6 \ 12)^T$ 同时又为基本可行解

$$(2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 18 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 18 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_5 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$$A = (P_1 \ P_2 \ P_3 \ P_4 \ P_5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = (P_1 \ P_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = (P_1 \ P_3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = (P_1 \ P_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_4 = (P_1 \ P_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_5 = (P_2 \ P_3) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_6 = (P_2 \ P_4) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_7 = (P_2 \ P_5) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_8 = (P_3 \ P_5) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_9 = (P_4 \ P_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

对应 B_1 的基本解为：令 $x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$ 得 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 18 \\ -2x_1 + 3x_2 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 30/7 \\ x_2 = 48/7 \end{cases}$

$(30/7 \ 48/7 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ 同时又为基本可行解

同理，对应 B_2 的基本解为： $(-6 \ 0 \ 8 \ 0 \ 0 \ 0)^T$

对应 B_3 的基本解为： $(-6 \ 0 \ 0 \ 24 \ 0 \ 0)^T$

对应 B_4 的基本解为： $(18 \ 0 \ 0 \ 0 \ 48 \ 0)^T$ 同时又为基本可行解

对应 B_5 的基本解为： $(0 \ 4 \ 10/3 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ 同时又为基本可行解

对应 B_6 的基本解为： $(0 \ 4 \ 0 \ 10 \ 0 \ 0)^T$ 同时又为基本可行解

对应 B_7 的基本解为： $(0 \ 4 \ 0 \ 0 \ -15 \ 0)^T$

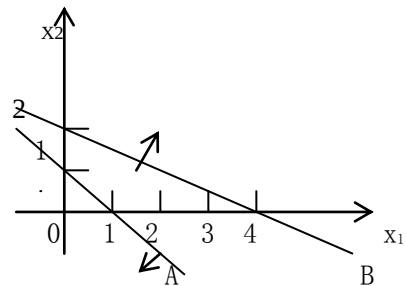
对应 B_8 的基本解为： $(0 \ 0 \ 6 \ 0 \ 12 \ 0)^T$ 同时又为基本可行解

对应 B_9 的基本解为： $(0 \ 0 \ 0 \ 18 \ 12 \ 0)^T$ 同时又为基本可行解

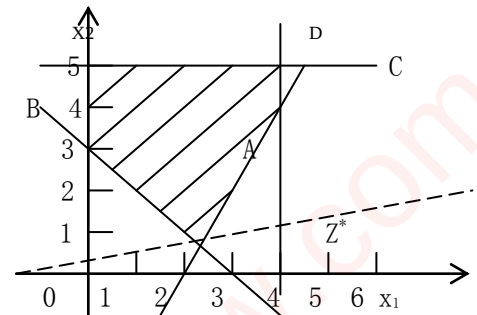
3. 用图解法求解以下线性规划问题

- (1) $\text{Max } z = 3x_1 - 2x_2$
 s.t: $x_1 + x_2 \leq 1$ (A)
 $x_1 + 2x_2 \geq 4$ (B)
 $x_1, x_2 \geq 0$

可行域为空集，无可行解， $\therefore$ 原问题无最优解。



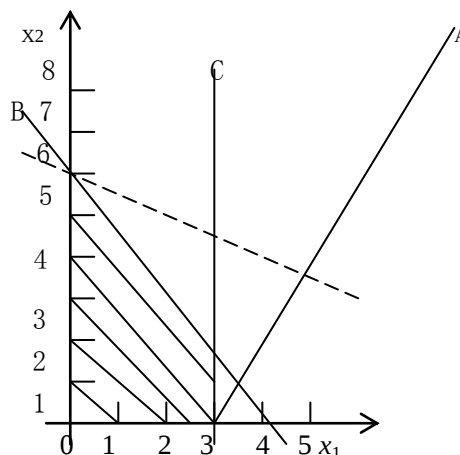
- (2) $\text{Min } f = x_1 - 3x_2$
 s.t: $2x_1 - x_2 \leq 4$ (A)
 $x_1 + x_2 \geq 3$ (B)
 $x_1 \leq 4$ (C)
 $x_2 \leq 5$ (D)
 $x_1, x_2 \geq 0$



由图可知最优解为 A, B 两直线的交点即 $(\frac{7}{3} \ \frac{2}{3})^T$ $z^* = \frac{1}{3}$

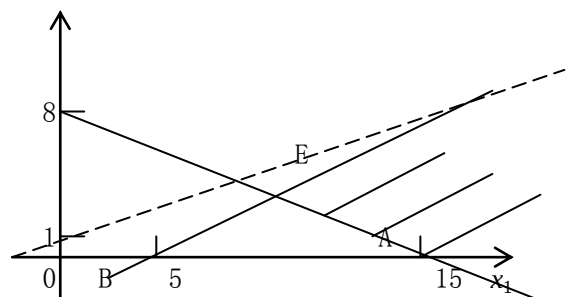
$$\begin{aligned} (3) \text{Max } z &= x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t: } 2x_1 - x_2 &\leq 6 \quad (A) \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 12 \quad (B) \\ x_1 &\leq 3 \quad (C) \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

从图中可知, 最优解为 $(0 \ 6)^T, z^* = 12$



$$\begin{aligned} (4) \text{Min } z &= -x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t: } 4x_1 + 7x_2 &\geq 56 \quad (A) \\ 3x_1 - 5x_2 &\geq 15 \quad (B) \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

由于可行域无界, 从图中可知, 目标函数无界。



4. 以下问题中, 列出所有的基, 指出其中的可行基, 基础可行解以及最优解

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 2x_1 + x_2 - x_3 \\ \text{s.t: } x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 6 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 &\leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

化为标准形

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 2x_1 + x_2 - x_3 \\ \text{s.t: } x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 6 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 + x_5 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (P_1 \ P_2 \ P_3 \ P_4 \ P_5)$$

$$B_1 = (P_1 \ P_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B_2 = (P_1 \ P_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = (P_1 \ P_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B_4 = (P_1 \ P_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_5 = (P_2 \ P_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad B_6 = (P_2 \ P_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_7 = (P_2 \ P_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B_8 = (P_3 \ P_4) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_9 = (P_3 \ P_5) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B_{10} = (P_4 \ P_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

共 10 个基

对应 B_1 的基本解为：令 $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ 得 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 + 4x_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{20}{3} \\ x_2 = -\frac{2}{3} \end{cases}$

即 $(\frac{20}{3} \ -\frac{2}{3} \ 0 \ 0 \ 0)^T$

同理

对应 B_2 的基本解为 $(\frac{14}{3} \ 0 \ \frac{2}{3} \ 0 \ 0)^T$ 同时为基本可行解, $z = \frac{26}{3}$

对应 B_3 的基本解为 $(4 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0)^T$ 同时为基本可行解, $z = 8$

对应 B_4 的基本解为 $(6 \ 0 \ 0 \ 0 \ -2)^T$

对应 B_5 的基本解为 $(0 \ \frac{14}{9} \ \frac{20}{9} \ 0 \ 0)^T$ 同时为基本可行解, $z = -\frac{2}{3}$

对应 B_6 的基本解为 $(0 \ 1 \ 0 \ 5 \ 0)^T$ 同时为基本可行解, $z = 1$

对应 B_7 的基本解为 $(0 \ 6 \ 0 \ 0 \ -20)^T$

对应 B_8 的基本解为 $(0 \ 0 \ -4 \ 14 \ 0)^T$

对应 B_9 的基本解为 $(0 \ 0 \ 3 \ 0 \ 7)^T$ 同时为基本可行解, $z = -3$

对应 B_{10} 的基本解为 $(0 \ 0 \ 0 \ 6 \ 4)^T$ 同时为基本可行解, $z = 0$

$\therefore$ 最优解为 $x^* = (\frac{14}{3} \ 0 \ \frac{2}{3} \ 0 \ 0)$ $z^* = \frac{26}{3}$

5. 用单纯型法求解以下线性规划问题

(1) $\text{Max } z = 3x_1 + 2x_2$ $\text{Max } z = 3x_1 + 2x_2$

$$s.t. : \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \leq 3 \\ -x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow s.t. : \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

C_B	X_B	b'	3	2	0	0	θ
			X_1	X_2	X_3	X_4	
0	X_3	3	[2]	-3	1	0	1.5
0	X_4	5	-1	1	0	1	-
-z		0	3	2	0	0	
	X_1	1.5	1	-3/2	1/2	0	
	X_4	6.5	0	-1/2	1/2	1	
-z		-4.5	0	13/2	-3/2	0	

$\because a_{21}'$ 与 a_{22}' 都小于 0, $\therefore$ 原问题没有最优解

$$(2) \text{Max} z = x_2 - 2x_3$$

$$\text{Max} z = x_2 - 2x_3$$

$$s.t. : \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12 \\ 2x_2 - x_3 \leq 12 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$s.t. : \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

C_B	X_B	b'	0	1	-2	0	θ
			X_1	X_2	X_3	X_4	
0	X_1	12	1	[3]	4	0	4
0	X_4	12	0	2	-1	1	0
-z		0	0	1	-2	0	
1	X_2	4	1/3	1	4/3	0	
0	X_4	4	-2/3	0	-11/3	1	
-z		-4	-1/3	0	-10/3	0	

$\therefore$ 最优解为 $x^* = (0 \ 4 \ 0 \ 4)^T$ 最优值 $z^* = 4$

$$(3) \text{Max} z = x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$\text{Max} z = x_1 - 2x_2 + 2x_3$$

$$s.t. : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 12 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 6 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$s.t. : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 6 \\ -x_1 + 3x_2 + x_6 = 9 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

C_B	X_B	b'	1	-2	1	0	0	0	θ
			X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
0	X_4	12	1	1	1	1	0	0	12
0	X_5	6	[2]	1	-1	0	1	0	3
0	X_6	9	-1	3	0	0	0	1	-
-z		0	1	-2	1	0	0	0	
0	X_4	9	0	1/2	[3/2]	1	-1/2	0	6
1	X_1	3	1	1/2	-1/2	0	1/2	0	-
0	X_6	12	0	7/2	-1/2	0	1/2	1	-
-z		-3	0	-5/2	3/2	0	-1/2	0	
1	X_3	6	0	1/3	1	2/3	-1/3	0	
1	X_1	6	1	2/3	0	1/3	1/3	0	
0	X_6	15	0	11/3	0	1/3	1/3	1	
-z		-12	0	-3	0	-1	0	0	

$$x^* = (6 \ 0 \ 6 \ 0 \ 0 \ 15)^T$$

X_5 为非基变量, 其检验数为 0, $\therefore$ 可能存在无穷多最优解

做进一步迭代, 令 X_5 为进基

C _B	X _B	b'	1	-2	1	0	0	0	θ
			X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	
1	X ₃	6	0	1/3	1	2/3	-1/3	0	-
1	X ₁	6	1	2/3	0	1/3	[1/3]	0	18
0	X ₆	15	0	11/3	0	1/3	1/3	1	45
-z		-12	0	-3	0	-1	0	0	
1	X ₃	12	1	1	1	1	0	0	
0	X ₅	18	3	2	0	1	1	0	
0	X ₆	9	-1	3	0	0	0	1	
-z		-12	0	-3	0	-1	0	0	

∴此问题有无穷多最优解

此无穷多最优解满足条件 $\begin{cases} x_1 + x_3 = 12 \\ 2x_1 - x_3 \leq 6 \end{cases}$ 其中 $x_2 = 0$, 解得无穷多最优解在线段 $x_1 + x_3 = 12$ (两端点为 $(0 \ 0 \ 12)^T, (6 \ 0 \ 6)^T$ 最优解为 $z^* = 12$

$$(4) M \inf = -2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4$$

$$M \inf = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4$$

$$s.t. : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \leq 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 \leq 12 \\ x_1 + x_3 + x_4 \leq 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow s.t. : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + x_5 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 + x_6 = 12 \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_7 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases}$$

C _B	X _B	b'	2	1	-3	5	0	0	0	θ
			X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	
0	X ₅	6	1	2	4	-1	1	0	0	-
0	X ₆	12	2	3	-1	1	0	1	0	12
0	X ₇	4	1	0	1	[1]	0	0	1	4
-z		0	2	1	-3	5	0	0	0	
0	X ₅	10	2	2	5	0	1	0	1	5
0	X ₂	8	1	[3]	-2	0	0	1	-1	8/3
5	X ₄	4	1	0	1	1	0	0	1	-
-z		-20	-3	1	-8	0	0	0	-5	
0	X ₅	14/3	4/3	0	19/3	0	1	-2/3	5/3	
1	X ₂	8/3	1/3	1	-2/3	0	0	1/3	-1/3	
5	X ₄	4	1	0	1	1	0	0	1	
-z		-68/3	-10/3	0	-22/3	0	0	-1/3	-14/3	

$$x^* = (0 \ \frac{8}{3} \ 0 \ 4 \ \frac{14}{3} \ 0 \ 0)^T \ z^* = \frac{68}{3} \therefore f^* = -\frac{68}{3}$$

6. 用大 M 法及两阶段法求解以下线性规划问题

大 M 法,

$$(1) M \inf = 3x_1 - x_2$$

$$Max z = -3x_1 + x_2 - Mx_4 - Mx_6$$

$$s.t. : \begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 3 \\ 2x_1 - 3x_2 \geq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ -4x_1 + x_2 \geq -16 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow s.t. : \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_5 + x_6 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_7 = 8 \\ 4x_1 - x_2 + x_8 = 16 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0 \end{cases}$$

C _B	X _B	b'	-3	1	0	-M	0	-M	0	0	θ
			X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	X ₈	
-M	X ₄	3	[1]	3	-1	1	0	0	0	0	3
-M	X ₆	6	2	-3	0	0	-1	1	0	0	3
0	X ₇	8	2	1	0	0	0	0	1	0	4
0	X ₈	16	4	-1	0	0	0	0	0	1	4
-z		9M	3M-3	1	-M	0	-M	0	0	0	
-3	X ₁	3	1	3	-1	1	0	0	0	0	-
-M	X ₆	0	0	-9	[2]	-2	0	0	1	0	0
0	X ₇	2	0	-5	2	-2	0	0	1	0	1
0	X ₈	4	0	-13	4	-4	0	0	0	1	1
-z		9	0	10-9M	2M-3	-3M+3	-M	0	0	0	
-3	X ₁	3	1	-3/2	0	0	-1/2	1/2	0	0	0
0	X ₃	0	0	-9/2	1	-1	-1/2	1/2	0	0	8/3
0	X ₇	2	0	4	0	0	1	-1	1	0	1
0	X ₈	4	0	15	0	0	2	-2	0	1	1
-z		9	0	-7/2	0	-M	-3/2	M+3/2	0	0	

$\therefore$ 最优解为 $x^* = (3 \ 0)^T$ $z^* = -9$ $\therefore f^* = 9$

两阶段法

第一阶段

$Maxz' = -x_4 - x_6$

$$s.t. : \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_5 + x_6 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_7 = 8 \\ 4x_1 - x_2 + x_8 = 16 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0 \end{cases}$$

C _B	X _B	b'	0	0	0	-1	0	-1	0	0	θ
			X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	X ₈	
-1	X ₄	3	[1]	3	-1	1	0	0	0	0	3
-1	X ₆	6	2	-3	0	0	-1	1	0	0	3
0	X ₇	8	2	1	0	0	0	0	1	0	4
0	X ₈	16	4	-1	0	0	0	0	0	1	4
-z'		9	3	0	-1	0	-1	0	0	0	

0	X_1	3	1	3	-1	1	0	0	0	0	-
-1	X_6	0	0	-9	[2]	-2	-1	1	0	0	0
0	X_7	2	0	-5	2	-2	0	0	1	0	1
0	X_8	4	0	-13	4	-4	0	0	0	1	1
$-z'$		0	0	-9	2	-3	-1	0	0	0	
0	X_1	3	1	-3/2	0	0	-1/2	1/2	0	0	
0	X_3	0	0	-9/2	1	-1	-1/2	1/2	0	0	
0	X_7	2	0	4	0	0	1	-1	1	0	
0	X_8	4	0	5	0	0	2	-2	0	1	
$-z'$		0	0	0	0	-1	0	-1	0	0	

第二阶段

C_B	X_B	b'	-3	1	0	0	0	0	θ
			X_1	X_2	X_3	X_5	X_7	X_8	
-3	X_1	3	1	-3/2	0	-1/2	0	0	
0	X_3	0	0	-9/2	1	-1/2	0	0	
0	X_7	2	0	4	0	1	1	0	
0	X_8	4	0	5	0	2	0	1	
$-z$		9	0	-7/2	0	-3/2	0	0	

$\therefore$ 最优解 $x^* = (3 \ 0)^T$ $z^* = -9$ $\therefore f^* = 9$

(2) $Max z = x_1 + 3x_2 + 4x_3$

$$s.t. : \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 13 \\ x_2 + 3x_3 \leq 17 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 13 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

①大 M 法

$Max z = x_1 + 3x_2 + 4x_3 - Mx_6$

$$s.t. : \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 13 \\ x_2 + 3x_3 + x_5 = 17 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 13 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

C_B	X_B	b'	1	3	4	0	0	-M	θ
			X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
0	X_4	13	[3]	2	0	1	0	0	13/3
0	X_5	17	0	1	3	0	1	0	-
-M	X_6	13	2	1	1	0	0	1	13/2
$-z$		3M	1+2M	3+M	4+M	0	0	0	

1	X_1	13/3	1	2/3	0	1/3	0	0	-
0	X_5	17	0	1	3	0	1	0	17/3
-M	X_6	13/3	0	-1/3	[1]	-2/3	0	1	13/3
-z		13M/3-13/3	0	7/3-M/3	4+M	-1/3-2M/3	0	0	
1	X_1	13/3	1	2/3	0	1/3	0	0	13/2
0	X_5	4	0	[2]	3	0	1	0	2
4	X_6	13/3	2	-1/3	1	0	0	1	-
-z		-65/3	0	11/3	0	7/3	0	-M-4	
1	X_1	3	1	0	0	-1/3	-1/3	-1	
3	X_2	2	0	1	0	1	1/2	-3/2	
4	X_3	5	0	0	1	-1/3	1/6	-1/2	
-z		-29	0	0	0	-4/3	-11/6	3/2-M	

$$\therefore x^* = (3 \ 2 \ 5)^T \quad z^* = 29$$

②两阶段法

第一阶段

$$\text{Max} z' = -x_6$$

$$s.t. : \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 13 \\ x_2 + 3x_3 + x_5 = 17 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 13 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

C_B	X_B	b'	0	0	0	0	0	-1	θ
			X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
0	X_4	13	[3]	2	0	1	0	0	13/3
0	X_5	17	0	1	3	0	1	0	-
-1	X_6	13	2	1	1	0	0	1	13/2
-z'		13	2	1	1	0	0	0	
0	X_1	13/3	1	2/3	0	1/3	0	0	-
0	X_5	17	0	1	3	0	1	0	17/3
-1	X_6	13/3	0	-1/3	[1]	-2/3	0	1	13/3
-z'		13/3							
0	X_1	13/3	1	2/3	0	1/3	0	0	
0	X_5	4	0	2	0	2	1	-3	
0	X_3	13	2	-3/1	1	-2/3	0	1	
-z'		0	0	0	0	0	0	-1	

第二阶段

C_B	X_B	b'	1	3	4	0	0	θ
			X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
1	X_1	13/3	1	2/3	0	1/3	0	13/2
0	X_5	4	0	[2]	0	2	1	2
4	X_3	13/3	0	-1/3	1	-2/3	0	-

$-z'$		$-65/3$	0	11/3	0	7/3	0	
1	X_1	3	1	0	0	$-1/3$	$-1/3$	
3	X_2	2	0	1	0	1	$1/2$	
4	X_3	5	0	0	1	$-1/3$	$1/6$	
$-z'$		-29	0	0	0	$-4/3$	$-11/6$	

$$\therefore x^* = (3 \ 2 \ 5)^T \quad z^* = 29$$

$$(3) \text{Max} z = 2x_1 - x_2 + x_3$$

$$s.t. : \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 8 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 \leq 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

①大 M 法

$$\text{Max} z = 2x_1 - x_2 + x_3 - Mx_7$$

$$s.t. : \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 8 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_6 + x_7 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases}$$

C_B	X_B	b'	2	-1	1	0	0	0	-M	θ
			X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	
0	X_4	8	1	1	-2	1	0	0	0	8
0	X_5	2	4	-1	1	0	1	0	0	-
-M	X_7	4	2	[3]	-1	0	0	-1	1	4/3
$-z$		4M	$2+2M$	$-1+3M$	$1-M$	0	0	-M	0	
0	X_4	20/3	1/3	0	-5/3	1	0	1/3	-1/3	20
0	X_5	10/3	[14/3]	0	2/3	0	1	-1/3	1/3	10/14
-1	X_2	4/3	2/3	1	-1/3	0	0	-1/3	1/3	2
$-z$		4/3	8/3	0	2/3	0	0	-1/3	$-M+1/3$	
0	X_4	45/7	0	0	-12/7	1	-1/14	5/14	-5/14	-
2	X_1	5/7	1	0	[1/7]	0	3/14	-1/14	1/14	5
-1	X_2	6/7	0	1	-3/7	0	-1/7	-2/7	2/7	-
$-z$		-4/7	0	0	2/7	0	-4/7	0	$-M+1/7$	
0	X_4	105/7	12	0	0	1	5/2	-1/2	1/2	
1	X_3	5	7	0	1	0	3/2	-1/2	1/2	
-1	X_2	3	3	1	0	0	1/2	-1/2	1/2	
$-z$		-2	-2	0	0	0	-1	0	-M	

$$\therefore x^* = (0 \ 3 \ 5)^T \quad z^* = 2$$

②两阶段法

第一阶段

$$\text{Max } z' = -x_7$$

$$\text{s.t.} : \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 8 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_6 + x_7 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases}$$

C_B	X_B	b'	0	0	0	0	0	0	-1	θ
			X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	
0	X_4	8	1	1	-2	1	0	0	0	8
0	X_5	2	4	-1	1	0	1	0	0	-
-1	X_7	4	2	[3]	-1	0	0	-1	1	4/3
$-z$		4	2	3	-1	0	0	-1	0	
0	X_4	20/3	1/3	0	-5/3	1	0	1/3	-1/3	
0	X_5	10/3	14/3	0	2/3	0	1	-1/3	1/3	
0	X_2	4/3	2/3	1	-1/3	0	0	-1/3	1/3	
$-z$		0	0	0	0	0	0	0	-1	

第二阶段

C_B	X_B	b'	2	-1	1	0	0	0	θ
			X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
0	X_4	20/3	1/3	0	-5/3	1	0	1/3	20
0	X_5	10/3	[14/3]	0	2/3	0	1	-1/3	10/14
-1	X_2	4/3	2/3	1	-1/3	0	0	-1/3	2
$-z$		4/3	8/3	0	2/3	0	0	-1/3	
0	X_4	45/7	0	0	-12/7	1	-1/14	5/14	-
2	X_1	5/7	1	0	1/7	0	3/14	-1/14	5
-1	X_2	6/7	0	1	-3/7	0	-1/7	-2/7	-
$-z$		-4/7	2	0	2/7	0	-4/7	-1/7	
0	X_4	105/7	12	0	0	1	5/2	-1/2	
1	X_3	5	7	0	1	0	3/2	-1/2	
-1	X_2	3	3	1	0	0	1/2	-1/2	
$-z$		-2	-2	0	0	0	-1	0	

$$(4) \text{Min } z = x_1 + 3x_2 - x_3$$

$$\text{s.t.} : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 3 \\ -x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

①大M法

$$\text{Max} z = -x_1 - 3x_2 + x_3 - Mx_5 - Mx_7$$

$$\text{s.t.} : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + x_6 - x_7 = 2 \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 + x_8 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0 \end{cases}$$

C_B	X_B	b	-1	-3	1	0	-M	0	-M	0	θ
			X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	
-M	X_5	3	1	1	1	-1	1	0	0	0	3
-M	X_7	2	-1	2	0	0	0	-1	1	0	1
0	X_8	4	-1	[5]	1	0	0	0	0	1	4/5
-z		5M	-1	3M-3	1+M	-M	0	-M	0	0	
-M	X_5	11/5	[6/5]	0	4/5	-1	1	0	0	-1/5	11/6
-M	X_7	2/5	-3/5	0	-2/5	0	0	-1	1	-2/5	-
-3	X_2	4/5	-11/5	1	1/5	0	0	0	0	1/5	-
-z		$13M/5 + 12/5$	$3M/5 + 8/5$	0	$2M/5 + 8/5$	-M	0	-M	0	$3/5 - 3M/5$	

C_B	X_B	b	-1	-3	1	0	-M	0	-M	0	θ
			X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	
-1	X_1	11/6	1	0	[2/3]	-5/6	5/6	0	0	-1/6	11/4
-M	X_7	3/2	0	0	0	-1/2	1/2	-1	1	-1/2	-
-3	X_8	7/6	0	1	1/3	-1/6	1/6	0	0	1/6	7/2
-z		$3M/2 + 16/3$	0	0	8/3	$-4/3 - M/2$	$4/3 - M/2$	-M	0	$0 - 2/3 - M/2$	
+1	X_3	11/4	3/2	0	1	-5/4	5/4	0	0	-1/4	
-M	X_7	2/3	0	0	0	-1/2	1/2	-1	1	-1/2	
-3	X_2	4/5	-1/2	1	0	1/4	-1/4	0	0	1/4	
-z		$3M/2 - 2$	-4	0	0	0	$2 - M/2$	-M	0	$1 - M/2$	

∴原问题无最优解

②两阶段法

第一阶段

$$\text{Max} z' = -x_5 - x_7$$

$$\text{s.t.} : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + x_6 - x_7 = 2 \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 + x_8 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0 \end{cases}$$

C_B	X_B	b	-1	-3	1	0	-M	0	-M	0	θ
			X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	
-1	X_5	3	1	1	1	-1	1	0	0	0	3
-1	X_7	2	-1	2	0	0	0	-1	1	0	1
0	X_8	4	-1	[5]	1	0	0	0	0	1	4/5
$-z$		5	-1	3	1	-1	0	-1	0	0	
-1	X_5	11/5	[6/5]	0	4/5	-1	1	0	0	-1/5	11/6
-1	X_7	2/5	-3/5	0	-2/5	0	0	-1	1	-2/5	-
-0	X_2	4/5	-1/5	1	1/5	0	0	0	0	1/5	-
$-z$		13/5	3/5	0	2/5	-1	0	-1	0	-3/5	
0	X_1	11/6	1	0	2/3	-5/6	5/6	0	0	-1/6	
-1	X_7	3/2	0	0	0	-1/2	1/2	-1	1	-1/2	
0	X_8	7/6	0	1	1/3	-1/6	1/6	0	0	1/6	
$-z$		3/2	0	0	0	-1/2	-1/2	-1	0	-1/2	

∴原问题无最优解

7. 解：设星期一至星期五工作的有 x_1 人，星期二至星期六工作的有 x_2 人；

星期三至星期日工作的有 x_3 人，星期四至星期一工作的有 x_4 人；

星期五至星期二工作的有 x_5 人，星期六至星期三工作的有 x_6 人；

星期日至星期四工作的有 x_7 人。

$$M \inf = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

$$s.t. : \begin{cases} x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 15 \\ x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 24 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 25 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geq 19 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 31 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 28 \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 28 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{cases}$$

解得 $x^* = (8 \ 0 \ 12 \ 0 \ 11 \ 5 \ 0)^T, f^* = 36$

8. 解：	3.1m	2.5m	1.7m	剩	根数
方法 1	2	1	0	0.3	x_1
方法 2	2	0	1	1.1	x_2
方法 3	0	3	0	1.5	x_3
方法 4	1	2	0	0.9	x_4
方法 5	0	2	2	0.6	x_5
方法 6	0	1	3	1.4	x_6
方法 7	1	1	2	0	x_7
方法 8	0	0	5	0.5	x_8
方法 9	1	0	3	0.8	x_9

$$M \inf = 0.3x_1 + 1.1x_2 + 1.5x_3 + 0.9x_4 + 0.6x_5 + 1.4x_6 + 0x_7 + 0.5x_8 + 0.8x_9$$

$$s.t : \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_7 + x_9 \geq 200 \\ x_1 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 + x_6 + x_7 \geq 100 \\ x_2 + 2x_5 + 3x_6 + 2x_7 + 5x_8 + 3x_9 \geq 300 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{解得 } x^* = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 200 \ 0 \ 0)^T, f^* = 0$$

另外一个线性规划模型:

$$M \inf = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9$$

$$s.t : \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_7 \geq 200 \\ x_1 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 + x_6 + x_7 \geq 100 \\ x_2 + 2x_5 + 3x_6 + 2x_7 + 5x_8 + 3x_9 \geq 300 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{解得 } x^* = (100 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 60 \ 0)^T, f^* = 160$$

9. 解: 设 x_{li} 表示 i 个零件在 A 上的加工数;

设 x_{2i} 表示第 i 个零件在 B 上的加工数; $i=1,2,3,4$;

$$M \inf_1 = 50x_{11} + 30x_{21} + 80x_{12} + 100x_{22} + 90x_{13} + 50x_{23} + 40x_{14} + 70x_{24} + 100 + 150$$

$$f_2 = 3 \times (50 + 80 + 90 + 40) - 100 = 880$$

$$f_3 = 3 \times (30 + 100 + 50 + 70) + 150 = 900$$

$$s.t : \begin{cases} x_{11} + x_{21} = 3 \\ x_{12} + x_{22} = 3 \\ x_{13} + x_{23} = 3 \\ x_{14} + x_{24} = 3 \\ x_{1i}, x_{2i} \geq 0 (i=1,2,3,4) \end{cases}$$

$$\text{解得 } x^* = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, f^* = 850$$

另外一种整数规划模型为:

$$\text{设: } y_1 = \begin{cases} 0, & A \text{ 不启动} \\ 1, & A \text{ 启动} \end{cases} \quad y_2 = \begin{cases} 0, & B \text{ 不启动} \\ 1, & B \text{ 启动} \end{cases}$$

$$M \inf = 50x_{11} + 30x_{21} + 80x_{12} + 100x_{22} + 90x_{13} + 50x_{23} + 40x_{14} + 70x_{24} + 100y_1 + 150y_2$$

$$s.t : \begin{cases} x_{11} + x_{21} = 3 \\ x_{12} + x_{22} = 3 \\ x_{13} + x_{23} = 3 \\ x_{14} + x_{24} = 3 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq My_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq My_2 \\ x_{ij} \geq 0 (i=1,2, j=1,2,3,4, M \text{ 为一个正数}) \end{cases}$$

10. 设 x_{ij} 为第 i 年生产, 第 j 年交货, x'_{ij} 表示第 i 年加班生产, 第 j 年交货

$$\min f = 500x_{11} + 560x'_{11} + 530x_{12} + 590x'_{12} + 560x_{13} + 620x'_{13} + 2 \times 30 + 600x_{22} + 660x'_{22} + 630x_{23} + 690x'_{23} + 500x_{33} + 560x'_{33}$$

$$s.t : \begin{cases} x_{11} + x'_{11} = 4 \\ x_{12} + x'_{12} + x_{22} + x'_{22} = 4 \\ x_{13} + x'_{13} + x_{23} + x'_{23} + x_{33} + x'_{33} = 5 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 3 \\ x'_{11} + x'_{12} + x'_{13} \leq 3 \\ x_{22} + x_{23} \leq 5 \\ x'_{22} + x'_{23} \leq 2 \\ x_{33} \leq 2 \\ x'_{33} \leq 3 \\ x_{ij}, x'_{ij} \geq 0 (i=1,2,3; j=1,2,3) \end{cases}$$

第三章 线性规划问题的对偶与灵敏度分析

1. 写出下列问题的对偶规划

$$(1) \text{Max} z = -3x_1 + 5x_2 \quad M \text{ inf} = 5y_1 + 2y_2$$

$$s.t : \begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow s.t : \begin{cases} -y_1 + 2y_2 \geq -3 \\ 2y_1 + y_2 \geq 5 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(2) \text{Max} z = x_1 + 2x_2 + x_3 \quad M \text{ inf} = 8y_1 + 6y_2$$

$$s.t : \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 8 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1, x_2, x_3, \text{无符号限制} \end{cases} \Rightarrow s.t : \begin{cases} 2y_1 - y_2 = 1 \\ y_1 + 2y_2 = 2 \\ 3y_2 = 1 \\ y_1, y_2 \text{无符号限制} \end{cases}$$

$$(3) \text{Max} z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4$$

$$M \inf = 5y_1 - 8y_2 + 10y_3$$

$$s.t : \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 5 \\ 6x_1 + 7x_2 - x_3 + 5x_4 \geq 8 \\ 12x_1 - 9x_2 + 7x_3 + 6x_4 \leq 10 \\ x_1, x_3 \geq 0, x_2, x_4 \text{ 无符号限制} \end{cases} \Rightarrow s.t : \begin{cases} -y_1 - 6y_2 + 12y_3 \geq 1 \\ y_1 - 7y_2 - 9y_3 = 2 \\ -y_1 + y_2 + 7y_3 \geq -3 \\ -3y_1 - 5y_2 + 6y_3 = 4 \\ y_1 \text{ 无符号限制}, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$(4) M \inf = -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 7x_4 - 8x_5$$

$$s.t : \begin{cases} x_2 - x_3 + 3x_4 - 4x_5 = -6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 \geq 2 \\ -x_1 + 2x_3 - 2x_4 \leq -5 \\ -2 \leq x_1 \leq 10 \\ 5 \leq x_2 \leq 25 \end{cases} \Rightarrow \text{变形为}$$

$$M \inf = -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 7x_4 - 8x_5$$

$$s.t : \begin{cases} x_2 - x_3 + 3x_4 - 4x_5 = -6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 \geq 2 \\ x_1 - 2x_3 + 2x_4 \geq 5 \\ x_1 \geq -2 \\ -x_1 \geq -10 \\ x_2 \geq 5 \\ -x_2 \geq -25 \end{cases} \text{对偶规划为}$$

$$\text{Max} z = -6y_1 + 2y_2 + 5y_3 - 2y_4 - 10y_5 + 5y_6 - 25y_7$$

$$s.t : \begin{cases} 2y_2 + y_3 + y_4 - y_5 = -3 \\ y_1 + 3y_2 + y_6 - y_7 \leq 2 \\ -y_1 - 3y_2 - 2y_3 = 5 \\ 3y_1 - y_2 + 2y_3 = -7 \\ -4y_1 = -8 \\ y_1 \text{ 无符号限制}; y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7 \geq 0 \end{cases}$$

$$(5) M \inf = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^6 c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{Max} z = \sum_{i=1}^5 a_i y_i + \sum_{i=1}^n b_{i-5} y_i$$

$$s.t : \begin{cases} \sum_{j=1}^6 x_{ij} = a_i (i=1,2,\dots,5) \\ \sum_{i=1}^5 x_{ij} = b_j (j=1,2,\dots,6) \\ x_{ij} \geq 0 \begin{pmatrix} i=1,2,\dots,5 \\ j=1,2,\dots,6 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow s.t : \begin{cases} y_i + y_j \geq c_{i(j-5)} (i=1,\dots,5; j=6,\dots,11) \\ y_i \geq 0, y_j \text{ 无限制} \end{cases}$$

$$(6) \text{Max} z = \sum_{j=1}^6 c_j x_j$$

$$M \inf = \sum_{i=1}^{10} b_i y_i$$

$$s.t : \begin{cases} \sum_{j=1}^6 a_{ij} x_j \leq b_i (i=1,\dots,5) \\ \sum_{j=1}^6 a_{ij} x_j = b_i \\ x_j \geq 0 (j=1,\dots,6) \end{cases} \Rightarrow s.t : \begin{cases} \sum_{i=1}^{10} a_{ij} y_i \geq c_j \begin{pmatrix} i=1,\dots,10 \\ j=1,\dots,6 \end{pmatrix} \\ y_i \geq 0 (i=1,\dots,5) \\ y_j (j=6,\dots,10) \text{ 无符号限制} \end{cases}$$

2. 使用对偶理论讨论下列原问题与他们的对偶问题是否有最优解

$$(1) \text{Max} z = 2x_1 + 2x_2$$

$$M \inf = 2y_1 + y_2$$

$$s.t : \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{对偶问题}} s.t : \begin{cases} -y_1 - 2y_2 \geq 2 \\ y_1 + y_2 \geq 2 \\ y_1 - y_2 \geq 0 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

原问题有可行解: $x = (0 \ 0 \ 0)^T$, 但对偶问题无可行解

$\therefore$ 原问题无最优解

$$(2) M \inf = -x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$\text{Max} z = -4y_1 + 6y_2$$

$$s.t : \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \geq -4 \\ x_1 + 2x_2 = 6 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{对偶问题}} s.t : \begin{cases} 2y_1 + y_2 \leq 1 \\ -y_1 + y_2 \leq 2 \\ y_1 \leq 1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \text{ 无符号限制} \end{cases}$$

$\therefore$ 原问题有可行解 $x = (6 \ 0 \ 0)^T$ 对偶问题有可行解 $y = (0 \ -1)^T$

$\therefore$ 原问题有最优解

3. 考虑如下线性规划

$$M \inf = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

$$s.t : \begin{cases} x_1 + x_4 \geq 5 \\ x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_2 + x_3 \geq 8 \\ x_3 + x_4 \geq 7 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

(1) 写出如下对偶规划

$$Maxz = 5y_1 + 6y_2 + 8y_3 + 7y_4$$

$$s.t : \begin{cases} y_1 + y_2 \leq 1 \\ y_2 + y_3 \leq 1 \\ y_3 + y_4 \leq 1 \\ y_1 + y_4 \leq 1 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

(2) 用单纯形法解对偶规划, 并在最优表中给出原规划的最优解

C _B	X _B	b [*]	5	6	8	7	0	0	0	0	θ
			Y ₁	Y ₂	Y ₃	Y ₄	Y ₅	Y ₆	Y ₇	Y ₈	
0	Y ₅	1	1	1	0	0	1	0	0	0	-
0	Y ₆	1	0	1	[1]	0	0	1	0	0	1
0	Y ₇	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1
0	Y ₈	1	1	0	0	1	0	0	0	1	-
			5	6	8	7	0	0	0	0	
0	Y ₅	1	1	1	0	0	1	0	0	0	-
8	Y ₃	1	0	1	1	0	0	1	0	0	-
0	Y ₇	0	0	-1	[1]	0	-1	1	0	0	0
0	Y ₈	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1
			5	-2	0	7	0	-8	0	0	

C _B	X _B	b [*]	5	6	8	7	0	0	0	0	θ
			Y ₁	Y ₂	Y ₃	Y ₄	Y ₅	Y ₆	Y ₇	Y ₈	
0	Y ₅	1	[1]	1	0	0	1	0	0	0	1
8	Y ₃	1	0	1	1	0	0	1	0	0	-
7	Y ₄	0	0	-1	0	1	0	-1	1	0	-
0	Y ₈	1	-1	1	0	0	0	1	-1	1	-
			5	5	0	0	0	-1	-7	0	
5	Y ₁	1	1	1	0	0	1	0	0	0	
8	Y ₃	1	0	1	1	0	0	1	0	0	
7	Y ₄	0	0	-1	0	1	0	-1	1	0	
0	Y ₈	0	1	0	0	0	-1	1	-1	1	
			0	0	0	0	-5	-1	-7	0	

原规划的最优解为 $(5 \ 1 \ 7 \ 0)^T$

(3) 说明这样做比直接求解原规划的好处:

避免引入人工变量, 进而避免用大 M 法或两阶段法求解、简化计算。

4. 通过求解对偶问题, 求下面不等式组的一个解

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq -4 \\ 3x_1 - 5x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

令目标函数为

$$M \inf = x_1$$

并将不等式变为

$$Maxz = -12y_1 + 4y_2 - 2y_3$$

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 \geq -12 \\ 3x_1 - 2x_2 \geq 4 \\ -3x_1 + 5x_2 \geq -2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{对偶规划}} s.t. : \begin{cases} -2y_1 + 3y_2 - 3y_3 \leq 1 \\ -3y_1 - 2y_2 + 5y_3 \leq 0 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

用单纯形表求解该对偶规划:

C _B	Y _B	b'	-12	4	-2	0	0	θ
			y ₁	y ₂	y ₃	y ₄	y ₅	
0	y ₄	1	-2	[3]	-3	1	0	1/3
0	y ₅	0	-3	-2	5	0	1	—
			-12	4	-2	0	0	
4	y ₂	1/3	-2/3	1	-1	1/3	0	—
0	y ₅	2/3	-13/3	0	[3]	2/3	1	2/9
			-28/3	0	2	-4/3	0	
4	y ₂	5/9	-19/9	1	0	5/9	1/3	
-2	y ₃	2/9	-13/9	0	1	2/9	1/3	
			-58/9	0	0	-16/9	-2/3	

由上表可知原不等式组的一个可行解为(16/9, 2/3)^T。

5. 应用对偶性质, 直接给出下面问题的最优目标值

$$\text{Min} \quad f = 10x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

$$s. t. \quad 5x_1 - 7x_2 + 3x_3 \geq 50$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\text{其对偶规划为: } \text{Max} \quad z = 50y_1$$

$$s. t. \quad 5y_1 \leq 10$$

$$-7y_1 \leq 4$$

$$3y_1 \leq 5$$

$$y_1 \geq 0$$

求解对偶规划的约束条件可知 $y_1 \in [0, 5/3]$,

所以, $z^* = 50 \times 5/3 = 250/3$,

利用对偶性质得 $f^* = z^* = 250/3$ 。

6. 有两个线性规划

$$(1) \text{ Max } z = c^T x$$

$$\text{s. t. } Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$(2) \text{ Max } z = c^T x$$

$$\text{s. t. } Ax = b^*$$

$$x \geq 0$$

已知线性规划 (1) 有最优解, 求证: 如果规划 (2) 有可行解, 则必有最优解。

解: (1) 的对偶规划为:

$$\text{Min } f = b^T y$$

$$\text{s. t. } A^T y \geq c^T$$

y 无非负限制

$\because$ (1) 有最优解,

$\therefore$ (1) 的对偶规划有可行解。

又 $\because$ (2) 的对偶规划与 (1) 的对偶规划的约束条件相同,

$\therefore$ (2) 的对偶规划有可行解。

又 $\because$ (2) 有可行解,

$\therefore$ (2) 有最优解。

(2) 的对偶规划为:

$$\text{Min } f = b^{*T} y$$

$$\text{s. t. } A^T y \geq c^T$$

y 无非负限制

7. 用对偶单纯形法求解下列问题:

$$\text{Min } f = 5x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

$$\text{s. t. } 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 4$$

$$6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\text{变形得: Max } z = -5x_1 - 2x_2 - 4x_3$$

$$\text{s. t. } -3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -4$$

$$-6x_1 - 3x_2 - 5x_3 + x_5 = -10$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

C_B	x_B	b'	-5	-2	-4	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_4	-4	-3	-1	-2	1	0
0	x_5	-10	-6	[-3]	-5	0	1
			-5	-2	-4	0	0
0	x_4	-2/3	[-1]	0	-1/3	1	-1/3

-2	x_2	10/3	2	1	5/3	0	-1/3
			-1	0	-2/3	0	-2/3
-5	x_1	2/3	1	0	1/3	-1	1/3
-2	x_2	2	0	1	1	2	-1
			0	0	-1/3	-1	-1/3

所以, 最优值为 $z^* = 22/3$, 即 $f = -22/3$ 。最优解为 $x^* = (2/3, 2, 0)^T$ 。

(2) Max $z = -x_1 - 2x_2 - 3x_3$

变形为: Max $z = -x_1 - 2x_2 - 3x_3$

s. t. $2x_1 - x_2 + x_3 \geq 4$

s. t. $-2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4$

$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 8$

$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 8$

$x_2 - x_3 \leq 2$

$x_2 - x_3 + x_6 = 2$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

C_B	x_B	b'	-1	-2	-3	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_4	-4	[-2]	1	-1	1	0	0
0	x_5	8	1	1	2	0	1	0
0	x_6	2	0	1	-1	0	0	1
			-1	-2	-3	0	0	0
-1	x_1	2	1	-1/2	1/2	-1/2	0	0
0	x_5	6	0	3/2	3/2	1/2	1	0
0	x_6	2	0	1	-1	0	0	1
			0	-5/2	-5/2	-1/2	0	0

所以, $z^* = -2$, $x^* = (2, 0, 0, 6, 2)^T$ 。

8. (1) 分别对 c_1, c_2 进行灵敏度分析

$c_1 : \sigma_4 - \Delta c_1 a_{14} \leq 0$ 即: $-3/2 - \Delta c_1 \times 0 \leq 0$

$\sigma_5 - \Delta c_1 a_{15} \leq 0$ $-1/8 - \Delta c_1 \times 1/4 \leq 0$

解之得 $\Delta c_1 \geq -1/2$

即 c_1 在 $[3/2, +\infty)$ 变化时, 保持最优解不变。

$c_1 : \sigma_4 - \Delta c_2 a_{24} \leq 0$ 即: $-3/2 - \Delta c_2 \times 1/2 \leq 0$

$\sigma_5 - \Delta c_2 a_{25} \leq 0$ $-1/8 - \Delta c_2 \times (-1/8) \leq 0$

解之得 $-3 \leq \Delta c_2 \leq 1$,

亦即 $0 \leq c_2 + \Delta c_2 \leq 4$

所以, 当 c_2 在 $[0, 4]$ 范围内变化时, 保持最优解不变。

(2) 对 b_3 进行灵敏度分析

$x_B \rightarrow \bar{x}_B = B^{-1}(b + \Delta b) = B^{-1}b + B^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta b_3 \end{pmatrix}^T$

$$= \begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \\ b_3' \\ b_4' \end{pmatrix} + \Delta b_3 \begin{pmatrix} \beta_{13} \\ \beta_{23} \\ \beta_{33} \\ \beta_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \Delta b_3 \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1/4 \\ 1/2 \\ 1/8 \end{pmatrix} \geq 0$$

解得 $-8 \leq \Delta b_3 \leq 0$

即 $8 \leq b_3 + \Delta b_3 \leq 16$

所以，当 b_3 在 $[8, 16]$ 的范围内变化时，保持最优基不变。

(3) 当 $c_2=5$ 时，求新的最优解：

$\because$ 当 $c_2=5$ 时，超出了 $[0, 4]$ 的保持最优解不变的范围，

$\therefore$ 最优解将发生变化，通过下面的单纯形表求解：

C_B	x_B	b'	2	5	0	0	0	0	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_3	0	0	0	1	-1	-1/4	0	—
2	x_1	4	1	0	0	0	1/4	0	16
0	x_6	4	0	0	0	-2	[1/2]	1	8
5	x_2	2	0	1	0	1/2	-1/8	0	—
			0	0	0	-5/2	1/8	0	
0	x_3	2	0	0	1	-2	0	1/2	
2	x_1	2	1	0	0	1	0	-1/2	
0	x_5	8	0	0	0	-4	1	2	
5	x_2	3	0	1	0	0	0	1/4	
			0	0	0	-2	0	-1/4	

此时，最优解为 $x^*=(2, 3, 2, 0, 8, 0)^T$ ，最优值 $z^*=19$ 。

(4) 当 $b_3=4$ 时，求新的最优解

$\because$ 当 $b_3=4$ 时超出了 $[8, 16]$ 的范围，

$\therefore$ 最优解将发生变化。

C_B	x_B	b'	2	3	0	0	0	0	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_3	3	0	0	1	-1	-1/4	0	—
2	x_1	1	1	0	0	0	1/4	0	—
0	x_6	-2	0	0	0	[-2]	1/2	1	1
3	x_2	7/2	0	1	0	1/2	-1/8	0	7
			0	0	0	-3/2	-1/8	0	
0	x_3	4	0	0	1	0	0	-1/2	
2	x_1	1	1	0	0	0	1/4	0	
0	x_4	1	0	0	0	1	-1/4	-1/2	
3	x_2	3	0	1	0	0	0	1/4	
			0	0	0	0	-1/2	-3/4	

此时，最优解为 $x^*=(1, 3, 4, 1, 0, 0)^T$ ，最优值 $z^*=11$ 。

(5) 增加一个约束 $2x_1+2.4x_2 \leq 12$

引入松弛变量： $2x_1+2.4x_2+x_7=12$

C _B	x _B	b'	2	3	0	0	0	0	0
			x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇
0	x ₃	0	0	0	1	-1	-1/4	0	0
2	x ₁	4	1	0	0	0	1/4	0	0
0	x ₆	4	0	0	0	-2	1/2	1	0
3	x ₂	2	0	1	0	1/2	-1/8	0	0
0	x ₇	12	2	2.4	0	0	0	0	1
0	x ₃	0	0	0	1	-1	-1/4	0	0
2	x ₁	4	1	0	0	0	1/4	0	0
0	x ₆	4	0	0	0	-2	1/2	1	0
3	x ₂	2	0	1	0	1/2	-1/8	0	0
0	x ₇	-0.8	0	0	0	-1.2	[-0.2]	0	1
			0	0	0	-3/2	-1/8	0	0
0	x ₃	1	0	0	1	1/2	0	0	-5/4
2	x ₁	3	1	0	0	-3/2	0	0	5/4
0	x ₆	2	0	0	0	-5	0	1	5/2
3	x ₂	5/2	0	1	0	5/4	0	0	-5/8
0	x ₅	4	0	0	0	6	1	0	-5
			0	0	0	-3/4	0	0	-5/8

所以，当增加该约束时，最优解变为 $x^* = (3, 5/2, 1, 0, 4, 2, 0)^T$ ，最优值 $z^* = 27/2$ 。

(6) 确定保持当前最优解不变的 P_4 的范围

$$\sigma_4 = c_4 - y^T P_4 \leq 0 = 0 - (0, 3/2, 1/8, 0) \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \\ a_{44} \end{pmatrix} \leq 0$$

9. (1) 如何充分发挥设备能力，使工厂获利最大？

解：设 x_i 为生产 A_i 产品的数量

$$\text{Max } z = 3x_1 + 2x_2 + 2.9x_3$$

$$8x_1 + 16x_2 + 10x_3 \leq 304$$

$$\text{s. t. } 10x_1 + 5x_2 + 8x_3 \leq 400$$

$$2x_1 + 13x_2 + 10x_3 \leq 420$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\text{标准化为：Max } z = 3x_1 + 2x_2 + 2.9x_3$$

$$8x_1 + 16x_2 + 10x_3 + x_4 = 304$$

$$\text{s. t. } 10x_1 + 5x_2 + 8x_3 + x_5 = 400$$

$$2x_1 + 13x_2 + 10x_3 + x_6 = 420$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

C_B	x_B	b'	3	2	2.9	0	0	0	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0	x_4	304	[8]	16	10	1	0	0	36
0	x_5	400	10	5	8	0	1	0	40
0	x_6	420	2	13	10	0	0	1	210
			3	2	2.9	0	0	0	
3	x_1	36	1	2	5/4	1/8	0	0	
0	x_5	40	0	-15	-9/2	-5/4	1	0	
0	x_6	348	0	9	15/2	-1/4	0	1	
			0	-4	-0.85	-3/8	0	0	

所以，生产 A_1 产品 36 单位，可使工厂获利最大为： $3 \times 36 = 108$ （千元）。

- (2) 若为了增加产量，可借用别的工厂的设备甲，每月可借用 60 台时，租金 1.8 万元。问是否合算？

由上表可知，设备甲的影子价格为 $3/8$ 千元/台时，则租 60 台时设备价不应高于 $3/8 \times 60$ 千元，即 2.25 万元。而 1.8 万元的租金小于 2.25 万元，所以合算。

- (3) 设新产品 A_4 、 A_5 的产量分别为 x_7 、 x_8 ；单位利润为 2.1、1.87；

取新产品的加工实践作为列向量：

$$P_7 = (12, 5, 10)^T$$

计算检验数

$$\sigma_7 = c_7 - y^T P_7 = 2.1 - (3/8, 0, 0) \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = 2.1 - 4.5 = -2.4 < 0$$

所以不影响原最优解，故不宜生产 A_4 产品。

对于 A_5 ：

$$P_8 = (4, 4, 12)^T$$

$$\sigma_8 = c_8 - y^T P_8 = 1.87 - (3/8, 0, 0) \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} = 1.87 - 1.5 = 0.37 > 0$$

故应该生产产品 A_5 。

- (4) 增加乙设备的台时，不会使企业的总利润进一步增加，因为其影子价格为 0。

10. (1) b_1 由 20 变为 45，求新的最优解

$$x_B \rightarrow \bar{x}_B = x_B + B^{-1} \begin{pmatrix} \Delta b_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 \\ -100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ -90 \end{pmatrix}$$

将此结果代入最优单纯形表中：

C_B	x_B	b'	-5	5	13	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
5	x_2	45	-1	1	3	1	0
0	x_5	-90	16	0	[-2]	-4	1
			0	0	-2	-5	0

5	x_2	-90	23	1	0	[-5]	3/2
13	x_3	45	-8	0	1	2	-1/2
			-16	0	0	-1	-1
0	x_4	18	-23/5	-1/5	0	1	-3/10
13	x_3	9	6/5	2/5	1	0	1/10
			-103/5	-1/5	0	0	-13/10

所以最优解为 $x^*=(0, 0, 9, 18, 0)^T$, 最优值 $z^*=117$ 。

(2) b_2 由 90 变为 95, 求新的最优解

$$x_B \rightarrow \bar{x}_B = x_B + B \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \end{pmatrix}$$

所以最优基保持不变, 最优解为 $x^*=(0, 20, 0, 0, 15)^T$, 最优值不变 $z^*=100$ 。

(3) c_3 由 13 变为 8, 是否影响最优解? 若影响, 将新的最优解求出。

因为 c_3 为非基变量 x_3 对应的目标函数的系数, 所以 $\sigma'_3 = \sigma_3 - 5 = -2 - 5 = -7 < 0$, 故不影响最优解。

(4) c_2 由 5 变为 6, 因为 c_2 为基变量 x_2 对应的目标函数的系数, 所以对非基变量的检验数会产生影响。

对 σ_1 的影响:

$$\sigma'_1 = c_1 - c_B^T B^{-1} P_1 = \sigma_1 - \Delta c_2 a_{21} = -1 - 1 \times (-1) = 0$$

对 σ_3 的影响:

$$\sigma'_3 = \sigma_3 - \Delta c_2 a_{23} = -2 - 1 \times 3 = -5$$

对 σ_4 的影响:

$$\sigma'_4 = \sigma_4 - \Delta c_2 a_{24} = -5 - 1 \times 1 = -6$$

因为 $\sigma'_1 > 0$, 所以对最优解产生影响。

C_B	x_B	b'	-5	6	13	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
6	x_2	20	-1	1	3	1	0
0	x_5	10	[16]	0	-2	-4	1
			1	0	-5	-6	0
6	x_2	165/8	0	1	23/8	3/4	1/16
-5	x_1	5/8	1	0	-1/8	-1/4	1/16
			0	0	-39/8	-23/4	-1/16

所以最优解变为 $x^*=(5/8, 165/8, 0, 0, 0)^T$ 。

(5) 增加变量 x_6 , $c_6=10, a_{16}=3, a_{26}=5$, 对最优解是否有影响?

$$P_6 = (3, 5)^T$$

$$\sigma_6 = c_6 - c_B^T B^{-1} P_6 = c_6 - y^T P_6 = 10 - (5) \times \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = -15 < 0, \text{ 所以对最优解没有影响。}$$

(6) 增加一个约束条件 $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 50$ ，求新的最优解。

C_B	x_B	b'	-5	5	13	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
5	x_2	20	-1	1	3	1	0	0
0	x_5	10	16	0	-2	-4	1	0
0	x_6	50	2	3	5	0	0	1
5	x_2	20	-1	1	3	1	0	0
0	x_5	10	16	0	-2	-4	1	0
0	x_6	-10	5	0	[-4]	-3	0	1
			0	0	-2	-5	0	0
5	x_2	12.5	11/4	1	0	-5/4	0	3/4
0	x_5	15	27/2	0	0	-5/2	1	-1/2
13	x_3	2.5	-5/2	0	1	3/4	0	-1/4
			-5/2	0	0	-7/2	0	-1/2

所以最优解变为 $x^* = (0, 12.5, 2.5, 0, 15, 0)^T$ ，最优值为 $z^* = 95$ 。

第四章 运输问题

1. (1) 分别用西北角法和最小元素法求初始基本可行解。

1) 用西北角法

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量/t
A_1	5 350	11 400	8	6	750
A_2	10	19 20	7 190	10	210
A_3	9	14	13 340	15 260	600
销量/t	350	420	530	260	1560

注：左上角为运费，右下角为从 A_i 运往 B_j 的数量 ($i=1, 2, 3$; $j=1, 2, 3, 4$)。以后的运输表格中的数据，如不作特殊说明，所表示的意思与上表相同。

2) 用最小元素法

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量/t
A_1	5 350	11 2	8 140	6 260	750
A_2	10 6	19 11	7 210	10 5	210
A_3	9 -1	14 420	13 180	15 4	600
销量/t	350	420	530	260	1560

注：左下角为非基变量的检验数。以后如不作特殊说明，运输表格中左下角都表示非基变量的检验数。

(2) 在上面最小元素法求得的初始基本可行解基础上, 用两种方法求各非基变量的检验数。

a) 闭回路法:

$$\sigma_{12} = c_{12} - c_{13} + c_{33} - c_{32} = 11 - 8 + 13 - 14 = 2$$

$$\sigma_{21} = c_{21} - c_{11} + c_{13} - c_{23} = 10 - 5 + 8 - 7 = 6$$

$$\sigma_{22} = c_{22} - c_{32} + c_{33} - c_{23} = 19 - 14 + 13 - 7 = 11$$

$$\sigma_{24} = c_{24} - c_{23} + c_{13} - c_{14} = 10 - 7 + 8 - 6 = 5$$

$$\sigma_{31} = c_{31} - c_{11} + c_{13} - c_{33} = 9 - 5 + 8 - 13 = -1$$

$$\sigma_{34} = c_{34} - c_{33} + c_{13} - c_{14} = 15 - 13 + 8 - 6 = 4$$

b) 位势法:

$$\begin{array}{llll} u_1 + v_1 = 5 & u_2 + v_3 = 7 & \xrightarrow{\text{令 } u_1=0} & u_1 = 0 \quad v_1 = 5 \\ u_3 + v_2 = 14 & u_3 + v_3 = 13 & & u_2 = -1 \quad v_2 = 9 \\ u_1 + v_3 = 8 & u_1 + v_4 = 6 & & u_3 = 5 \quad v_3 = 8 \\ & & & v_4 = 6 \end{array}$$

$$\sigma_{12} = c_{12} - (u_1 + v_2) = 11 - (0 + 9) = 2$$

$$\sigma_{21} = c_{21} - (u_2 + v_1) = 10 - (-1 + 5) = 6$$

$$\sigma_{22} = c_{22} - (u_2 + v_2) = 19 - (-1 + 9) = 11$$

$$\sigma_{24} = c_{24} - (u_2 + v_4) = 10 - (-1 + 6) = 5$$

$$\sigma_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = 9 - (5 + 5) = -1$$

$$\sigma_{34} = c_{34} - (u_3 + v_4) = 15 - (5 + 6) = 4$$

(3) 进一步求解这个问题

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量/t
A_1	5 170	11 6	8 320	6 260	750
A_2	10 1	19 10	7 210	10 5	210
A_3	9 180	14 420	13 1	15 5	600
销量/t	350	420	530	260	1560

求检验数:

$$\begin{array}{lcl}
 u_1 + v_1 = 5 & u_2 + v_3 = 7 & \\
 u_3 + v_2 = 14 & u_3 + v_1 = 9 & \xrightarrow{\text{令 } u_1=0} \\
 u_1 + v_3 = 8 & u_1 + v_4 = 6 &
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 u_1 = 0 \\
 u_2 = -1 \\
 u_3 = 4
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 v_1 = 5 \\
 v_2 = 10 \\
 v_3 = 8 \\
 v_4 = 6
 \end{array}$$

$$\sigma_{12} = c_{12} - (u_1 + v_2) = 11 - (0 + 10) = 1$$

$$\sigma_{21} = c_{21} - (u_2 + v_1) = 10 - (-1 + 5) = 6$$

$$\sigma_{22} = c_{22} - (u_2 + v_2) = 19 - (-1 + 10) = 10$$

$$\sigma_{24} = c_{24} - (u_2 + v_4) = 10 - (-1 + 6) = 5$$

$$\sigma_{33} = c_{33} - (u_3 + v_3) = 13 - (4 + 8) = 1$$

$$\sigma_{34} = c_{34} - (u_3 + v_4) = 15 - (4 + 6) = 5$$

因为检验数均大于 0，所以得到最优解如上表所示，最优值为：13940(百元)。

2. 用表上作业法求解下列运输问题

(1)

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量/t
A_1	8	4	7	2	90
A_2	5	8	3	5	100
A_3	7	7	2	9	120
销量/t	70	50	110	80	310

$$\begin{array}{lcl}
 u_1 + v_1 = 4 & u_2 + v_2 = 8 & \\
 u_1 + v_4 = 2 & u_3 + v_2 = 7 & \xrightarrow{\text{令 } u_1=0} \\
 u_2 + v_1 = 5 & u_3 + v_3 = 2 &
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 u_1 = 0 \\
 u_2 = 4 \\
 u_3 = 3
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 v_1 = 1 \\
 v_2 = 4 \\
 v_3 = -1 \\
 v_4 = 2
 \end{array}$$

计算检验数：

$$\sigma_{11} = c_{11} - (u_1 + v_1) = 8 - (0 + 1) = 7$$

$$\sigma_{23} = c_{23} - (u_2 + v_3) = 3 - (4 - 1) = 0$$

$$\sigma_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = 7 - (3 + 1) = 3$$

$$\sigma_{24} = c_{24} - (u_2 + v_4) = 5 - (4 + 2) = -1$$

$$\sigma_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = 7 - (0 - 1) = 8$$

$$\sigma_{34} = c_{34} - (u_3 + v_4) = 9 - (3 + 2) = 4$$

因为 $\sigma_{24} = -1 < 0$ ，所以令 x_{24} 为进基变量，具体做法见上表。得到的新的运输表格见下页。

用位势法计算新的检验数：

$$\begin{array}{lcl} u_1 + v_2 = 4 & u_2 + v_4 = 5 & \\ u_2 + v_1 = 5 & u_3 + v_2 = 7 & \xrightarrow{\text{令 } u_1 = 0} \\ u_1 + v_4 = 2 & u_3 + v_3 = 2 & \end{array} \quad \begin{array}{l} u_1 = 0 \\ u_2 = 3 \\ u_3 = 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} v_1 = 2 \\ v_2 = 4 \\ v_3 = -1 \\ v_4 = 2 \end{array}$$

$$\sigma_{11} = c_{11} - (u_1 + v_1) = 8 - (0 + 2) = 6$$

$$\sigma_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = 7 - (3 + 2) = 2$$

$$\sigma_{22} = c_{22} - (u_2 + v_2) = 8 - (3 + 4) = 1$$

$$\sigma_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = 7 - (0 - 1) = 8$$

$$\sigma_{23} = c_{23} - (u_2 + v_3) = 3 - (3 - 1) = 1$$

$$\sigma_{34} = c_{34} - (u_3 + v_4) = 9 - (3 + 2) = 4$$

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量/t
A_1	8	4 40	7	2 50	90
A_2	5 70	8	3	5 30	100
A_3	7	7 10	2 110	9	120
销量/t	70	50	110	80	310

因为检验数均大于等于 0，所以上表为最优解，最优值为：1050。

(2) 增加一个虚拟销地 B_5

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	产量
A_1	18 9	14 4	17 10	12 0	0 90	100
A_2	5 50	8 2	13 50	15 7	0 4	100
A_3	17	7	12	9	0	150

	11	70	-2	80	3	
销量	50	70	60	80	90	350

$$\begin{array}{lcl}
 u_1 + v_4 = 12 & u_2 + v_1 = 5 & v_1 = 9 \\
 u_2 + v_3 = 17 & u_2 + v_3 = 13 & u_1 = 0 \quad v_2 = 10 \\
 u_1 + v_5 = 0 & u_3 + v_2 = 7 & u_2 = -4 \quad v_3 = 17 \\
 & u_3 + v_4 = 9 & u_3 = -3 \quad v_4 = 12 \\
 & & v_5 = 0
 \end{array}
 \xrightarrow{\text{令 } u_1=0}$$

$$\sigma_{11} = c_{11} - (u_1 + v_1) = 18 - (0 + 9) = 9$$

$$\sigma_{12} = c_{12} - (u_1 + v_2) = 14 - (0 + 10) = 4$$

$$\sigma_{22} = c_{22} - (u_2 + v_2) = 8 - (-4 + 10) = 2$$

$$\sigma_{24} = c_{24} - (u_2 + v_4) = 15 - (-4 + 12) = 7$$

$$\sigma_{25} = c_{25} - (u_2 + v_5) = 0 - (-4 + 0) = 4$$

$$\sigma_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = 17 - (-3 + 9) = 11$$

$$\sigma_{35} = c_{35} - (u_3 + v_5) = 0 - (-3 + 0) = 3$$

$$\sigma_{33} = c_{33} - (u_3 + v_3) = 12 - (-3 + 17) = -2$$

销地 \ 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	产量
A_1	18 11	14 4	17 2	12 10	0 90	100
A_2	5 50	8 0	13 50	15 5	0 2	100
A_3	17 13	7 70	12 10	9 70	0 3	150
销量	50	70	60	80	90	350

计算新的检验数：

$$\begin{array}{lcl}
 u_1 + v_4 = 12 & u_3 + v_3 = 12 & v_1 = 7 \\
 u_2 + v_5 = 0 & u_2 + v_3 = 13 & u_1 = 0 \quad v_2 = 10 \\
 u_2 + v_1 = 5 & u_3 + v_2 = 7 & u_2 = -2 \quad v_3 = 15 \\
 & u_3 + v_4 = 9 & u_3 = -3 \quad v_4 = 12 \\
 & & v_5 = 0
 \end{array}
 \xrightarrow{\text{令 } u_1=0}$$

$$\sigma_{11} = c_{11} - (u_1 + v_1) = 18 - (0 + 7) = 11$$

$$\sigma_{12} = c_{12} - (u_1 + v_2) = 14 - (0 + 10) = 4$$

$$\sigma_{22} = c_{22} - (u_2 + v_2) = 8 - (-2 + 10) = 0$$

$$\sigma_{24} = c_{24} - (u_2 + v_4) = 15 - (-2 + 12) = 5$$

$$\sigma_{25} = c_{25} - (u_2 + v_5) = 0 - (-2 + 0) = 2$$

$$\sigma_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = 17 - (-3 + 7) = 13$$

$$\sigma_{35} = c_{35} - (u_3 + v_5) = 0 - (-3 + 0) = 3$$

$$\sigma_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = 17 - (0 + 15) = 2$$

因为 $\sigma_{22} = 0$ ，所以，此题有无穷多解。把 x_{22} 作为主元，再进行换基运算，可得另一最优解。

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	产量
A_1	18	14	17	12	0	100
A_2	5	8	13	15	0	100
A_3	17	7	12	9	0	150
销量	50	70	60	80	90	350

(3) 增加一个虚拟产地 A_4 ：

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	产量
A_1	8	6	3	7	5	20
A_2	5	M	8	4	7	30
A_3	6	3	9	6	8	30
A_4	0	0	0	0	0	20
销量	25	25	20	10	20	100

$$\begin{array}{ll}
 u_1 + v_3 = 3 & u_2 + v_4 = 4 \\
 u_1 + v_5 = 5 & u_3 + v_1 = 6 \\
 u_2 + v_1 = 5 & u_3 + v_2 = 3 \\
 u_2 + v_3 = 8 & u_4 + v_5 = 0
 \end{array}
 \xrightarrow{\text{令 } u_1=0}
 \begin{array}{l}
 u_1 = 0 \\
 u_2 = 5 \\
 u_3 = 6 \\
 u_4 = -5
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 v_1 = 0 \\
 v_2 = -3 \\
 v_3 = 3 \\
 v_4 = -1 \\
 v_5 = 5
 \end{array}$$

$$\sigma_{11} = 8 - (0 + 0) = 8$$

$$\sigma_{12} = 6 - (0 - 3) = 9$$

$$\sigma_{25} = 7 - (5 + 5) = -3$$

$$\sigma_{33} = 9 - (6 + 3) = 0$$

$$\sigma_{41} = 0 - (-5 + 0) = 5$$

$$\sigma_{42} = 0 - (-5 - 3) = 8$$

$$\sigma_{14} = 7 - (0 - 1) = 8$$

$$\sigma_{22} = M - (5 - 3) = M - 2$$

$$\sigma_{34} = 6 - (6 - 1) = 1$$

$$\sigma_{35} = 8 - (6 + 5) = -3$$

$$\sigma_{43} = 0 - (-5 + 3) = 2$$

$$\sigma_{44} = 0 - (-5 - 1) = 6$$

以 x_{25} 为主元，所得新的运输问题表格见下页。

求新的运输表格的检验数：

$$\begin{array}{l} u_1 + v_3 = 3 \quad u_2 + v_5 = 7 \\ u_1 + v_5 = 5 \quad u_3 + v_1 = 6 \\ u_2 + v_1 = 5 \quad u_3 + v_2 = 3 \\ u_2 + v_4 = 4 \quad u_4 + v_5 = 0 \end{array} \xrightarrow{\text{令 } u_1=0} \begin{array}{l} u_1 = 0 \\ u_2 = 2 \\ u_3 = 3 \\ u_4 = -5 \end{array} \quad \begin{array}{l} v_1 = 3 \\ v_2 = 0 \\ v_3 = 3 \\ v_4 = 2 \\ v_5 = 5 \end{array}$$

$$\sigma_{11} = 5 \quad \sigma_{12} = 6 \quad \sigma_{13} = 4 \quad \sigma_{22} = M - 2 \quad \sigma_{23} = 3 \quad \sigma_{33} = 3$$

$$\sigma_{34} = 1 \quad \sigma_{35} = 0 \quad \sigma_{41} = 2 \quad \sigma_{42} = 5 \quad \sigma_{43} = 2 \quad \sigma_{44} = 3$$

因为检验数均大于等于 0，所以得最优解。

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	产量
A_1	8 5	6 9	3 20	7 4	5 0	20
A_2	5 20	M M-2	8 3	4 10	7 0	30
A_3	6 5	3 25	9 3	6 1	8 0	30
A_4	0 2	0 5	0 2	0 3	0 20	20
销量	25	25	20	10	20	100

因为 x_{35} 的检验数为 0，所以有无穷多最优解。故以 x_{35} 为主元，进行换基运算，可得另一最优解，最优值为 305。

3.

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量/t
A_1	21 9	17 250	23 0	25 50	300
A_2	10 400	15 0	30 9	19 -4	400

A_3	23 14	21 6	20 350	22 150	500
销量/t	400	250	350	200	1200

$$\begin{array}{lcl}
 u_1 + v_2 = 17 & u_2 + v_2 = 15 & \\
 u_1 + v_4 = 25 & u_3 + v_3 = 20 & \xrightarrow{\text{令 } u_1=0} \\
 u_2 + v_1 = 10 & u_3 + v_4 = 22 &
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 u_1 = 0 \\
 u_2 = -2 \\
 u_3 = -3
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 v_1 = 12 \\
 v_2 = 17 \\
 v_3 = 23 \\
 v_4 = 25
 \end{array}$$

$$\sigma_{11} = 9 \quad \sigma_{13} = 0 \quad \sigma_{23} = 9 \quad \sigma_{24} = -4 \quad \sigma_{31} = 14 \quad \sigma_{32} = 6$$

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量/t
A_1	21	17 250	23	25 50	300
A_2	10 400	15	30	19 0	400
A_3	23	21	20 350	22 150	500
销量/t	400	250	350	200	1200

$$\begin{array}{lcl}
 u_1 + v_2 = 17 & u_2 + v_2 = 19 & \\
 u_1 + v_4 = 25 & u_3 + v_3 = 20 & \xrightarrow{\text{令 } u_1=0} \\
 u_2 + v_1 = 10 & u_3 + v_4 = 22 &
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 u_1 = 0 \\
 u_2 = -6 \\
 u_3 = -3
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 v_1 = 16 \\
 v_2 = 17 \\
 v_3 = 23 \\
 v_4 = 25
 \end{array}$$

$$\sigma_{11} = 5 \quad \sigma_{13} = 0 \quad \sigma_{22} = 4 \quad \sigma_{23} = 13 \quad \sigma_{31} = 10 \quad \sigma_{32} = 7$$

因为 $\sigma_{13} = 0$ ，所以有无穷多最优解。

以 x_{13} 为主元进行换基运算，可得另一最优解，见下表。

销地 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量/t
A_1		250	50		300
A_2	400				400
A_3			300	200	500
销量/t	400	250	350	200	1200

注：表中数据表示从 A_i 运往 B_j 的数量。最优值（最小运费）：19800(百元)。

4. 解：设 x_{ij} 为第 i 月生产第 j 月交货的数量 ($i, j = 1, 2, 3, 4$)；

x'_{ij} 为第 i 月加班生产，第 j 月交货的数量 ($i, j = 1, 2, 3, 4$)。

则应满足下列约束条件：

$$\text{交货： } x_{11} = 400$$

$$x_{12} + x_{22} + x'_{22} = 800$$

$$x_{13} + x_{23} + x'_{23} + x_{33} + x'_{33} = 900$$

$$x_{14} + x_{24} + x'_{24} + x_{34} + x'_{34} + x_{44} = 600$$

$$\text{生产： } x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 700$$

$$x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 700$$

$$x'_{22} + x'_{23} + x'_{24} \leq 200$$

$$x_{33} + x_{34} \leq 700$$

$$x'_{33} + x'_{34} \leq 200$$

$$x_{44} \leq 700$$

目标函数的系数：

$$c_{11} = 10$$

$$c_{12} = 13 \quad c_{22} = 12 \quad c'_{22} = 17$$

$$c_{13} = 16 \quad c_{23} = 15 \quad c'_{23} = 20 \quad c_{33} = 14 \quad c'_{33} = 19$$

$$c_{14} = 19 \quad c_{24} = 18 \quad c'_{24} = 23 \quad c_{34} = 17 \quad c'_{34} = 22 \quad c_{44} = 16$$

构造运输表：

生产 \ 销售	一月 正常生产	二月 正常生产	二月 加班生产	三月 正常生产	三月 加班生产	四月 正常生产	销量
一月	10	M	M	M	M	M	400
二月	13	12	17	M	M	M	800
三月	16	15	20	14	19	M	900
四月	19	18	23	17	22	16	600
虚拟交货	0	0	0	0	0	0	500
产量	700	700	200	700	200	700	3200

解得最优解如下表：

生产 \ 销售	一月 正常生产	二月 正常生产	二月 加班生产	三月 正常生产	三月 加班生产	四月 正常生产	销量
一月							
二月							
三月							
四月							
虚拟交货							
产量							

一月	400						400
二月	100	700					800
三月	200			700			900
四月						600	600
虚拟交货			200		200	100	500
产量	700	700	200	700	200	700	3200

最优值（最小成本）：36300。

5. 构建运输表格：

生产 销售	年初 库存	一月 正常	一月 加班	二月 正常	二月 加班	三月 正常	三月 加班	四月 正常	四月 加班	五月 正常	五月 加班	六月 正常	六月 加班	销量
一月	0.2	15	16	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	104
二月	0.4	15.3	16.3	14	15	M	M	M	M	M	M	M	M	75
三月	0.6	15.6	16.6	14.3	15.3	13.5	14.5	M	M	M	M	M	M	115
四月	0.8	15.9	16.9	14.6	15.6	13.8	14.8	13	14	M	M	M	M	160
五月	1.0	16.2	17.2	14.9	15.9	14.1	15.1	13.3	14.3	13	14	M	M	103
六月	1.2	16.5	17.5	15.2	16.2	14.4	15.4	13.6	14.6	13.3	14.3	13.5	14.5	150
虚交	M	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	36
产量	103	60	10	50	10	90	20	100	40	100	40	80	40	743

解得最优解为：

生产 销售	年初 库存	一月 正常	一月 加班	二月 正常	二月 加班	三月 正常	三月 加班	四月 正常	四月 加班	五月 正常	五月 加班	六月 正常	六月 加班	销量
一月	63	41												104
二月	15			50	10									75
三月	5					90	20							115
四月	20							100	40					160
五月										100	3			103
六月											37	80	33	150
虚交		19	10										7	36
产量	103	60	10	50	10	90	20	100	40	100	40	80	40	743

第五章 动态规划

1. 第一阶段 $k = 4$,

状态 D_1 , D_2 ,

设 $f_4(D_1)$ 和 $f_4(D_2)$ 分别表示 D_1 , D_2 到 E 的最短距离,

显然有 $f_4(D_1) = 27$, $f_4(D_2) = 31$ 。

第二阶段 $k = 3$

状态 C_1, C_2, C_3 ,

$$f_3(C_1) = \min\{d_3(C_1, D_1) + f_4(D_1), d_3(C_1, D_2) + f_4(D_2)\} = 39(C_1 \rightarrow D_1 \rightarrow E)$$

$$f_3(C_2) = \min\{d_3(C_2, D_1) + f_4(D_1), d_3(C_2, D_2) + f_4(D_2)\} = 63(C_2 \rightarrow D_2 \rightarrow E)$$

$$f_3(C_3) = \min\{d_3(C_3, D_1) + f_4(D_1), d_3(C_3, D_2) + f_4(D_2)\} = 61(C_3 \rightarrow D_2 \rightarrow E)$$

第三阶段 $k = 2$

$$\begin{aligned} f_2(B_1) &= \min\{d_2(B_1, C_1) + f_3(C_1), d_2(B_1, C_2) + f_3(C_2), d_2(B_1, C_3) + f_3(C_3)\} \\ &= 106(B_1 \rightarrow C_2 \rightarrow D_2 \rightarrow E) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(B_2) &= \min\{d_2(B_2, C_1) + f_3(C_1), d_2(B_2, C_2) + f_3(C_2), d_2(B_2, C_3) + f_3(C_3)\} \\ &= 69(B_2 \rightarrow C_1 \rightarrow D_1 \rightarrow E) \end{aligned}$$

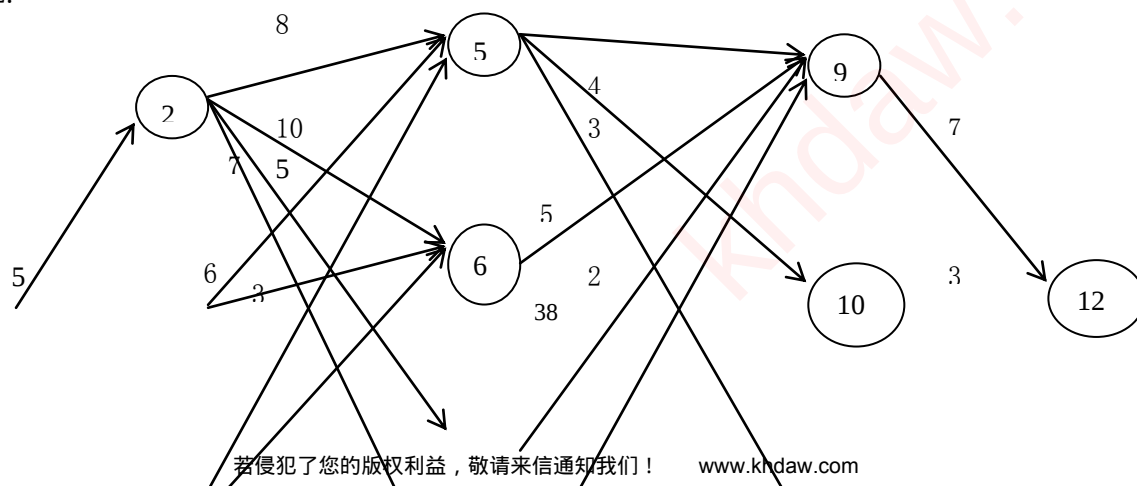
$$\begin{aligned} f_2(B_3) &= \min\{d_2(B_3, C_1) + f_3(C_1), d_2(B_3, C_2) + f_3(C_2), d_2(B_3, C_3) + f_3(C_3)\} \\ &= 78(B_3 \rightarrow C_2 \rightarrow D_2 \rightarrow E) \end{aligned}$$

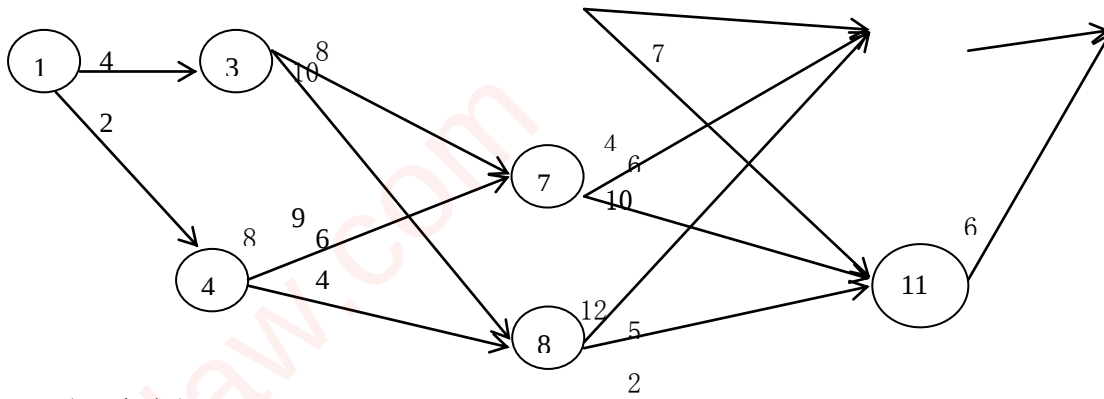
第四阶段 $k = 1$

$$\begin{aligned} f_1(A) &= \min\{d_1(A, B_1) + f_2(B_1), d_1(A, B_2) + f_2(B_2), d_1(A, B_3) + f_2(B_3)\} \\ &= 111(A \rightarrow B_2 \rightarrow C_1 \rightarrow D_1 \rightarrow E) \end{aligned}$$

所以使运费最低的路线为: $A \rightarrow B_2 \rightarrow C_1 \rightarrow D_1 \rightarrow E$, 最低运费为 111。

2.





分四个阶段

(1) $k = 4$

$$f_4(9) = 7 \quad f_4(10) = 3 \quad f_4(11) = 6$$

(2) $k = 3$

$$f_3(5) = \max\{P_3(5,9) + f_4(9), P_3(5,10) + f_4(10), P_3(5,11) + f_4(11)\}$$

$$= 15(5 \rightarrow 9 \rightarrow 12)$$

$$f_3(6) = \max\{P_3(6,9) + f_4(9), P_3(6,10) + f_4(10), P_3(6,11) + f_4(11)\}$$

$$= 13(6 \rightarrow 11 \rightarrow 12)$$

$$f_3(7) = \max\{P_3(7,9) + f_4(9), P_3(7,10) + f_4(10), P_3(7,11) + f_4(11)\}$$

$$f_3(8) = \max\{P_3(8,9) + f_4(9), P_3(8,10) + f_4(10), P_3(8,11) + f_4(11)\}$$

$$= 19(8 \rightarrow 9 \rightarrow 12)$$

(3) $k = 2$

$$f_2(2) = \max\{P_2(2,5) + f_3(5), P_2(2,6) + f_3(6), P_2(2,7) + f_3(7), P_2(2,8) + f_3(8)\}$$

$$= 26(2 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 12)$$

$$f_2(3) = \max\{P_2(3,5) + f_3(5), P_2(3,6) + f_3(6), P_2(3,7) + f_3(7), P_2(3,8) + f_3(8)\}$$

$$= 29(3 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 12)$$

$$f_2(4) = \max\{P_2(4,5) + f_3(5), P_2(4,6) + f_3(6), P_2(4,7) + f_3(7), P_2(4,8) + f_3(8)\}$$

$$= 23 \begin{pmatrix} 4 \rightarrow 5 \rightarrow 9 \rightarrow 12 \\ 4 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 12 \end{pmatrix}$$

(4) $k = 1$

$$f_1(1) = \max\{P_1(1,2) + f_2(2), P_1(1,3) + f_2(3), P_1(1,4) + f_2(3), P_1(1,4) + f_2(4)\}$$

$$= 33(1 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 12)$$

所以, 从城市 1 → 城市 3 → 城市 8 → 城市 9 → 城市 12, 可使利润最大为 33。

3. (1) 阶段: $k = 4$, 表示四个月。

(2) 状态变量: s_k 表示第 k 月开始时有 s_k 台机床可供使用。

(3) 决策变量: u_k 表示第 k 月分配给第一种零件的机床数。

(4) 状态转移方程: $s_{k+1} = \frac{2}{3}u_k + \frac{9}{10}(s_k - u_k)$

(5) 指标函数: $g_k(s_k, u_k) = \frac{10}{100}u_k + \frac{7}{100}(s_k - u_k)$

(6) 最优指标函数:
$$\left\{ \begin{array}{l} f_k(s_k) = \max_{0 \leq u_k \leq s_k} \{g_k(s_k, u_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\} \\ f_5(s_5) = 0 \end{array} \right\}$$

$k = 4$

$$f_4(s_4) = \max_{0 \leq u_4 \leq s_4} \left\{ \frac{10}{100}u_4 + \frac{7}{100}(s_4 - u_4) + f_5(s_5) \right\}$$

$$= \max_{0 \leq u_4 \leq s_4} \left\{ \frac{10}{100}u_4 + \frac{7}{100}(s_4 - u_4) \right\}$$

$$= \max_{0 \leq u_4 \leq s_4} \left\{ \frac{3}{100}u_4 + \frac{7}{100}s_4 \right\}$$

$$= \frac{1}{10}s_4(u_4^* = s_4)$$

$k = 3$

$$s_4 = \frac{2}{3}u_3 + \frac{9}{10}(s_3 - u_3)$$

$$f_3(s_3) = \max_{0 \leq u_3 \leq s_3} \left\{ \frac{10}{100}u_3 + \frac{7}{100}(s_3 - u_3) + f_4(s_4) \right\}$$

$$= \max_{0 \leq u_3 \leq s_3} \left\{ \frac{10}{100}u_3 + \frac{7}{100}(s_3 - u_3) + \frac{1}{10} \left(\frac{2}{3}u_3 + \frac{9}{10}(s_3 - u_3) \right) \right\}$$

$$= \max_{0 \leq u_3 \leq s_3} \left\{ \frac{1}{150}u_3 + \frac{4}{25}s_3 \right\}$$

$$= \frac{1}{6}s_3(u_3^* = s_3)$$

$k = 2$

$$s_3 = \frac{2}{3}u_2 + \frac{9}{10}(s_2 - u_2)$$

$$\begin{aligned}
 f_2(s_2) &= \max_{0 \leq u_2 \leq s_2} \left\{ \frac{10}{100} u_2 + \frac{7}{100} (s_2 - u_2) + f_3(s_3) \right\} \\
 &= \max_{0 \leq u_2 \leq s_2} \left\{ \frac{10}{100} u_2 + \frac{7}{100} (s_2 - u_2) + \frac{1}{6} \left(\frac{2}{3} u_2 + \frac{9}{10} (s_2 - u_2) \right) \right\} \\
 &= \max_{0 \leq u_2 \leq s_2} \left\{ \frac{11}{50} s_2 - \frac{4}{450} u_2 \right\} \\
 &= \frac{11}{50} s_2 (u_2^* = 0)
 \end{aligned}$$

$k=1$

$$s_2 = \frac{2}{3} u_1 + \frac{9}{10} (s_1 - u_1)$$

$$\begin{aligned}
 f_1(s_1) &= \max_{0 \leq u_1 \leq s_1} \left\{ \frac{10}{100} u_1 + \frac{7}{100} (s_1 - u_1) + f_2(s_2) \right\} \\
 &= \max_{0 \leq u_1 \leq s_1} \left\{ \frac{10}{100} u_1 + \frac{7}{100} (s_1 - u_1) + \frac{11}{50} \left(\frac{2}{3} u_1 + \frac{9}{10} (s_1 - u_1) \right) \right\} \\
 &= \max_{0 \leq u_1 \leq s_1} \left\{ \frac{67}{250} s_1 - \frac{8}{375} u_1 \right\} \\
 &= \frac{67}{250} s_1 (u_1^* = 0)
 \end{aligned}$$

所以，最大收益为： $f_1(s_1) = \frac{67}{250} s_1 = \frac{67}{250} \times 100 = 26.8$ （万美元）。

此时， $u_1^* = 0, u_2^* = 0, u_3^* = 81, u_4^* = 54$ 。

4. (1) 阶段： $k=3$ 表示 3 个销售点

(2) 状态变量： s_k 表示在第 k 阶段开始分配的营业员数

(3) 决策变量： u_k 表示第 k 阶段分配的营业员数

(4) 状态转移方程： $s_{k+1} = s_k - u_k$

(5) 指标函数 $g_k(s_k, u_k)$ ：表示第 k 个销售点分配 u_k 个营业员所获得的利润

(6) 最优指标函数

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max_{0 \leq u_k \leq s_k} \{ g_k(s_k, u_k) + f_{k+1}(s_{k+1}) \} \\ f_4(s_4) = 0 (\text{边界条件}) \end{cases}$$

$k=3$

s_3	0	1	2	3	4
$f_3(s_3)$	0	10	14	16	17
u_3^*	0	1	2	3	4

$K=3$

s_2	0	1	2	3	4
u_2	0	0 1	0 1 2	0 1 2 3	0 1 2 3 4
$g_2(s_2, u_2) + f_3(s_3)$	0	10 12	14 22 17	16 26 27 21	17 28 31 31 22
$f_2(s_2)$	0	12	22	27	31
u_2^*	0	1	1	2	2 3

$k=1$

s_1	4
u_1	0 1 2 3 4
$g_1(s_1, u_1) + f_2(s_2)$	31 43 47 42 32
$f_1(s_1)$	47
u_1^*	2

$\therefore$ 最优解 $u_1^* = 2, u_2^* = 1, u_3^* = 1$, 最优利润 47 元。

5. (1) 阶段 $k=3$, 表示甲、乙、丙三个工厂

(2) 状态变量 s_k 表示第 k 个阶段开始时可分配的材料

(3) 决策变量 u_k 表示分配给第 k 个阶段的材料

(4) 状态转移方程: $s_{k+1} = s_k - u_k$

(5) 指标函数: $g_k(s_k, u_k)$ 表示第 k 阶段分配 u_k 材料所创外汇

(6) 最优指标函数:

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max_{0 \leq u_k \leq s_k} \{g_k(s_k, u_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\} \\ f_4(s_4) = 0 (\text{边界条件}) \end{cases}$$

k=3 (丙工厂)

s_3	0	1	2	3	4
$f_3(s_3)$	0	4	6	11	14
u_3^*	0	1	2	3	4

k=2 (乙工厂)

s_2	0	1	2	3	4
u_2	0	0 1	0 1 2	0 1 2 3	0 1 2 3 4
$g_2(s_2, u_2) + f_3(s_3)$	0	4 5	6 9 9	11 11 13 11	14 16 15 15 13
$f_2(s_2)$	0	5	9	13	16
u_2^*	0	1	1 2	2	1

k=1 (甲工厂)

s_1	4
u_1	0 1 2 3 4
$g_1(s_1, u_1) + f_2(s_2)$	16 17 16 15 13
$f_1(s_1)$	17
u_1^*	2

∴ 最优解 $u_1^* = 1, u_2^* = 2, u_3^* = 1$, 最优值 17 万美元。

此时, 甲工厂创外汇 4 万美元, 乙工厂创外汇 9 万美元, 丙工厂创外汇 4 万美元。

6. (1) 阶段: k=4 表示四种货物

(2) 状态变量: s_k 表示在第 k 阶段可分配的重量, 其中 $s_1 = 3.5$

(3) 决策变量: u_k 表示装 k 货物的数量

(4) 状态转移方程: $s_{k+1} = s_k - a_k u_k$ (a_k 为单位 k 的重量)

(5) 指标函数: $g_k(s_k, u_k)$ 表示第 k 种货物装件 u_k 的费用

(6) 最优指标函数:

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max_{0 \leq u_k \leq s_k} \{g_k(s_k, u_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\} \\ f_5(s_5) = 0(\text{边界条件}) \end{cases}$$

k=4 (D 货物)

s_4	0~0.5	0.6~1.1	1.2~1.7	1.8~2.3	2.4~2.9	3.0~3.5
$f_4(s_4)$	0	4	9	23	36	42
u_4^*	0	1	2	3	4	5

k=3 (C 货物)

s_3	u_3	$g_3(s_3, u_3) + f_4(s_4)$	$f_3(s_3)$	u_3^*
0~0.5	0	0	0	0
0.4	0 1	0 1	0	0
0.5	0 1	0 4	0	0
0.6	0 1	4 4	4	0 1
0.7	0 1	4 4	4	0 1
0.8	0 1 2	4 4 8	4	0 1
0.9	0 1 2	4 4 8	4	0 1
1.0	0 1 2	4 8 8	4	0
1.1	0 1 2	4 8 8	4	0
1.2	0 1 2 3	9 8 8 15	8	1 2
1.3	0 1 2 3	9 8 8 15	8	1 2
1.4	0	9	8	1

	1	8		
	2	12		
	3	15		
1.5	0	9	8	1
	1	8		
	2	12		
	3	15		
1.6	0	9	9	0
	1	13		
	2	12		
	3	15		
	4	24		
1.7	0	9	9	0
	1	13		
	2	12		
	3	15		
	4	24		
1.8	0	23	12	2
	1	13		
	2	12		
	3	19		
	4	24		
1.9	0	23	12	2
	1	13		
	2	12		
	3	19		
	4	24		
2.0	0	23	13	1
	1	13		
	2	17		
	3	19		
	4	24		
	5	30		
2.1	0	23	13	1
	1	13		
	2	17		
	3	19		
	4	24		
	5	30		
2.2	0	23	17	2
	1	27		
	2	17		
	3	19		
	4	28		

	5	30		
2.3	0 1 2 3 4 5	23 27 17 19 28 30	17	2
2.4	0 1 2 3 4 5	36 27 17 24 28 30	17	2
2.5	0 1 2 3 4 5	36 27 17 24 28 30	17	2
2.6	0 1 2 3 4 5	36 27 31 24 28 34	24	3
2.7	0 1 2 3 4 5	36 27 31 24 28 24	24	3
2.8	0 1 2 3 4 5	36 40 31 24 33 34	24	3
2.9	0 1 2 3 4 5	36 40 31 24 33 34	24	3
3.0	0	42	31	2

	1	40		
	2	31		
	3	38		
	4	33		
	5	34		
3.1	0	42	31	2
	1	40		
	2	31		
	3	38		
	4	33		
	5	34		
3.2	0	42	33	4
	1	40		
	2	44		
	3	38		
	4	33		
	5	39		
3.3	0	42	33	4
	1	40		
	2	44		
	3	38		
	4	33		
	5	39		
3.4	0	42	38	3
	1	46		
	2	44		
	3	38		
	4	47		
	5	39		
3.5	0	42	38	3
	1	46		
	2	44		
	3	38		
	4	47		
	5	39		

k=2

由于 k=1 阶段只需计算 $f_2(2,0)$, $f_2(2,3)$, $f_2(2,6)$, $f_2(2,9)$, $f_2(3,2)$, $f_2(3,5)$ 即可

s_2	2.0	2.3	2.6
u_2	0 1 2 3 4 5	0 1 2 3 4 5	0 1 2 3 4 5
$g_2(s_2, u_2) + f_3(s_3)$	13 13 11 12 15 16	17 14 14 13 15 20	24 18 19 17 19 21

$f_2(s_2)$	11	13	17			
u_2^*	2	3	3			
s_2	2.9	3.2	3.5			
u_2	0 1 2 3 4 5	0 1 2 3 4 5	0 1 2 3 4 5			
$g_2(s_2,u_2)+f_3(s_3)$	24 25 19 21 20 24	33 32 26 28 24 29	38 34 33 28 31 29			
$f_2(s_2)$	19	24	28			
u_2^*	2	4	3			
k=1						
s_1	3.5					
u_1	0	1	2	3	4	5
$g_1(s_1,u_1)+f_2(s_2)$	28	26	22	25	29	34
$f_1(s_1)$	22					
u_1^*	2					

$\therefore f_1(s_1) = 21$, 最优解为: $u_1^* = 2, u_2^* = 2, u_3^* = 2, u_4^* = 2$

7. (1) 阶段: $k=4$ 表示四台机床

(2) 状态变量: s_k 表示在第 k 阶段开始时可分配的空间

(3) 决策变量: u_k 表示分配给第 k 个机床得台数

(4) 状态转移方程: $s_{k+1} = s_k - a_k u_k$ (a_k 为单位 k 种机床所占的空间)

(5) 指标函数: $g_k(s_k, u_k)$ 表示 u_k 台第 k 种机床所产生的收益

(6) 最优指标函数

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max_{0 \leq u_k \leq s_k} \{g_k(s_k, u_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\} \\ f_5(s_5) = 0 (\text{边界条件}) \end{cases}$$

$k=4$

s_4	0 ~ 2	3 ~ 5	6 ~ 8	9 ~ 11	12 ~ 25
$f_4(s_4)$	0	8	14	18	20
u_4^*	0	1	2	3	4

k=3

s_3	0~2	3~5	6	7	8	9	10	11	12
u_3	0	0	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1	0 1 2
$g_3(s_3, u_3) + f_4(s_4)$	0	8	14 11	14 11	14 11	18 19	18 19	18 19	20 25 21
$f_3(s_3)$	0	8	14	14	14	19	19	19	25
u_3^*	0	0	0	0	0	1	1	1	1

s_3	13	14	15	16	17	18
u_3	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2	0 1 2 3
$g_3(s_3, u_3) + f_4(s_4)$	20 25 21	20 25 21	20 29 29	20 29 29	20 29 29	20 31 35 30
$f_3(s_3)$	25	25	29	29	29	35
u_3^*	1	1	1 2	1 2	1 2	2

s_3	19	20	21	22	23
u_3	0 1 2 3	0 1 2 3	0 1 2 3	0 1 2 3	0 1 2 3
$g_3(s_3, u_3) + f_4(s_4)$	20 31 35 30	20 31 35 30	20 31 39 38	20 31 39 38	20 31 35 30
$f_3(s_3)$	35	35	39	39	35
u_3^*	2	2	2	2	2

s_3	24	25
-------	----	----

u_3	0 1 2 3 4	0 1 2 3 4
$g_3(s_3, u_3) + f_4(s_4)$	20 31 41 44 38	20 31 41 44 38
$f_3(s_3)$	44	44
u_3^*	3	3

k=2, 由于“k=1”阶段只需 $f_2(9), f_2(13), f_2(17), f_2(21), f_2(25)$

s_2	9	13	17	21	25
u_2	0 1	0 1 2	0 1 2 3	0 1 2 3 4	0 1 2 3 4
$g_2(s_2, u_2) + f_3(s_3)$	19 17	25 23 26	29 34 32 26	39 38 37 40 34	44 48 47 45 42
$f_2(s_2)$	19	26	34	40	48
u_2^*	0	2	1	3	1

k=1

s_1	25
u_1	0 1 2 3 4
$g_1(s_1, u_1) + f_2(s_2)$	48 50 51 47 41
$f_1(s_1)$	51
u_1^*	2

$\therefore f_1(s_1) = 51$, 最优解为: $u_1^* = 2, u_2^* = 1, u_3^* = 1, u_4^* = 2$

8. 阶段: k=6 表示 6 个月

状态变量: s_k 表示第 k 个月开始时的库存量

决策变量: x_k 表示第 k 个月的生产量

状态转移方程: $s_{k+1} = s_k + x_k - d_k$

指标函数:

$$\text{生产费用 } c_k(x_k) = \begin{cases} 4000 + 1000x_k & (x_k > 0) \\ 0 & (x_k = 0) \end{cases}$$

$$\text{存贮费用 } h_k(s_k) = 1000s_k$$

$$g_k(s_k, x_k) = c_k(x_k) + h_k(s_k)$$

最优指标函数:

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max_{0 \leq u_k \leq s_k} \{g_k(s_k, u_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\} \\ f_7(s_7) = 0 (\text{边界条件}) \end{cases}$$

k=6

$$s_7 = s_6 + x_6 - 1 = 0 \Rightarrow s_6 + x_7 = 1$$

s_6	x_6	$g_6(s_6, x_6)$			s_7	$f_7(s_7)$	$g_6(s_6, x_6) + f_7(s_7)$
		$c_6(x_6)$	$h_6(s_6)$	$g_6(s_6, x_6)$			
0	1	5000	0	5000	0	0	5000
1	0	0	1000	1000	0	0	1000

k=5

s_5	x_5	$g_5(s_5, x_5)$			s_6	$f_6(s_6)$	$g_5(s_5, x_5) + f_6(s_6)$	$f_5(s_5)$	x_5^*
		$c_5(x_5)$	$h_5(s_5)$	$g_5(s_5, x_5)$					
0	2	6000	0	6000	0	5000	11000	8000	3
	3	7000	0	7000	1	1000	8000		
1	1	5000	1000	6000	0	5000	11000	8000	2
	2	6000	1000	7000	1	1000	8000		
2	0	0	2000	2000	0	5000	7000	7000	0
	1	5000	2000	7000	1	1000	8000		
3	0	0	3000	3000	1	1000	4000	4000	0

k=4

s_4	x_4	$g_4(s_4, x_4)$			s_5	$f_5(s_5)$	$g_4(s_4, x_4) + f_5(s_5)$	$f_4(s_4)$	x_4^*
		$c_4(x_4)$	$h_4(s_4)$	$g_4(s_4, x_4)$					
0	3	7000	0	7000	0	8000	15000	15000	3
	4	8000	0	8000	1	8000	16000		
1	2	6000	1000	7000	0	8000	15000	15000	2
	3	7000	1000	8000	1	8000	16000		
	4	8000	1000	9000	2	7000	16000		

2	1	5000	2000	7000	0	8000	15000	14000	4
	2	6000	2000	8000	1	8000	16000		
	3	7000	2000	9000	2	7000	16000		
	4	8000	2000	10000	3	4000	14000		
3	0	0	3000	3000	0	8000	11000	11000	0
	1	5000	3000	8000	1	8000	16000		
	2	6000	3000	9000	2	7000	16000		
	3	7000	3000	10000	3	4000	14000		

k=3

s_3	x_3	$g_3(s_3, x_3)$			s_4	$f_4(s_4)$	$g_3(s_3, x_3) + f_4(s_4)$	$f_3(s_3)$	x_3^*
		$c_3(x_3)$	$h_3(s_3)$	$g_3(s_3, x_3)$					
1	4	8000	1000	9000	0	15000	24000	24000	4
2	3	7000	2000	9000	0	15000	24000	24000	3
	4	8000	2000	1000	1	15000	25000		
3	2	6000	3000	9000	0	15000	24000	24000	2
	3	7000	3000	10000	1	15000	25000		
	4	8000	3000	11000	2	14000	25000		

k=2

s_2	x_2	$g_2(s_2, x_2)$			s_3	$f_3(s_3)$	$g_2(s_2, x_2) + f_3(s_3)$	$f_2(s_2)$	x_2^*
		$c_2(x_2)$	$h_2(s_2)$	$g_2(s_2, x_2)$					
0	3	7000	0	7000	1	24000	31000	31000	3
	4	8000	0	8000	2	24000	32000		
1	2	6000	1000	7000	1	24000	31000	31000	2
	3	7000	1000	8000	2	24000	32000		
	4	8000	1000	9000	3	24000	33000		
2	0	0	3000	3000	1	24000	27000	27000	2
	1	5000	3000	8000	2	24000	32000		
	2	6000	3000	9000	3	24000	33000		
3	1	5000	2000	7000	1	24000	31000	31000	1
	2	6000	2000	8000	2	24000	32000		
	3	7000	2000	9000	3	24000	33000		

k=1

s_1	x_1	$g_1(s_1, x_1)$			s_2	$f_2(s_2)$	$g_1(s_1, x_1) + f_2(s_2)$	$f_1(s_1)$	x_1^*
		$c_1(x_1)$	$h_1(s_1)$	$g_1(s_1, x_1)$					

0	1	5000	0	5000	0	31000	36000	35000	4
	2	6000	0	6000	1	31000	37000		
	3	7000	0	7000	2	31000	38000		
	4	8000	0	8000	3	27000	35000		

最优解为： $x_1^* = 4, x_2^* = 0, x_3^* = 4, x_4^* = 3, x_5^* = 3$ 最优值为 35000。

9. 阶段：k=4 表示四个季度

状态变量： s_k 表示第 k 个季度初的人数

决策变量： x_k 表示第 k 季度末需新雇佣的人数（ x_k 为负数是表示解雇- x_k 人）

状态转移方程： $s_{k+1} = s_k + x_k$

指标函数：

$$g_k(s_k, x_k) = (s_k - d_k) \times 2000 + 200(s_{k+1} - s_k)^2 = (s_k - d_k) \times 2000 + 200x_k^2$$

最优指标函数：

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max_{0 \leq u_k \leq s_k} \{g_k(s_k, u_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\} \\ f_5(s_5) = 0(\text{边界条件}) \end{cases}$$

k=4（冬季）

$$\begin{aligned} f_4(s_4) &= \min_{x_4 \geq 255-s_4} \{s_4 - 200\} \times 2000 + 200 \times x_4^2 + f_5(s_5) \} \\ &= \min_{x_4 \geq 255-s_4} \{s_4 - 200\} \times 2000 + 200 \times x_4^2 \} \end{aligned}$$

$$h_4(s_4, x_4) = 2000s_4 - 400000 + 200x_4^2$$

$$h'_4(s_4, x_4) = 400x_4 = 0 \Rightarrow x_4 = 0$$

$$h''_4(s_4, x_4) = 400 > 0$$

$\therefore h_4(s_4, x_4)$ 在 $x_4 = 0$ 处取得极小值。

$$\therefore f_4(s_4) = \begin{cases} (s_4 - 200) \times 2000 + 200 \times (255 - s_4)^2 (\text{当 } 255 - s_4 > 0 \text{ 时}) (1) \\ (s_4 - 200) \times 2000 (\text{当 } 255 - s_4 \leq 0 \text{ 时}) (2) \end{cases}$$

当取（1）式时：

k=3（秋季） $s_4 = s_3 + x_3$

$$\begin{aligned} f_3(s_3) &= \min_{x_3 \geq 200-s_3} \{ (s_3 - 240) \times 2000 + 200x_3^2 + f_4(s_4) \} \\ &= \min_{x_3 \geq 200-s_3} \{ (s_4 - 240) \times 2000 + 200x_3^2 + (s_3 + x_3 - 200) \times 2000 + 200(255 - s_3 - x_3)^2 \} \end{aligned}$$

$$= \min_{x_3 \geq 200-s_3} \{-98000s_3 + 200s_3^2 + 400x_3^2 - 100000x_3 + 400s_3x_3 + 12125000\}$$

$$h_3(s_3, x_3) = -98000s_3 + 200s_3^2 + 400x_3^2 - 100000x_3 + 400s_3x_3 + 12125000$$

$$h'_3 = 800x_3 - 100000 + 400s_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 125 - 1/2s_3$$

$$h''_3(s_3, x_3) = 800 > 0$$

$\therefore h_3(s_3, x_3)$ 在 $x_3 = 125 - 1/2s_3$ 处取得极小值。

经分析得到当 $s_3 \geq 150$ 时, $125 - 1/2s_3$ 总比 $200 - s_3$ 大, 而由题意可知 $s_3 \geq 240$

$\therefore x_3 = 125 - 1/2s_3$ 可以取到

$$\therefore f_3(s_3) = 100s_3^2 - 48000s_3 + 587500 (x_3^* = 125 - 1/2s_3)$$

$$k=2 \text{ (夏季)} \quad s_3 = s_2 + x_2$$

$$\begin{aligned} f_2(s_2) &= \min_{x_2 \geq 240-s_2} \{(s_2 - 220) \times 2000 + 200x_2^2 + f_3(s_3)\} \\ &= \min_{x_2 \geq 240-s_2} \{(s_2 - 220) \times 2000 + 200x_2^2 + 100(s_2 + x_2)^2 - 48000(s_2 + x_2) + 587500\} \\ &= \min_{x_2 \geq 240-s_2} \{100s_2^2 - 46000s_2 + 300x_2^2 - 48000s_2 + 200s_2x_2 + 5435000\} \end{aligned}$$

$$h_2(s_2, x_2) = 100s_2^2 - 46000s_2 + 300x_2^2 - 48000x_2 + 200s_2x_2 + 5435000$$

$$h'_2(s_2, x_2) = 600x_2 - 48000 + 200s_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 80 - 1/3s_2$$

$$h''_2(s_2, x_2) = 600 > 0$$

$\therefore h_2(s_2, x_2)$ 在 $x_2 = 80 - 1/3s_2$ 处取得极小值。

经分析得到当 $s_2 \geq 240$ 时, $80 - 1/3s_2$ 总比 $240 - s_2$ 大, 而由题意可知 $s_2 \geq 220$ 。

$$\therefore f_2(s_2, x_2) = \begin{cases} 200s_2^2 - 94000s_2 + 11195000 & (\text{当 } 220 \leq s_2 < 240 \text{ 时}) \quad (x_2^* = 240 - s_2) \quad (3) \\ 200/3s_2^2 - 30000s_2 + 3515000 & (\text{当 } s_2 \geq 240 \text{ 时}) \quad (x_2^* = 80 - 1/3s_2) \quad (4) \end{cases}$$

(取 (3) 式进行一下运算, 取 (4) 式进行运算见后面补充)

$$k=1 \text{ (春季)} \quad s_2 = s_1 + x_1$$

$$\begin{aligned} f_1(s_1) &= \min_{x_1 \geq 220-s_1} \{(s_1 - 225) \times 2000 + 200x_1^2 + f_2(s_2)\} \\ &= \min_{x_1 \geq 220-s_1} \{(s_1 - 225) \times 2000 + 200x_1^2 + 200(s_1 + x_1)^2 + 94000(s_1 + x_1) + 11195000\} \end{aligned}$$

$$= \min_{x_1 \geq 220 - s_1} \{200s_1^2 - 92000s_1 + 400x_1^2 - 94000x_1 + 400s_1x_1 + 1074500\}$$

$$h_1(s_1, x_1) = 200s_1^2 - 92000s_1 + 400x_1^2 - 94000x_1 + 400s_1x_1 + 1074500$$

$$h_1'(s_1, x_1) = 800x_1 - 94000 + 400x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 117.5 - 1/2s_1$$

$$h_1''(s_1, x_1) = 800 > 0$$

$\therefore h_1(s_1, x_1)$ 在 $x_1 = 117.5 - 1/2s_1$ 处取得极小值。

经分析知，当 $s_1 \geq 205$ 时， $117.5 - 1/2s_1$ 总比 $220 - s_1$ 大，而由题意可知 $s_1 \geq 225$

$\therefore x_1 = 117.5 - 1/2s_1$ 可以取到

$$\therefore f_1(s_1) = 100s_1^2 - 45000s_1 + 5222500 (x_1^* = 117.5 - 1/2s_1)$$

$$f_1'(s_1) = 200s_1 - 45000 = 0 \Rightarrow s_1 = 225$$

$$f_1''(s_1) = 200 > 0$$

$\therefore f_1(s_1)$ 在 $s_1 = 225$ 处取的极小值

又 $\because s_1 \geq 225, \therefore s_1 = 225$ 可以取到， $f_1(s_1) = 1600000$ (最优值)

$$\text{最优解为: } s_1 = 225 \quad x_1 = 5$$

$$s_2 = 230 \quad x_2 = 10$$

$$s_3 = 240 \quad x_3 = 5$$

$$s_4 = 245 \quad x_4 = 10$$

故最后的最优值及最优解为上述所求。

当取 (2) 式时：

k=4 (冬季)

取 ② 式进行计算

k=3 (秋季)

$$f_3(s_3) = \min_{x_3 \geq 200 - s_3} \{ (s_3 - 240) * 2000 + 200x_3^2 + f_4(s_4) \}$$

$$= \min_{x_3 \geq 200 - s_3} \{ (s_3 - 240) * 2000 + 200x_3^2 + (s_4 - 200) \times 2000 \}$$

解得： $f_3(s_3) = 4000s_3 - 885000$ (当 $x_3^* = -5$ 时)

k=2 (夏季)

$$f_3(S_3) = \min_{X_2 \geq 240 - S_2} \{ (S_2 - 220) * 2000 + 220X_2^2 + 4000S_3 - 885000 \}$$

$$\text{解得: } f_2(S_2) = \begin{cases} 6000S_2 - 1345000 & (\text{当 } S_2 \geq 250 \text{ 时}) (X_2^* = -10) \\ 200S_2^2 - 94000S_2 + 11155000 & (\text{当 } 220 \leq S_2 < 250 \text{ 时}) (X_2^* = 240 - S_2) \end{cases}$$

k=1

$$\text{取 } f_2(S_2) = 6000S_2 - 1345000$$

$$f_1(S_1) = \min_{X_1 \geq 220 - S_1} \{ (S_1 - 225) * 2000 + 220X_1^2 + 6000S_2 - 1345000 \}$$

$$\text{解得: } f_1(S_1) = \begin{cases} 8000S_1 - 1840000 & (\text{当 } S_1 \geq 235 \text{ 时}) (X_2^* = -15) \\ -798000S_1 + 9205000 & (\text{当 } 225 \leq S_1 < 235 \text{ 时}) (X_2^* = 220 - S_1) \end{cases}$$

此时, 对于 $f_1(S_1) = 8000S_1 - 1840000$ 是单调递增函数。

所以当 $S_1 = 235$ 时 $f_1(S_1)$ 取得最小。但此时 $S_2 = 220$ 与前面的假设 $S_2 \geq 250$ 矛盾, 故舍去。

对于 $f_1(S_1) = -798000S_1 + 9205000$, 当 $S_1 \geq 225$ 时 $f_1(S_1) < 0$ 与实际矛盾, 故舍去。

$$\text{取 } f_2(S_2) = 200S_2^2 - 94000S_2 + 11155000$$

$$f_1(S_1) = \min_{X_2 \geq 220 - S_1} \{ (S_1 - 225) * 2000 + 220X_1^2 + 200S_2^2 - 94000S_2 + 11155000 \}$$

$$\text{解得 } f_1(S_1) = -449000S_1 + 5182500 (X_1^* = 117.5 - (1/2)S_1)$$

但此时, $S_1 \geq 225$, $f_1(S_1) < 0$, 故舍去。

取②式进行计算

k=2

$$f_2(S_2) = (200/3)S_2^2 - 30000S_2 + 3515000$$

k=1

$$f_1(S_1) = \min_{X_1 \geq 220 - S_1} \{ (S_1 - 225) * 2000 + 220X_1^2 + (200/3)S_2^2 - 30000S_2 + 3515000 \}$$

解得在 $X_1 = 56.25 - (1/4)S_1$ 处时取得最优并 $X_1 = 56.25 - (1/4)S_1$ 可以得到。

$$\text{此时, } f_1(S_1) = 50(S_1^2 - 545S_1 + 7480) = 50[(S_1 - 272.5)^2 - 66776.25]$$

因为 $f_1(S_1) \geq 0$, 所以在 $S_1 = 531$ 时, $f_1(S_1)$ 取得最小为 0。

此时 $S_1 = 531$, $X_1 = -76.5 \rightarrow S_1 = 454.5$, $X_1^* = -71.5$, $S_4 = 383$, $X_3^* = -66.5$, $S_4 = 316.5$ 与 $255 - S_4 > 0$

矛盾, 故舍去。

10. 阶段: k=2 表示 2 个月

状态变量: s_k 表示第 k 个月开始时的库存量

决策变量: x_k 表示第 k 阶段的生产量

状态转移方程: $s_{k+1} = s_k + x_k - d_k$ (d_k 为第 k 阶段的需求量)

指标函数: 生产费用 $c_k(x_k)$, 存贮费用 $h_k(s_k) = 3s_k$

$$g_k(s_k, x_k) = c_k(x_k) + h_k(s_k)$$

最优指标函数:

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max_{0 \leq u_k \leq s_k} \{g_k(s_k, u_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\} \\ f_3(s_3) = 0 (\text{边界条件}) \end{cases}$$

$k=2$ 时

$$s_3 = s_2 + x_2 - d_2 = s_2 + x_2 - 140 = 0 \quad \therefore s_2 + x_2 = 140 \Rightarrow x_2 = 140 - s_2$$

$$\begin{aligned} f_2(s_2) &= \min_{s_2 + x_2 = 140} \{c_2(x_2) + h_2(s_2) + f_3(s_3)\} \\ &= \begin{cases} \min_{s_2 + x_2 = 140} \{7500 + (x_2 - 40)^2 + 3s_2 + 0\} \\ 3 \times 140 (\text{当 } s_2 = 140, x_2 = 0 \text{ 时}) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 7500 + (100 - s_2)^2 + 3s_2 (\text{当 } s_2 < 140 \text{ 时}) \\ 420 (\text{当 } s_2 = 140, x_2 = 0 \text{ 时}) \end{cases} \end{aligned}$$

$k=1$ 时

$$s_2 = s_1 + x_1 - d_1 = 0 + x_1 - 20 \therefore s_2 = x_1 - 20$$

$$f_1(s_1) = \min_{x_1 \geq 20} \{7500 + (x_1 - 50)^2 + f_2(s_2)\}$$

(1) 当 $f_2(s_2) = 7500 + (100 - s_2)^2 + 3s_2$ 时

$$\begin{aligned} f_1(s_1) &= \min_{x_1 \geq 20} \{7500 + (x_1 - 50)^2 + 7500 + (100 - s_2)^2 + 3s_2\} \\ &= \min_{x_1 \geq 20} \{7500 + (x_1 - 50)^2 + 7500 + (120 - x_1)^2 + 3(x_1 - 20)\} \end{aligned}$$

$$p_1(s_1, x_1) = 15000 + (x_1 - 50)^2 + (120 - x_1)^2 + 3(x_1 - 20)$$

$$p_1'(s_1, x_1) = 2(x_1 - 50) - 2(120 - x_1) + 3 = 0 \quad \therefore x_1 = 84.25$$

$$p_1''(s_1, x_1) = 4 \geq 0 \therefore p_1(s_1, x_1) \text{ 在 } x_1 = 84.25 \text{ 处取得极小值}$$

$$\text{此时 } f_1(s_1) = 17575.375, \quad x_1^* = 81.25, \quad x_2^* = 75.75$$

(2) 当 $f_2(s_2) = 420$ 时

由于 $s_2 = x_2 - 20 = 140$ $\therefore x_1 = 160$

$$f_1(s_1) = 7500 + (160 - 50)^2 + 420 = 20020 > 17515.375$$

$\therefore$ 最优值为17515.375, 最优解为: $x_1^* = 81.25, x_2^* = 75.75$

11. 阶段: $k=4$ 表示 4 个项目

状态变量: s_k 表示第 k 阶段开始时可供分配的资金数

决策变量: u_k 表示分配给第 k 个阶段的资金数

状态转移方程: $s_{k+1} = s_k - u_k$

指标函数: $g_k(s_k, u_k)$ 表示分配给第 k 阶段 u_k 资金时完工的周数

最优指标函数:

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max_{0 \leq u_k \leq s_k} \{g_k(s_k, u_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\} \\ f_5(s_5) = 0(\text{边界条件}) \end{cases}$$

$k=4$ (项目 4)

s_4	0	5	10	15	20	25	30	35
$f_4(s_4)$	25	21	18	16	14	12	11	10
u_4^*	0	5	10	15	20	25	30	35

$k=3$ (项目 3)

s_3	0	5	10	15	20
u_3	0	0 5	0 5 10	0 5 10 15	0 5 10 15 20
$g_3(s_3, u_3) + f_4(s_4)$	43	39 40	36 36 37	34 33 33 35	32 31 30 31 34
$f_3(s_3)$	43	39	36	33	30
u_3^*	0	0	0 5	5 10	10

s_3	25	30	35
-------	----	----	----

u_3	0 5 10 15 20 25	0 5 10 15 20 25 30	0 5 10 15 20 25 30 35
$g_3(s_3, u_3) + f_4(s_4)$	30 29 28 28 30 33	29 27 26 26 27 29 32	28 26 24 24 26 28 31
$f_3(s_3)$	28	26	24
u_3^*	10 15	10 15	10 15

k=2 (项目 2)

s_2	0	5	10	15	20
u_2	0	0 5	0 5 10	0 5 10 15	0 5 10 15 20
$g_2(s_2, u_2) + f_3(s_3)$	63	59 59	56 55 56	53 52 52 54	50 49 49 50 52
$f_2(s_2)$	63	59	55	52	49
u_2^*	0	0 5	5	5 10	5 10

s_2	25	30	35
u_2	0 5 10 15 20 25	0 5 10 15 20 25 30	0 5 10 15 20 25 30 35
$g_2(s_2, u_2) + f_3(s_3)$	48 46 46 47 48 51	46 44 43 44 45 47 50	44 42 41 41 42 44 46 50
$f_2(s_2)$	46	43	41
u_2^*	5 10	10	10 15

k=1 (项目 1)

s_1	35
u_1	0 5 10 15 20 25 30 35
$g_1(s_1, u_1) + f_2(s_2)$	56 55 56 57 59 61 64 67
$f_1(s_1)$	55
u_1^*	5

$\therefore f_1(s_1) = 55$, 最优解为: $u_1^* = 5, u_2^* = 10, u_3^* = 10, u_4^* = 10$

12. 阶段：k=5 表示 5 个月

状态变量： s_k 表示第 k 个月初的库存量

决策变量： u_k 表示第 k 个月的购买量

状态转移方程： $s_{k+1} = s_k + x_k - d_k$ (d_k 为第 k 个月的需求量)

指标函数： $p_k u_k + 2.5s_k = g_k(s_k, u_k)$ (p_k 为第 k 个月的价格)

最优指标函数：

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max_{0 \leq u_k \leq s_k} \{g_k(s_k, u_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\} \\ f_6(s_6) = 0 (\text{边界条件}) \end{cases}$$

k=5

$$s_6 = s_5 + u_5 - d_5 = s_5 + u_5 - 4 = 0$$

$$\therefore s_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}, \text{ 相应的 } u_5 = \{4, 3, 2, 1, 0\}$$

s_5	u_5	$g_5(s_5, u_5)$			s_6	$f_6(s_6)$	$g_5(s_5, u_5) + f_6(s_6)$
		$p_5 u_5$	$2.5s_5$	$g_5(s_5, u_5)$			
0	4	48	0	48	0	0	48
1	3	36	2.5	38.5	0	0	38.5
2	2	24	5	29	0	0	29
3	1	12	7.5	19.5	0	0	19.5
4	0	0	10	10	0	0	10

k=4

s_4	u_4	$g_4(s_4, u_4)$			s_5	$f_5(s_5)$	$g_4(s_4, u_4) + f_5(s_5)$	$f_4(s_4)$	u_4^*
		$p_4 u_4$	$2.5s_4$	$g_4(s_4, u_4)$					
0	9	90	0	90	0	48	138	138	9
	10	100	0	100	1	38.5	138.5		
	11	110	0	110	2	29	139		
	12	120	0	120	3	19.5	139.5		
	13	130	0	130	4	10	140		
1	8	80	2.5	82.5	0	48	130.5	130.5	8
	9	90	2.5	92.5	1	38.5	131		
	10	100	2.5	102.5	2	29	131.5		
	11	110	2.5	112.5	3	19.5	132		
	12	120	2.5	122.5	4	10	132.5		

2	7	70	5	75	0	48	123	123	7
	8	80	5	85	1	38.5	123.5		
	9	90	5	95	2	29	124		
	10	100	5	105	3	19.5	124.5		
	11	110	5	115	4	10	125		
3	6	60	7.5	67.5	0	48	115.5	115.5	6
	7	70	7.5	77.5	1	38.5	116		
	8	80	7.5	87.5	2	29	116.5		
	9	90	7.5	97.5	3	19.5	117		
	10	100	7.5	107.5	4	10	117.5		
4	5	50	10	60	0	48	108	108	5
	6	60	10	70	1	38.5	108.5		
	7	70	10	80	2	29	109		
	8	80	10	90	3	19.5	109.5		
	9	90	10	100	4	10	110		
5	4	40	12.5	52.5	0	48	100.5	100.5	4
	5	50	12.5	62.5	1	38.5	101		
	6	60	12.5	72.5	2	29	101.5		
	7	70	12.5	82.5	3	19.5	102		
	8	80	12.5	92.5	4	10	102.5		
6	3	30	15	45	0	48	93	93	3
	4	40	15	55	1	38.5	93.5		
	5	50	15	65	2	29	94		
	6	60	15	75	3	19.5	94.5		
	7	70	15	85	4	10	95		
7	2	20	17.5	37.5	0	48	85.5	85.5	2
	3	30	17.5	47.5	1	38.5	86		
	4	40	17.5	57.5	2	29	86.5		
	5	50	17.5	67.5	3	19.5	87		
	6	60	17.5	77.5	4	10	87.5		
8	1	10	20	30	0	48	78	78	1
	2	20	20	40	1	38.5	78.5		
	3	30	20	50	2	29	79		
	4	40	20	60	3	19.5	79.5		
	5	50	20	70	4	10	80		
9	0	0	22.5	22.5	0	48	70.5	70.5	0
	1	10	22.5	32.5	1	38.5	71		
	2	20	22.5	42.5	2	29	71.5		
	3	30	22.5	52.5	3	19.5	72		
	4	40	22.5	62.5	4	10	72.5		
10	0	0	25	25	0	38.5	63.5	63.5	0
	1	10	25	35	2	29	64		
	2	20	25	45	3	19.5	64.5		
	3	30	25	55	4	10	65		

11	0	0	27.5	27.5	2	29	56.5	56.5	0
	1	10	27.5	37.5	3	19.5	57		
	2	20	27.5	47.5	4	10	57.5		
12	0	0	30	30	3	19.5	49.5	49.50	0
	1	10	30	40	4	10	50		

同理可得

k=3

s_3	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f_3(s_3)$	216	2055	195	184.5	174	163.5	153	148	143	138	133	128	123
u_3^*	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0

k=2

s_2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f_2(s_2)$	326	317.5	309	300.5	292	283.5	275	266.5	258	249.5	241	233	225
u_2^*	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0

k=1

s_1	u_1	$g_1(s_1, u_1)$			s_2	$f_2(s_2)$	$g_1(s_1, u_1) + f_2(s_2)$	$f_1(s_1)$	u_1^*
		$p_1 u_1$	$2.5 s_1$	$g_1(s_1, u_1)$					
0	5	50	0	50	0	326	376	376	5
	6	60	0	60	1	317.5	377.5		
	7	70	0	70	2	309	379		
	8	80	0	80	3	300.5	380.5		
	9	90	0	90	4	292	382		
	10	100	0	100	5	283.5	383.5		
	11	110	0	110	6	275	385		
	12	120	0	120	7	266.5	386.5		
	13	130	0	130	8	258	388		
	14	140	0	140	9	249.5	389.5		
	15	150	0	150	10	241	391		
	16	160	0	160	11	233	393		
	17	170	0	170	12	225	395		

∴ 最优值为（即最小费用）为376

最优解： $u_1^* = 5, u_2^* = 10, u_3^* = 6, u_4^* = 9, u_5^* = 4$

13. (1) $\max z = 12x_1 + 3x_1^2 - 2x_1^3 + 12x_2 - x_2^3$

$$s.t : x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

阶段: $k=2$

状态变量: s_k

决策变量: x_k

状态转移方程: $s_1 = 3, s_2 = s_1 - x_1$

$$\begin{aligned} \text{指标函数: } g_1(s_1, x_1) &= 12x_1 + 3x_1^2 - 2x_1^3 \\ g_2(s_2, x_2) &= 12x_2 - x_2^3 \end{aligned}$$

最优指标函数:

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max_{0 \leq u_k \leq s_k} \{g_k(s_k, u_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\} \\ f_3(s_3) = 0 (\text{边界条件}) \end{cases}$$

$k=2$

$$f_2(s_2) = \max_{0 \leq x_2 \leq s_2} (12x_2 - x_2^3)$$

$$g_2'(s_2, x_2) = 12 - 3x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2, x_2 = -2 (\text{舍去})$$

$$g_2''(s_2, x_2) = -6x_2 | (x_2 = 2) = -12 < 0$$

$\therefore x_2 = 2$ 为极大值点

$$\therefore f_2(s_2) = \begin{cases} 16 (\text{当 } s_2 \geq 2 \text{ 时}) & \text{此时 } x_2^* = 2 \\ 12s_2 - s_2^3 (\text{当 } s_2 < 2 \text{ 时}) & \text{此时 } x_2^* = s_2 \end{cases}$$

$k=1$

$$f_1(s_1) = \max_{0 \leq x_1 \leq s_1} \{12x_1 + 3x_1^2 - 2x_1^3 + f_2(s_2)\}$$

1) 当 $f_2(s_2) = 16$ 时

$$f_1(s_1) = \max_{0 \leq x_1 \leq s_1} \{12x_1 + 3x_1^2 - 2x_1^3 + 16\}$$

$$h_1(s_1, x_1) = 12x_1 + 3x_1^2 - 2x_1^3 + 16$$

$$h_1'(s_1, x_1) = 12 + 6x_1 - 6x_1^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_1 = -1 (\text{舍去})$$

$$h_1''(s_1, x_1) = 6 - 12x_1 | x_1 = 2 = -18 < 0$$

$\therefore x_2$ 为极大值点

但此时 $s_2 = s_1 - x_1 = 1 < 2$

$\therefore$ 与假设矛盾, 故舍去

2) $f_2(s_2) = 12s_2 - s_2^3$ 时

$$f_1(s_1) = \max_{0 \leq x_1 \leq s_1} \{12x_1 + 3x_1^2 - 2x_1^3 + 12s_2 - s_2^3\}$$

$$= \max_{0 \leq x_1 \leq s_1} \{12x_1 + 3x_1^2 - 2x_1^3 + 12(s_1 - x_1) - (s_1 - x_1)^3\}$$

$$h_1(s_1, x_1) = 12x_1 + 3x_1^2 - x_1^3 + 12(s_1 - x_1) - (s_1 - x_1)^3 = 3x_1^2 - 2x_1^3 + 36 - (3 - x_1)^3$$

$$h_1'(s_1, x_1) = 6x_1 - 6x_1^2 + 3(3 - x_1)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2 + \sqrt{13}, x_1 = -2 - \sqrt{13} \text{ (舍去)}$$

$$h_1''(s_1, x_1) = 6 - 12x_1 - 6(3 - x_1) \big|_{(x_1 = -2 + \sqrt{13})} = -6\sqrt{13} < 0$$

$$\therefore x_1 = -2 + \sqrt{13} \text{ 为极大值点}$$

$$\therefore x_1^* = -2 + \sqrt{13}, x_2^* = s_1 - x_1^* = 3 + 2 - \sqrt{13} = 5 - \sqrt{13}$$

$$\text{最优值为 } z^* = 26\sqrt{13} - 61$$

$$(2) \max z = x_1 x_2 x_3$$

$$s.t.: x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

阶段: k=3

状态变量: s_k

决策变量: x_k

状态转移方程: $s_1 = 6, s_2 = s_1 - x_1, s_3 = s_2 - x_2$

$$g_1(s_1, x_1) = x_1$$

指标函数: $g_2(s_2, x_2) = x_2$

$$g_3(s_3, x_3) = x_3$$

最优指标函数:

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max_{0 \leq u_k \leq s_k} \{g_k(s_k, u_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\} \\ f_4(s_4) = 0 \text{ (边界条件)} \end{cases}$$

k=3

$$f_3(s_3) = \max_{0 \leq x_3 \leq s_3} \{g_3(s_3, x_3) f_4(s_4)\}$$

$$= \max_{0 \leq x_3 \leq s_3} \{x_3\}$$

$$= s_3 \text{ (当 } x_3^* = s_3 \text{ 时)}$$

k=2

$$f_2(s_2) = \max_{0 \leq x_2 \leq s_2} \{g_2(s_2, x_2) f_3(s_3)\}$$

$$= \max_{0 \leq x_2 \leq s_2} \{x_2 \cdot s_3\}$$

$$= \max_{0 \leq x_2 \leq s_2} \{x_2 \cdot (s_2 - x_2)\}$$

$$h_2(s_2, x_2) = x_2(s_2 - x_2)$$

$$h_2'(s_2, x_2) = s_2 - 2x_2 = 0 \Rightarrow x_2^* = 1/2s_2$$

$$h_2''(s_2, x_2) = -2 < 0$$

$\therefore x_2 = 1/2s_2$ 为极大值点, $f_2(s_2) = 1/4s_2^2$ (当 $x_2^* = 1/2s_2$ 时)

k=1

$$f_1(s_1) = \max_{0 \leq x_1 \leq s_1} \{g_1(s_1, x_1) f_2(s_2)\}$$

$$= \max_{0 \leq x_1 \leq s_1} \{x_1 \cdot 1/4s_2^2\}$$

$$= \max_{0 \leq x_1 \leq s_1} \{x_1 \cdot 1/4(s_1 - x_1)^2\}$$

$$h_1(s_1, x_1) = 1/4x_1(s_1 - x_1)^2 = 1/4x_1(s_1^2 + x_1^2 - 2s_1x_1) = 1/4s_1^2x_1 + 1/4x_1^3 - 1/2s_1x_1^2$$

$$h_1'(s_1, x_1) = 1/4s_1^2 + 3/4x_1^2 - s_1x_1 = 0 \Rightarrow x_1^* = 1/3s_1 \text{ 或 } s_1$$

$$h_1''(s_1, x_1) = 3/2x_1 - s_1$$

当 $x_1 = 1/3s_1$ 时, $h_1''(s_1, x_1) = -1/2s_1 < 0 \therefore x_1 = 1/3s_1$ 是极大值点

当 $x_1 = s_1$ 时, $h_1''(s_1, x_1) = 1/2s_1 > 0 \therefore x_1 = s_1$ 为极小值点, 故舍去

$\therefore$ 最优值 $f_1(s_1) = 2$

最优解为 $x_1^* = 1/3s_1 = 1/3 \times 6 = 2, x_2^* = 1/2s_2 = 1/2(s_1 - x_1) = 1/2(6 - 2) = 2$

$$x_3^* = s_3 = s_2 - x_2 = 4 - 2 = 2$$

第六章 排队论

- (1) 泊松输入, 定长服务, 3 个并联服务台, 系统容量为 r: M/D/3/r
(2) 一般独立输入, 指数服务, 单服务台: G/M/1
(3) G/E3/1/1: 一般独立输入, 3 阶段爱尔朗分布, 单服务台, 系统容量为 1
(4) M/G/3/15/15: 泊松输入, 一般独立服务, 3 个并联服务台, 系统容量为 15, 顾客源限额为 15

- $\lambda = 15$ 份/h, $\mu = 6$ 份/h

该室为 M/M/S/ ∞ 系统

$$\text{其中 } s=3, \delta = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{15}{6} = 2.5, \rho = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{15}{3 \times 6} = 0.83$$

$$(1) p_0 = \left[\sum_{k=0}^2 \frac{\delta^k}{k!} + \frac{\delta^3}{3!(1-\rho)} \right]^{-1} = \left[\sum_{k=0}^2 \frac{2.5^k}{k!} + \frac{2.5^3}{3!(1-0.83)} \right]^{-1} = 0.046$$

$$p_1 = \frac{2.5}{1} p_0 = 2.5 \times 0.046 = 0.115$$

$$p_2 = \frac{\delta^2}{2!} p_0 = \frac{2.5^2}{2} \times 0.046 = 0.144$$

$$p(n \geq 3) = 1 - p(n < 3) = 1 - (p_0 + p_1 + p_2) = 1 - 0.046 - 0.115 - 0.144 = 0.695$$

∴ 三个打字员都忙于打字的概率是 0.695

主要工作指标：

$$L_q = \frac{\delta^s \rho}{s!(1-\rho)^2} p_0 = \frac{2.5^3 \times 0.83}{3!(1-0.83)^2} \times 0.046 = 3.44$$

$$L = L_q + \delta = 3.44 + 2.5 = 5.94$$

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{5.94}{15} = 0.396$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{3.44}{15} = 0.229$$

$$(2) \lambda = 5 \text{ 份/h}, \mu = 6 \text{ 份/h}$$

该室为 M/M/1/∞ 系统

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{6} = 0.83$$

$$p_0 = 1 - \rho = 0.17 \quad L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{5}{6 - 5} = 5$$

$$L_q = L\rho = 5 \times 0.83 = 4.15$$

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{6 - 5} = 1 \quad W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \omega\rho = 1 \times 0.83 = 0.83$$

(3)

指标	S=1 系统	S=3 系统
p_0	0.17	0.046
$P(Q>0)$	0.83	0.695
L_q	4.15 份	3.44 份
L	5 份	5.94 份
W	1h	0.396h
W_q	0.83h	0.229h

由上表可以得出, 3 个打字员不分工包打不同科室的公文比较合算。

$$3. \lambda = 2.1 \text{人/h}, \mu = 2.5 \text{人/h} \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2.1}{2.5} = 0.84$$

该手术室为 M/M/1/∞ 系统

$$(1) \text{ 病房中病人的平均数: } L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{2.1}{2.5 - 2.1} = 5.25 (\text{人})$$

$$(2) \text{ 排队等待手术病人的平均数: } L_q = L\rho = 5.25 \times 0.84 = 4.41$$

$$(3) \text{ 病人在病房中平均逗留的时间: } W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{2.5 - 2.1} = 2.5 (h)$$

$$(4) \text{ 病人排队等待时间: } W_q = W\rho = 2.5 \times 0.84 = 2.1 (h)$$

$$4. \lambda = 1, \mu = 3 \text{人/h} \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{3} \quad \text{M/M/1/}\infty \text{ 系统}$$

$$(1) P_0 = 1 - \rho = 1 - 1/3 = 2/3 = 0.67$$

∴ 没有病人的概率为 0.67

$$\text{有两个人概率: } p_2 = p^2(1 - \rho) = (1/3)^2(1 - 1/3) = 2/27 = 0.074$$

$$\text{急诊室里的病人的平均数: } L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{1}{3 - 1} = 1/2 = 0.5 (\text{人})$$

$$\text{排队中病人的平均数: } L_q = L\rho = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = 0.167 (\text{人})$$

$$\text{病人在急诊室中的平均时间: } W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{3 - 1} = 0.5 (h)$$

$$(2) W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{\mu - 1} < \frac{25}{60} = \frac{5}{12}$$

$$\mu - 1 > \frac{12}{5} \Rightarrow \mu > \frac{17}{5} = 3.4 (\text{人/h})$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{3.4} = 0.294 (h/\text{人}) = 17.64 (\text{min}/\text{人})$$

∴ 为了保证病人所花总时间少于 25min, 平均服务时间必须降至 17.64 分钟

6. M/M/1/1 系统

$$\lambda = 0.8 \text{次/min}, \mu = 1/1.5 = 0.67 \text{次/min} \quad \delta = \frac{\lambda}{\mu} = 1.194 \text{ s} = 1$$

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^s \frac{\delta^k}{k!} \right]^{-1} = \frac{1}{1 + \frac{1.194}{1}} = \frac{1}{2.194} = 0.456$$

$$p_1 = \frac{\delta}{1!} p_0 = 1.194 \times 0.456 = 0.544$$

平均每小时呼叫次数为: $80 \times 60 = 48$ (次)

能接通的次数为: $48 p_0 = 48 \times 0.456 = 21.888$ (次)

不通的次数为: $48 p_1 = 48 \times 0.544 = 26.112$ (次)

7. M/M/2 系统

$$\lambda = 24 \text{人/小时}, \mu = 30 \text{人/小时}, \delta = \frac{24}{30} = 0.8, \rho = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{24}{2 \times 30} = 0.4$$

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{s-1} \frac{\delta^k}{k!} + \frac{\delta^s}{s!(1-\rho)} \right]^{-1} = \frac{1}{1 + 0.8 + \frac{0.8^2}{2!(1-0.4)}} = \frac{1}{1 + 0.8 + 0.53} = 0.43$$

$$L_q = \frac{\delta^s \rho}{s!(1-\rho)^2} p_0 = \frac{0.8^2 \times 0.4}{2!(1-0.4)^2} \times 0.43 = 0.15 \text{ (人)}$$

$$L = L_q + \delta = 0.15 + 0.8 = 0.95 \text{ (人)}$$

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{0.95}{24} = 0.04 \text{ (小时)}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0.15}{24} = 0.006 \text{ (小时)}$$

8. M/M/3 系统

$$\lambda = 2 \text{次/天}, \mu = 1 \text{次/天}, \delta = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{2} = 0.5, \rho = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{2}{3} = 0.67$$

$$(1) p_0 = \left[\sum_{k=0}^{s-1} \frac{\delta^k}{k!} + \frac{\delta^s}{s!(1-\rho)} \right]^{-1} = \frac{1}{1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!(1-2/3)}} = \frac{1}{1 + 2 + 2 + 4} = 0.111$$

$$p_1 = \frac{\delta}{1!} p_0 = \frac{2}{1} \times 0.111 = 0.222$$

$$p_2 = \frac{\delta^2}{2!} p_0 = \frac{2^2}{2!} \times 0.111 = 0.222$$

$$p_3 = \frac{\delta^3}{3!} p_0 = \frac{2^3}{6} \times 0.111 = 0.148$$

$$P\{n > 3\} = 1 - P\{n \leq 3\} = 1 - (p_0 + p_1 + p_2 + p_3) = 0.297$$

∴ 报警而无中队可派前往的概率为0.297

(2) 设每天执行消防任务的中队为 x

$$\begin{aligned} \text{则 } E(x) &= 0p_0 + 1p_1 + 2p_2 + 3\sum_{n=3}^{\infty} p_n = 0p_0 + 1p_1 + 2p_2 + 3(1 - p_1 - p_2 - p_0) \\ &= 0.222 + 2 \times 0.222 + 3(1 - 0.111 - 0.222 - 0.222) = 2 \end{aligned}$$

即每天执行消防任务的中队平均数为 2

(3) 若要求 (1) 中的概率小于 3%，则应配备多少中队？

$$\text{若 } s = 4, \lambda = 2 \text{ 次/天}, \mu = 1 \text{ 次/天}, \delta = \frac{\lambda}{\mu} = 2, \rho = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{2}{4 \times 1} = 0.5$$

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{s-1} \frac{\delta^k}{k!} + \frac{\delta^s}{s!(1-\rho)} \right]^{-1} = \frac{1}{1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!(1-0.5)}} = \frac{1}{1 + 2 + 2 + 1.33 + 1.33} = 0.131$$

$$P_1 = \frac{\delta}{1!} P_0 = \frac{2}{1} \times 0.131 = 0.262$$

$$P_2 = \frac{\delta^2}{2!} P_0 = \frac{2^2}{2!} \times 0.131 = 0.262$$

$$P_3 = \frac{\delta^3}{3!} P_0 = \frac{2^3}{6} \times 0.131 = 0.175$$

$$P_4 = \frac{\delta^4}{4!} P_0 = \frac{2^4}{24} \times 0.131 = 0.087$$

$$P(n > 4) = 1 - P(n \leq 4) = 1 - (0.131 + 0.262 + 0.262 + 0.175 + 0.087) = 0.08373\%$$

$$\text{若 } s = 5, \lambda = 2 \text{ 次/天}, \mu = 1 \text{ 次/天}, \delta = \frac{\lambda}{\mu} = 2, \rho = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{2}{5 \times 1} = 0.4$$

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{s-1} \frac{\delta^k}{k!} + \frac{\delta^s}{s!(1-\rho)} \right]^{-1} = \frac{1}{1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!(1-0.4)}} = 0.134$$

$$P_1 = \frac{\delta}{1!} P_0 = \frac{2}{1} \times 0.134 = 0.268$$

$$P_2 = \frac{\delta^2}{2!} P_0 = \frac{2^2}{2!} \times 0.134 = 0.268$$

$$P_3 = \frac{\delta^3}{3!} P_0 = \frac{2^3}{6} \times 0.134 = 0.179$$

$$P_4 = \frac{\delta^4}{4!} P_0 = \frac{2^4}{24} \times 0.134 = 0.089$$

$$P_5 = \frac{\delta^5}{5!} P_0 = \frac{2^5}{120} \times 0.1345 = 0.036$$

$$P(n > 5) = 1 - P(n \leq 5) = 1 - (0.134 + 0.268 + 0.268 + 0.179 + 0.089 + 0.036) = 0.026\% < 3\%$$

∴ 应配备5个中队

9. M/M/2/7 系统

$$\lambda = 3.7634 \text{ 人/h}, \mu = 4 \text{ 人/h}, \delta = \frac{\lambda}{\mu} = 0.9409, \rho = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{3.7634}{2 \times 4} = 0.4704$$

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^s \frac{\delta^k}{k!} + \frac{S^s \rho (\rho^s - \rho^r)}{s!(1-\rho)} \right]^{-1}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{0.9409}{1} + \frac{0.9409^2}{2!} + \frac{2^2 \times 0.4704(0.4704^2 - 0.4704)}{2!(1-0.4704)}} = 0.3603$$

$$P_7 = \frac{s^s \rho^7}{s!} P_0 = \frac{2^2 \times \rho^7}{2!} \times 0.3603 = 0.0037 = 0.37\%$$

∴ 潜在顾客的损失率为0.37%

$$L_q = \frac{\rho \sigma^2}{2!(1-\rho^2)} \{1 - \rho^5 [1 + 5(1-\rho)]\} P_0$$

$$= \frac{0.4704 \times 0.9409^2}{2!(1-0.4704)^2} \{1 - 0.4704^5 [1 + 5(1-0.4704)]\} 0.3603$$

$$= 0.2454 \text{ (人)}$$

$$L = L_q + \sigma (1 - P_r)$$

$$= 0.2454 + 0.9409 (1 - 0.0037)$$

$$= 1.1828 \text{ (人)}$$

$$W=L/\lambda_e=L/\lambda(1-P_r)=1.1828/3.7634(1-0.0037)=0.3155(\text{小时})$$

∴平均逗留时间为 0.3155 小时。

10. M/M/1/6/6

$$\text{解: } \lambda = 1 \text{ 次/小时}, \quad \mu = 6 \text{ 次/小时}, \quad \sigma = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{6} = 0.1667, \quad \rho = \frac{\rho\lambda}{\mu} = \frac{6 \times 1}{6} = 1$$

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^m \frac{m!}{(m-k)!} \sigma^k \right]^{-1}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{6!}{5!} \times 0.1667 + \frac{6!}{4!} \times 0.1667^2 + \frac{6!}{3!} \times 0.1667^3 + \frac{6!}{2!} \times 0.1667^4 + \frac{6!}{1!} \times 0.1667^5 + \frac{6!}{1!} \times 0.1667^6}$$

$$= \frac{1}{1 + 1.0002 + 0.8337 + 0.5559 + 0.2780 + 0.0927 + 0.0155}$$

$$= 0.2468$$

∴ $P\{n \geq 1\} = 1 - P_0 = 1 - 0.2468 = 0.7532$, 即工人忙期的概率为 0.7532。

$$L = m - \frac{\mu}{\lambda}(1 - P_0) = 6 - \frac{6}{1}(1 - 0.2468) = 1.5888 \text{ (次)}$$

$$L_q = L - (1 - P_0) = 1.5888 - 0.7532 = 0.8356 \text{ (次)}$$

$$\lambda_e = \mu(1 - P_0) = 6 \times 0.7532 = 4.4112$$

$$W = \frac{L}{\lambda_e} = \frac{1.5888}{4.4112} = 0.3602 \text{ (小时)}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_e} = \frac{0.8356}{4.4112} = 0.1935 \text{ (小时)}$$

11. (1) M/M/2/5/5

$$\lambda = 1 \text{ 次/小时}, \quad \mu = 4 \text{ 次/小时}, \quad \sigma = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{4} = 0.25, \quad \rho = \frac{m\lambda}{s\mu} = \frac{5}{2 \times 4} = 0.625,$$

$$r = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{1}{2 \times 4} = 0.125。$$

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^2 \frac{5!}{(5-k)!k!} \sigma^k + \frac{2^2}{2!} \sum_{k=3}^5 \frac{5!}{(5-k)!} r^k \right]^{-1}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{5!}{4!} \times 0.25 + \frac{5!}{3! \times 2!} \times 0.25^2 + 2 \times \frac{5!}{2!} \times 0.125^3 + \frac{2 \times 5!}{1!} \times 0.125^4 + \frac{2 \times 5!}{1!} \times 0.1125^5}$$

$$= \frac{1}{1 + 1.25 + 0.625 + 0.2344 + 0.0586 + 0.0073}$$

$$= 0.3149$$

$$P_1 = \frac{5!}{4!} \sigma P_0 = 5 \times 0.25 \times 0.3149 = 0.3936$$

$$P_2 = \frac{5!}{3! \times 2!} \sigma^2 P_0 = \frac{5!}{3! \times 2!} \times 0.25^2 \times 0.3149 = 0.1969$$

$$P_3 = \frac{5! \times 2^2}{2! \times 2!} r^3 P_0 = \frac{5! \times 2^2}{2! \times 2!} \times 0.125^2 \times 0.3149 = 0.0738$$

$$P_4 = \frac{5! \times 2^2}{1! \times 2!} r^4 P_0 = \frac{5! \times 2^2}{1! \times 2!} \times 0.125^4 \times 0.3149 = 0.0184$$

$$P_5 = \frac{5! \times 2^2}{2! \times 2!} r^5 P_0 = \frac{5! \times 2^2}{2!} \times 0.125^5 \times 0.3149 = 0.0024$$

$$L = \sum_{n=1}^5 n p_n = P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5$$

$$= 0.3936 + 2 \times 0.1969 + 3 \times 0.0738 + 4 \times 0.0184 + 5 \times 0.0024$$

$$= 1.0944 (\text{次})$$

$$L_q = \sum_{n=1}^3 n p_{n+2} = P_3 + 2P_4 + 3P_5$$

$$= 0.0738 + 2 \times 0.0184 + 3 \times 0.0024$$

$$= 0.1178 (\text{次})$$

$$\lambda_e = \lambda (m - L) = 1 \times (5 - 1.0944) = 3.9056$$

$$W = L / \lambda_e = 1.0944 / 3.9056 = 0.2802 (\text{小时})$$

$$W_q = L_q / \lambda_e = 0.1178 / 3.9056 = 0.0302 (\text{小时})$$

$$\xi = L / m = 1.0944 / 5 = 0.2189$$

$$\eta = 1 - \xi = 1 - 0.2189 = 0.7811$$

∴机床利用率为 78.11%。

(2) M/M/1/2/2

$\lambda = 1$ 次/小时, $\mu = 4$ 次/小时, $\sigma = \lambda / \mu = 0.25$, $\rho = 2\lambda / \mu = 0.5$

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^m \frac{m!}{(m-k)!} \sigma^k \right]^{-1}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{2!}{1!} \times 0.25 + \frac{2!}{1!} \times 0.25^2} = 0.6154$$

$$L = m - \frac{\mu}{\lambda} (1 - P_0) = 2 - \frac{4}{1} (1 - 0.6154) = 0.4616 \text{ (次)}$$

$$L_q = L - (1 - P_0) = 0.4616 - (1 - 0.6154) = 0.077 \text{ (次)}$$

$$\lambda_e = \lambda (m - L) = \mu (1 - P_0) = 4 (1 - 0.6154) = 1.5384$$

$$W = L / \lambda_e = 0.4616 / 1.5384 = 0.3001 \text{ (小时)}$$

$$W_q = L_q / \lambda_e = 0.077 / 1.5384 = 0.0501 \text{ (小时)}$$

$$\xi = L / m = 0.4616 / 2 = 0.2308$$

$$\eta = 1 - \xi = 1 - 0.2308 = 0.7692 \quad \therefore \text{机床利用率为 } 76.92\%$$

12. M/M/4/4

$$\lambda = 1.5 \text{ 架/分钟}, \mu = 0.5 \text{ 架/分钟}, \sigma = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1.5}{0.5} = 3, \quad \rho = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{1.5}{4 \times 0.5} = 0.75$$

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^s \frac{\sigma^k}{k!} \right]^{-1}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{3!}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!}}$$

$$= \frac{1}{1 + 3 + 4.5 + 4.5 + 3.375}$$

$$= 0.061$$

$$P_4 = \frac{\sigma^4}{4!} P_0 = \frac{3^4}{4!} \times 0.061 = 0.206$$

∴ 窜入我方目标而未受瞄准的概率是 0.206。

13. M/G/1

$\mu = 0.1$ 次/分钟

∵ $\eta = 80\%$ ∴ $P_0 = 1 - \eta = 0.2$

∴ $\rho = 1 - P_0 = 1 - 0.2 = 0.8$ $\lambda = \rho \mu = 0.8 \times 0.1 = 0.08$ 即平均需求率。

$$L_q = \frac{\rho^2 + \lambda^2 \sigma^2}{2(1 - \rho)} = \frac{0.8^2 + 0.8^2 \times 8}{2(1 - 0.8)} = 1.728 \text{ (分钟)}$$

14. M/M/1

$\lambda = 30$ 架/小时, $\mu = 40$ 架/小时, $\rho = \lambda / \mu = 0.75$

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{30}{40(40 - 30)} = 0.075 \text{ (小时)}$$

4 小时的费用: $4\lambda \times 500 W_q = 4 \times 30 \times 500 \times 0.075 = 4500$ (元)

15. (1) M/D/1

$$\lambda = 6 \text{ 辆/小时}, \mu = 2x \text{ 辆/小时}, \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{6}{2x} = \frac{3}{x}$$

$$\begin{aligned} \text{总费用 } F(x) &= \frac{1}{8}(20 + 4x) + 15L(x) \\ &= 2.5 + 0.5x + 15L(x) \end{aligned}$$

设 $G(x) = 0.5x + 15L(x)$

$$\text{因为 } \begin{cases} G(x^*) \leq G(x^* - 1) \\ G(x^*) \leq G(x^* + 1) \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} 0.5x^* + 15L(x^*) \leq 0.5(x^* - 1) + 15L(x^* - 1) \\ 0.5x^* + 15L(x^*) \leq 0.5(x^* + 1) + 15L(x^* + 1) \end{cases}$$

所以 $L(x^*) - L(x^*+1) \leq 0.5/15 \leq L(x^*-1) - L(x^*)$

令 $\theta = 0.5/15 = 0.03$

$$L_q(x) = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\frac{9}{x^2}}{2(1-\frac{3}{x})} = \frac{9}{2x(x-3)}$$

$$L(x) = L_q + \rho = \frac{9}{2x(x-3)} + \frac{3}{x} = \frac{6x-9}{2x(x-3)}$$

x	4	5	6	7	8	9	10	11	12
L(x)	1.875	1.05	0.75	0.59	0.49	0.42	0.36	0.32	0.29
L(x) - L(x+1)	0.825	0.3	0.16	0.1	0.07	0.06	0.04	0.03	
$\theta = 0.03$									

所以 $x^*=11$ ，即配备 11 个工人比较经济合理。

(2) M/M/1

$$\lambda = 6 \text{ 辆/小时}, \mu = 2x \text{ 辆/小时}, \rho = \frac{3}{x}$$

$$\text{总费用 } F(x) = \frac{1}{8} (20+4x) + 15L(x)$$

$$= 2.5 + 0.5x + 15L(x)$$

$$\text{令 } G(x) = 0.5x + 15L(x)$$

由前面可知 $L(x^*) - L(x^*+1) \leq 0.5/15 \leq L(x^*-1) - L(x^*)$

$$L(x) = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{6}{2x - 6} = \frac{3}{x - 3}$$

x	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
L(x)	3	1.5	1	0.75	0.6	0.5	0.43	0.38	0.33	0.3
L(x) - L(x+1)	1.5	0.5	0.25	0.15	0.1	0.07	0.05	0.05	0.03	
$\theta = 0.03$										

所以 $x^*=12$ ，即配备 12 个工人比较经济合理。

$$16. \lambda = 48 \text{ 次/天}, \mu = 25 \text{ 次/天}, \sigma = \lambda / \mu = 48/25 = 1.92, F(S) = 4S + 6L(S)$$

$$L(S^*) - L(S^* + 1) \leq 4/6 \leq L(S^* - 1) - L(S^*)$$

$$\text{当 } S=2 \text{ 时, } \rho = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{48}{25} = 0.96$$

$$\begin{aligned} P_0 &= \left[\sum_{k=0}^{s-1} \frac{\delta^k}{k!} + \frac{\delta^s}{s!(1-\rho)} \right]^{-1} \\ &= \frac{1}{1 + 1.92 + \frac{1.92^2}{2!(1-0.96)}} \\ &= \frac{1}{1 + 1.92 + 46.08} \\ &= 0.02 \end{aligned}$$

$$L_q = \frac{\sigma^s \rho}{s!(1-\rho)^2} P_0 = \frac{1.92^2 \times 0.96 \times 0.02}{2!(1-0.96)} = \frac{0.071}{0.0032} = 22.188$$

$$L = L_q + \sigma = 22.188 + 1.92 = 24.108$$

$$S=3 \text{ 时, } \rho = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{48}{3 \times 25} = 0.64$$

$$\begin{aligned} P_0 &= \left[\sum_{k=0}^{s-1} \frac{\sigma^k}{k!} + \frac{\sigma^s}{s!(1-\rho)} \right]^{-1} \\ &= \frac{1}{1 + 1.92 + \frac{1.92^2}{2} + \frac{1.92^3}{3!(1-0.64)}} \\ &= \frac{1}{1 + 1.92 + 1.8432 + 3.2768} \\ &= 0.124 \end{aligned}$$

$$L_q = \frac{\sigma^s}{s!(1-\rho)^2} P_0 = \frac{1.92^3 \times 0.64}{3!(1-0.64)^2} \times 0.124 = 0.722$$

$$L = L_q + \sigma = 0.722 + 1.92 = 2.642$$

$$\text{当 } s=4 \text{ 时, } \rho = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{48}{4 \times 25} = 0.48$$

$$\begin{aligned}
 P_0 &= \left[\sum_{k=0}^{s-1} \frac{\sigma^k}{k!} + \frac{\sigma^s}{s!(1-\rho)} \right]^{-1} \\
 &= \frac{1}{1 + 1.92 + \frac{1.92^2}{2} + \frac{1.92^3}{3!} + \frac{1.92^3}{4!(1-0.48)}} \\
 &= \frac{1}{1 + 1.92 + 1.8432 + 1.18 + 1.089} \\
 &= 0.142
 \end{aligned}$$

$$Lq = \frac{\sigma^s}{s!(1-\rho)^2} P_0 = \frac{1.92^4 \times 0.48}{4!(1-0.48)^2} \times 0.142 = 0.143^2$$

$$L = L_q + \sigma = 0.143 + 1.92 = 2.063$$

$$\text{因为, } L(S=2) - L(S=3) = 24.108 - 2.642 = 21.466$$

$$L(S=3) - L(S=4) = 2.642 - 2.063 = 0.579$$

$$\text{所以, } L(S=3) - L(S=4) \leq 4/6 = 0.667 \leq L(S=2) - L(S=3)$$

所以, $S^*=3$, 即应设置 3 个检验员才能使总费用的期望值最小。

18. 不购买该种新设备时造成的损失:

$$\lambda = 6 \text{ 台/小时, } \mu = 8.57 \text{ 台/小时, } \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{6}{8.57} = 0.70$$

M/M/1 系统

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{6}{8.57 - 6} = 2.33 \text{ (台)}$$

所以, 造成的损失为: $2.33 \times 5 \times 60 = 699$ (元/小时)

购买该种新设备所生产的总费用:

$$\lambda = 6 \text{ 台/小时, } \mu' = 12 \text{ 台/小时, } \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{6}{12} = 0.5, L' = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{6}{12 - 6} = 1 \text{ (台)}$$

造成的损失: $1 \times 5 \times 60 = 300$ (元/小时)

造成的费用: $10 \times 60 = 600$ (元/小时)

所以总费用：300+600=900（元/小时）>699（元/小时）

所以，不购买这种新设备。

19. M/M/S

$$\lambda = 50 \text{ 人/小时}, \mu = 30 \text{ 人/小时}, \sigma = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{50}{30} = 1.667$$

$$\text{当 } S=2 \text{ 时, } \rho = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{50}{2 \times 30} = 0.833$$

$$\begin{aligned} P_0 &= \left[\sum_{k=0}^{s-1} \frac{\sigma^k}{k!} + \frac{\sigma^s}{s!(1-\rho)} \right]^{-1} \\ &= \frac{1}{1 + 1.667 + \frac{1.667^2}{2(1-0.833)}} \\ &= \frac{1}{1 + 1.667 + 8.32} \\ &= 0.091 \end{aligned}$$

$$Lq = \frac{\sigma^s \rho}{s!(1-\rho)^2} P_0 = \frac{1.667^2 \times 0.833}{2!(1-0.833)^2} \times 0.091 = 3.777$$

$$W_q = \frac{Lq}{\lambda} = \frac{3.777}{50} = 0.0755 \text{ (小时)} = 4.53 \text{ (分)} < 5 \text{ 分}$$

所以，需要 2 名管理员。

20. M/M/S/4/4

$$\lambda = 2 \text{ 台/小时}, \mu = 1 \text{ 台/小时}, \sigma = \frac{\lambda}{\mu} = 2, F(S) = 0.4S + 1.2L(S)$$

$$L(S^*) - L(S^* + 1) \leq \frac{0.4}{1.2} = 0.33 \leq L(S^* - 1) - L(S^*)$$

当 S=1 时

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^m \frac{m!}{(m-k)!} \sigma^k \right]^{-1}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{4!}{3!}2 + \frac{4!}{2!}2^2 + \frac{4!}{1!}2^3 + \frac{4!}{1}2^4}$$

$$= \frac{1}{1 + 8 + 48 + 192 + 384}$$

$$= 0.0016$$

$$L = m - \frac{\mu}{\lambda} (1 - P_0) = 4 - \frac{1}{2} (1 - 0.0016) = 3.5008$$

$$\text{当 } S=2 \text{ 时, } r = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{2}{2 \times 1} = 1$$

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^s \frac{m!}{k!(m-k)!} \sigma^k + \frac{s^s}{s!} \sum_{k=s+1}^m \frac{m!}{(m-k)!} r^k \right]^{-1}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{4!}{3!}2 + \frac{4!}{2! \times 2!}2^2 + \frac{2^2}{2!} \left(\frac{4!}{1!} + \frac{4!}{1} \right)}$$

$$= \frac{1}{1 + 8 + 48 + 2(24 + 24)}$$

$$= 0.0078$$

$$P_1 = 0.0624, P_2 = 0.1872, P_3 = 0.3744, P_4 = 0.3744$$

$$L = \sum_{n=1}^4 n p_n = 0.0624 + 2 \times 0.1872 + 3 \times 0.3744 + 4 \times 0.3744 = 3.0576$$

$$\text{当 } S=3 \text{ 时, } r = \frac{2}{3} = 0.667$$

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^s \frac{m!}{k!(m-k)!} \sigma^k + \frac{s^s}{s!} \sum_{k=s+1}^m \frac{m!}{(m-k)!} r^k \right]^{-1}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{4!}{3!}2 + \frac{4!}{2! \times 2!}2^2 + \frac{4!}{1! \times 3!}2^3 + \frac{3^3 \times 4! \times 0.667^4}{3! \times 1}}$$

$$= \frac{1}{1 + 8 + 24 + 32 + 21.376}$$

$$= 0.0116$$

$$P_1 = 0.0928, P_2 = 0.2784, P_3 = 0.3712, P_4 = 0.2480$$

$$L = \sum_{n=1}^4 np_n = 0.0928 + 2 \times 0.2784 + 3 \times 0.3712 + 4 \times 0.2480 = 2.7552$$

$$L(S=1) - L(S=2) = 3.5008 - 3.0576 = 0.4432$$

$$L(S=2) - L(S=3) = 3.0576 - 2.7552 = 0.3024$$

$$\text{所以, } L(S=2) - L(S=3) \leq 0.33 \leq L(S=1) - L(S=2)$$

所以, $S^*=2$, 即应由 2 个工人看管, 才能使总费用最小。

5. M/M/2

$W_0=10$ 分钟, $\mu=0.5$ 架/分钟

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{s-1} \frac{\sigma^k}{k!} + \frac{\sigma^s}{s!(1-\rho)} \right]^{-1}$$

$$= \frac{1}{1 + \sigma + \frac{\sigma^2}{2(1-\rho)}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2(1-\frac{\lambda}{2\mu})}}$$

$$Lq = \frac{\sigma^2 \rho}{2!(1-\rho)^2} P_0$$

$$= \frac{\frac{\lambda^3}{2\mu^3}}{2!(1-\frac{\lambda}{2\mu})^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2(1-\frac{\lambda}{2\mu})}}$$

$$= \frac{\lambda^3}{\mu(4\mu^2 - \lambda^2)}$$

$$W_q = \frac{Lq}{\lambda} = \frac{\lambda^2}{\mu(4\mu^2 - \lambda^2)} = 10 \longrightarrow \lambda = 0.91$$

$$L_q = W_q \lambda = 10 \times 0.91 = 9.1$$

$$L = L_q + \sigma = 9.1 + \frac{0.91}{0.5} = 10.92 \approx 11 \text{ (架)}$$

即该机场最多能接受 11 架飞机降落。

第七章 决策分析

1. (1) 乐观准则

损 益 方 案	自然 状态 值	旺 季	淡 季	$\text{Max}(k_i, \theta_j)$
		$P_1=0.8$	$P_2=0.2$	θ
甲产品		5	3	5
乙产品		8	2	8*

选择乙产品。

(2) 悲观准则

损 益 方 案	自然 状态 值	旺 季	淡 季	$\text{Min}(k_i, \theta_j)$
		$P_1=0.8$	$P_2=0.2$	θ
甲产品		5	3	3*
乙产品		8	2	2

选择甲产品。

(3) 后悔值原则

后悔矩阵

甲产品	3	0
乙产品	0	1*

选择乙产品。

(4) 等可能准则

损 益 方 案	自然 状态 值	自然状态		$E(k_i)$
		旺 季	淡 季	
甲产品		5	3	4
乙产品		8	2	5*

选择乙产品。

2. 期望值准则

损 益 方 案	自然 状态 值	自然状态		CV_i
		旺 季 $P_1=0.8$	淡 季 $P_2=0.2$	
甲产品		5	3	4.6
乙产品		8	2	6.8*

选择乙产品。

转折概率设为 P ，则： $8P + 2(1-P) \rightarrow P=0.2$

∴当 $P > 0.25$ 时，乙产品是最优方案；当 $P < 0.25$ 时，乙产品是最优方案。

3. 后悔矩阵

开采	0*	0
不开采	6	1

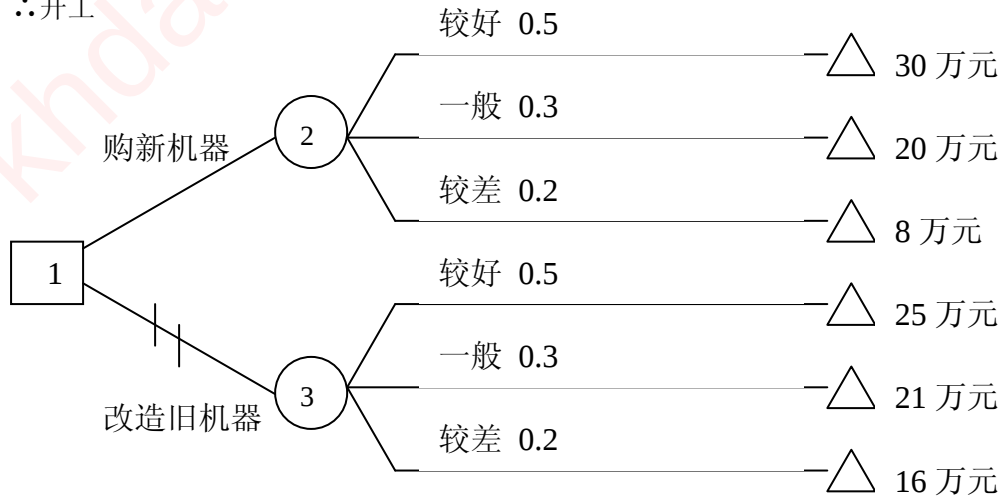
∴开采

4.

损 益 方 案	自然 状态 值	自然状态	
		天气好	天气不好
		82	

	CV_i		
	$P_1=0.6$	$P_2=0.4$	
开工	8	-10	0.8^*
不开工	-1	-1	-1

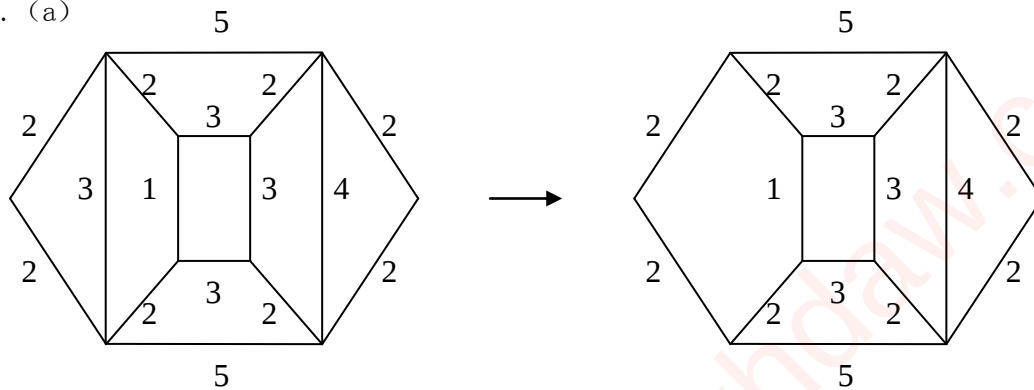
∴开工

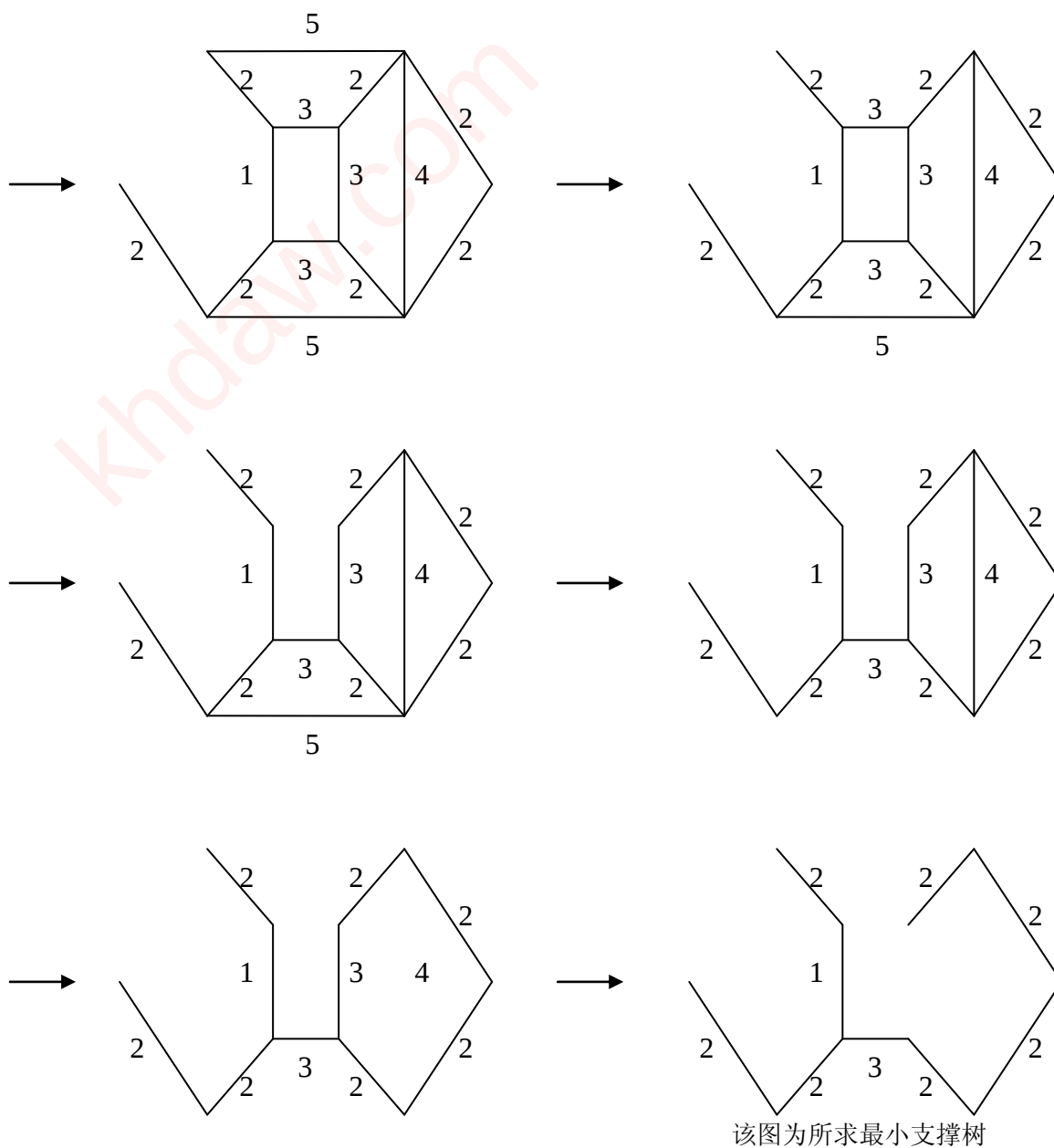


由决策树可知，应选择购置新机器。

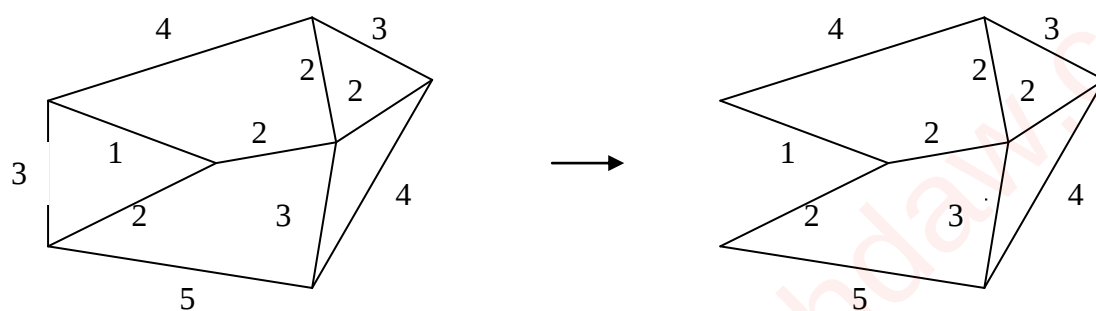
第八章 图与网络分析

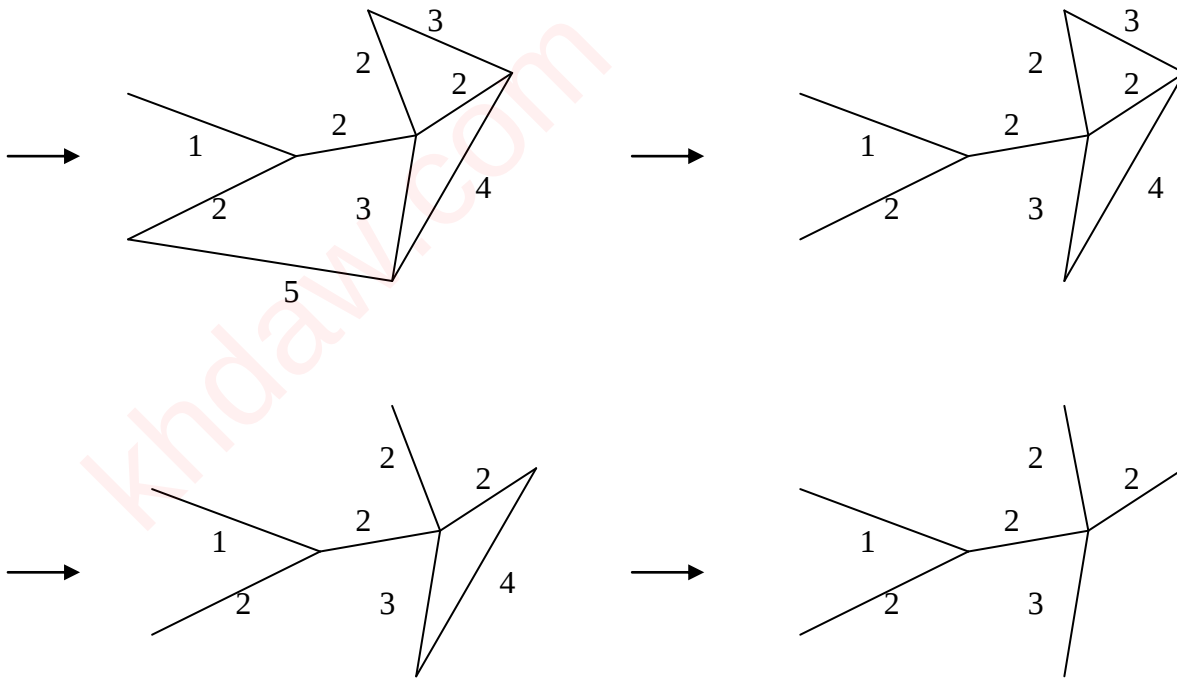
1. (a)





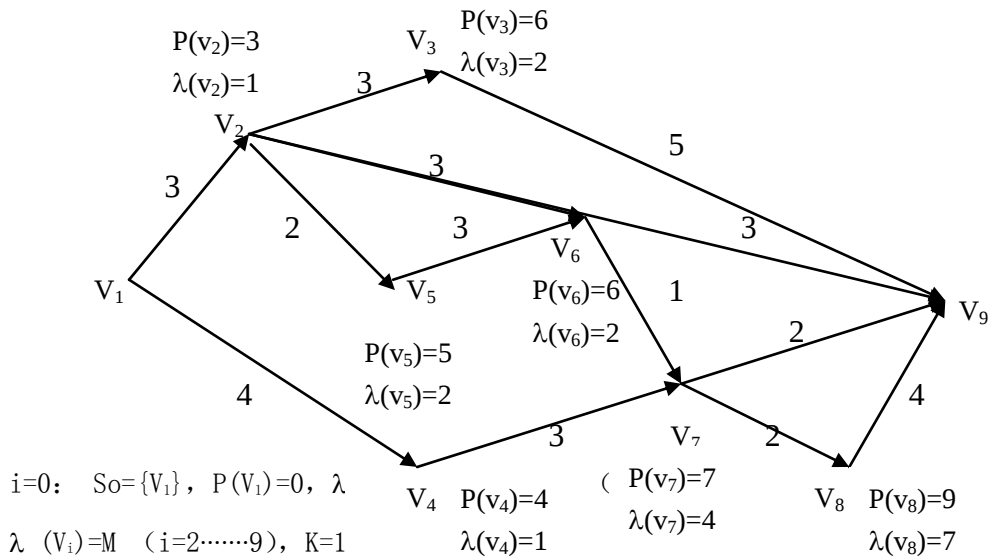
(b)





该图为所求最小支撑树

2.



$i=0$: $S_0=\{V_1\}$, $P(V_1)=0$, $\lambda(V_1)=M$ ($i=2, \dots, 9$), $K=1$

(2) 因为 $(V_1, V_2) \in A$, $V_2 \in S_0$; $P(V_1) + W(V_{12}) < T(V_2)$, 故将 $T(V_2)$ 变为 $P(V_1) + W_{12}=3$, $\lambda(V_2)$ 改变为 1。同理将 $T(V_4)$ 改变为 $P(V_1) + W_{14}=4$, $\lambda(V_4)=1$ 。
 此时: $T(V_2)=3$, $\lambda(V_2)=1$; $T(V_4)=4$, $\lambda(V_4)=1$ 。

(3) 所有 T 标号中 $T(V_2)=3$ 最小, 于是令 $P(V_2)=3$ 。

$$S_1 = S_0 \cup \{V_2\} = \{V_1, V_2\} \quad k=2$$

$i=1$: (2) $\because T(V_3) > P(V_2) + W_{23}$, $\therefore T(V_3)=6$, $\lambda(V_3)=2$;

$\because T(V_6) > P(V_2) + W_{26}$, $\therefore T(V_6)=6$, $\lambda(V_6)=2$;

$\therefore T(V_5) > P(V_2) + W_{25}, \therefore T(V_5) = 5, \lambda(V_5) = 2;$

(3) 所有 T 标号中 $T(V_4) = 4$ 最小, $\therefore P(V_2) = 4, \lambda(V_4) = 1$

$S_2 = S_1 \cup \{V_4\} = \{V_1, V_2, V_4\} \quad k=4$

i=2: (2) $\therefore T(V_7) > P(V_2) + W_{27}, \therefore T(V_7) = 7, \lambda(V_7) = 4;$

(3) 所有 T 标号中 $T(V_5) = 5$ 最小, $\therefore P(V_5) = 5, \lambda(V_5) = 2$

$S_3 = S_2 \cup \{V_5\} = \{V_1, V_2, V_4, V_5\} \quad k=5$

i=3: (2) $\therefore$ 从 V_5 出发没有弧指向不属于 S_3 的点

$\therefore$ 所有 T 标号中 $T(V_6) = 6$ 最小, 令 $P(V_6) = 6, \lambda(V_6) = 2 \quad k=6$

$S_4 = \{V_1, V_2, V_4, V_5, V_6\}$

i=4: (2) $\therefore T(V_9) > P(V_6) + W_{69}, \therefore P(V_9) = 9, \lambda(V_9) = 6$

(3) 所有 T 标号中 $T(V_3) = 6$ 最小, 令 $P(V_3) = 6, \lambda(V_3) = 2 \quad k=3$

$S_5 = \{V_5\} = \{V_1, V_2, V_4, V_5, V_6, V_3\}$

i=5: (2) $\therefore T(V_9) < P(V_3) + W_{39}, \therefore T(V_9) = 9, \lambda(V_9) = 6$

(3) 所有 T 标号中 $T(V_7) = 7$ 最小, $\therefore P(V_7) = 7, \lambda(V_7) = 4 \quad k=7$

$S_6 = \{V_1, V_2, V_4, V_5, V_6, V_3, V_7\}$

i=6: (2) $T(V_9) = P(V_7) + W_{79}, \therefore T(V_9) = 9, \lambda(V_9) = 6, 7;$

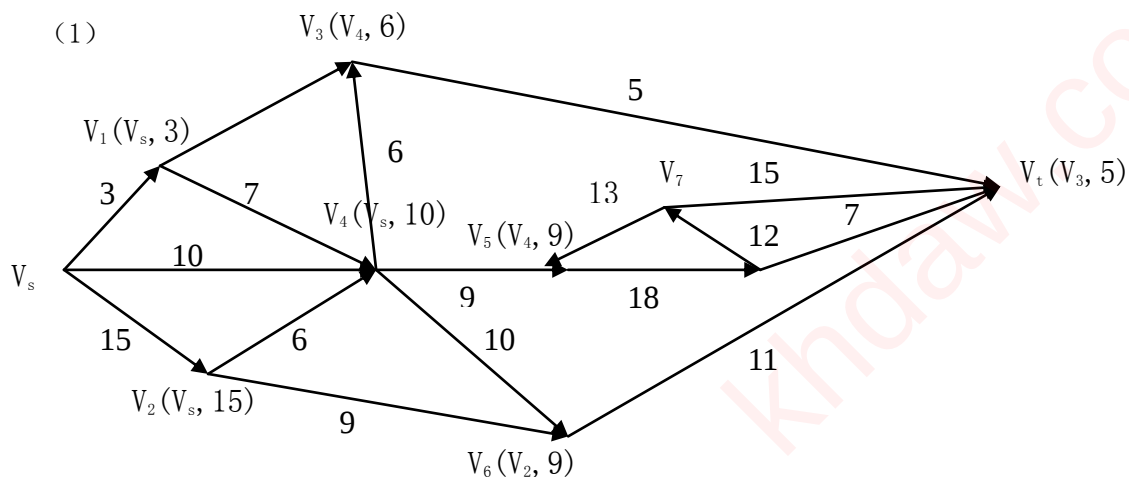
$T(V_8) > P(V_7) + W_{78}, \therefore T(V_8) = 9, \lambda(V_8) = 7;$

(3) 所有 T 标号中 $T(V_8) = 9$ 最小, 令 $P(V_8) = 9, \lambda(V_8) = 7 \quad k=8$

$S_7 = \{V_1, V_2, V_4, V_5, V_6, V_3, V_7, V_8\}$

i=7: (2) $T(V_9) < P(V_8) + W_{89}, \therefore T(V_9) = 9, \lambda(V_9) = 6, 9;$ 这时仅有 T 标号的点为 V_9 。 $P(V_9) = 9$, 结束。

$\therefore$ 最短路为: $V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow V_6 \rightarrow V_9; V_1 \rightarrow V_4 \rightarrow V_7 \rightarrow V_9;$



①首先给 V_s 标号: $(0, +\infty)$

②看 V_s : 在弧 (V_s, V_1) 上, $f_{s1}=0 < C_{s1}=3$, 故给 V_1 标号 $(V_s, l_{(V_1)})$, 其中 $l_{(V_1)} = \min [l_{(V_s)}, (C_{s1}-f_{s1})] = 3$ 即 $(V_s, 3)$

同理, 给 V_2 标号 $(V_s, 15)$; 给 V_4 标号 $(V_s, 10)$ 。

③看 V_1 : 在弧 (V_1, V_3) 上, $f_{13}=0$ 不具备条件。

④看 V_2 : 在弧 (V_2, V_6) 上, $f_{26}=0 < C_{26}=9$, 故给 V_6 标号 $(V_2, l_{(V_6)})$ 其中 $l_{(V_6)} = \min [l_{(V_2)}, (C_{26}-f_{26})] = 9$ 即 $(V_2, 9)$

⑤看 V_4 : 在弧 (V_4, V_3) 上, $f_{43}=0 < C_{43}=6$, 故给 V_3 标号 $(V_4, l_{(V_3)})$ 其中 $l_{(V_3)} = \min [l_{(V_4)}, (C_{43}-f_{43})] = 6$ 即 $(V_4, 6)$, 同理在弧 (V_4, V_5) 上给 V_5 标号 $(V_4, 9)$ 。

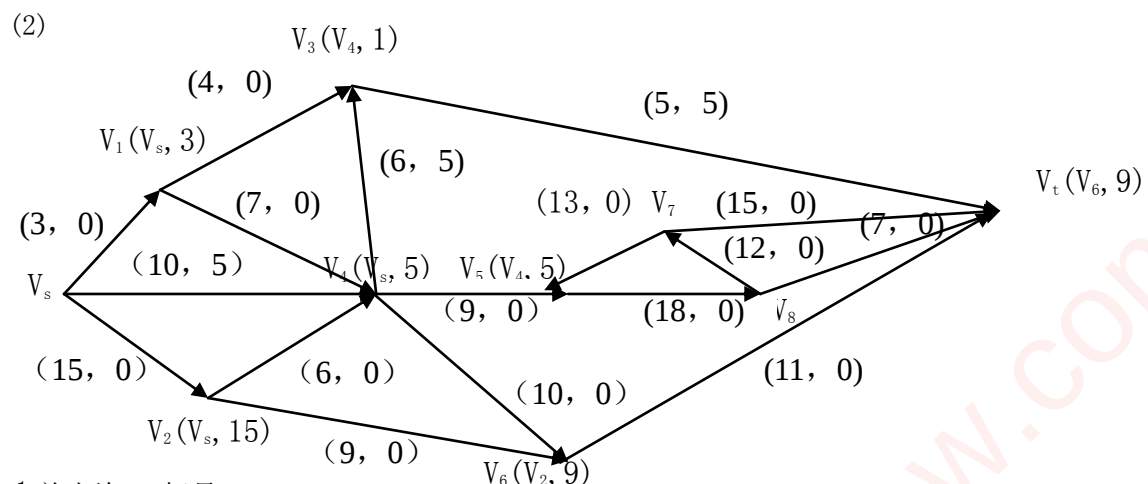
⑥看 V_3 : 在弧 (V_3, V_t) 上, $f_{3t}=0 < C_{3t}=5$, 故给 V_t 标号 $(V_3, l_{(V_t)})$ 其中 $l_{(V_t)} = \min [l_{(V_3)}, (C_{3t}-f_{3t})] = 5$ 即 $(V_3, 5)$

$\because V_t$ 已被标上号, 故存在另一条增广链: $\{V_s, V_4, V_3, V_t\}$

取调整量 $\Phi = l_{(V_t)} = 5$

$$\text{令 } f'_{ij} = \begin{cases} f_{ij} + \Phi & \text{当 } (V_i, V_j) \in \mu^+ \\ f_{ij} - \Phi & \text{当 } (V_i, V_j) \in \mu^- \\ \text{其他不变} \end{cases}$$

故得到: $f'_{s4}=5, f'_{43}=5, f'_{3t}=5$, 其他的为 0。



①首先给 V_s 标号: $(0, +\infty)$

②看 V_s : 在弧 (V_s, V_1) 上, $f_{s1}=0 < C_{s1}=3$, 故给 V_1 标号 $(V_s, l_{(V_1)})$, 其中 $l_{(V_1)} = \min [l_{(V_s)}, (C_{s1}-f_{s1})] = 3$ 即 $(V_s, 3)$

同理, 给 V_2 标号 $(V_s, 15)$; 给 V_4 标号 $(V_s, 5)$ 。

③看 V_1 : 在弧 (V_3, V_1) 上, $f_{31}=0$ 不具备条件。

④看 V_2 : 给 V_6 标号 $(V_2, 9)$

⑤看 V_4 : 给 V_6 标号 $(V_4, 1)$; 给 V_5 标号 $(V_4, 5)$

⑥看 V_6 : 给 V_t 标号 $(V_6, 9)$

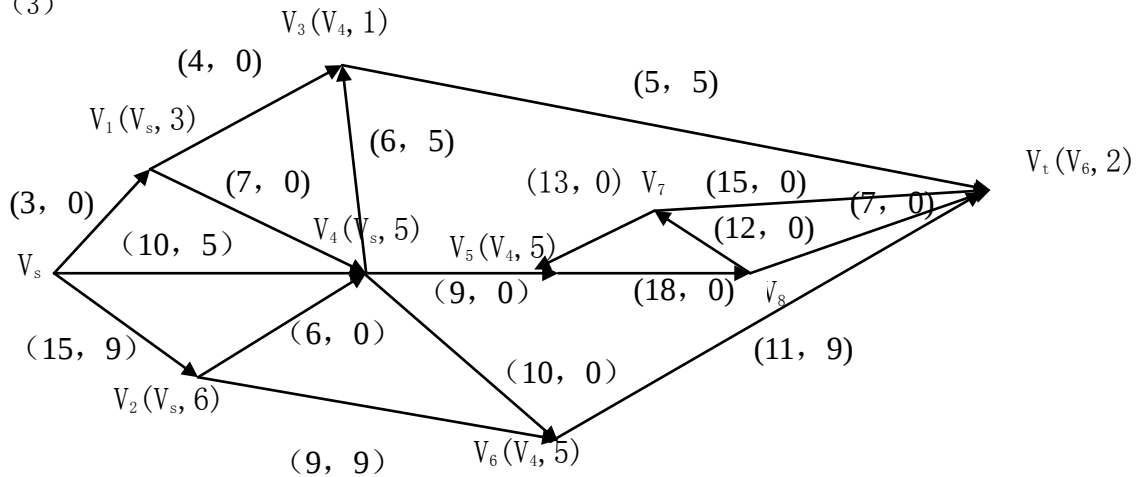
$\because V_t$ 已被标上号, 故存在另一条增广链: $\{V_s, V_2, V_6, V_t\}$

取调整量 $\Phi = l_{(V_t)} = 9$

$$\text{令 } f'_{ij} = \begin{cases} f_{ij} + \Phi & \text{当 } (V_i, V_j) \in \mu^+ \\ f_{ij} - \Phi & \text{当 } (V_i, V_j) \in \mu^- \\ \text{其他不变} \end{cases}$$

故得到: $f'_{s2}=9, f'_{26}=9, f'_{6t}=9$, 其他不变。

(3)



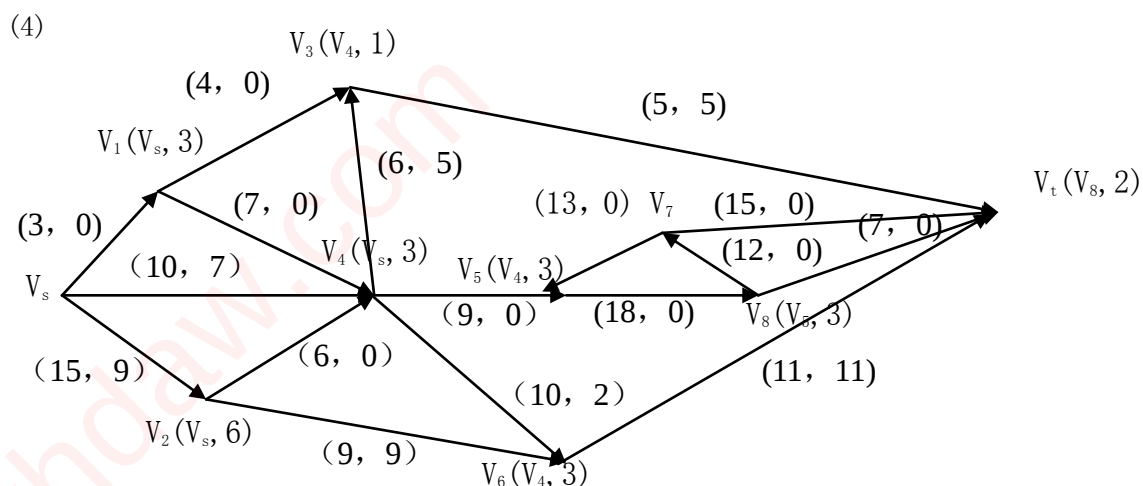
按上述方法给 (3) 标号。

$\because V_t$ 已被标上号, 故存在另一条增广链: $\{V_s, V_4, V_6, V_t\}$

取调整量 $\Phi = l_{(V_t)} = 2$

$$\text{令 } f^{(3)}_{ij} = \begin{cases} f_{ij} + \Phi & \text{当 } (V_i, V_j) \in \mu^+ \\ f_{ij} - \Phi & \text{当 } (V_i, V_j) \in \mu^- \\ \text{其他不变} \end{cases}$$

故得到: $f^{(3)}_{s4}=7, f^{(3)}_{46}=2, f^{(3)}_{6t}=11$ 其他不变。

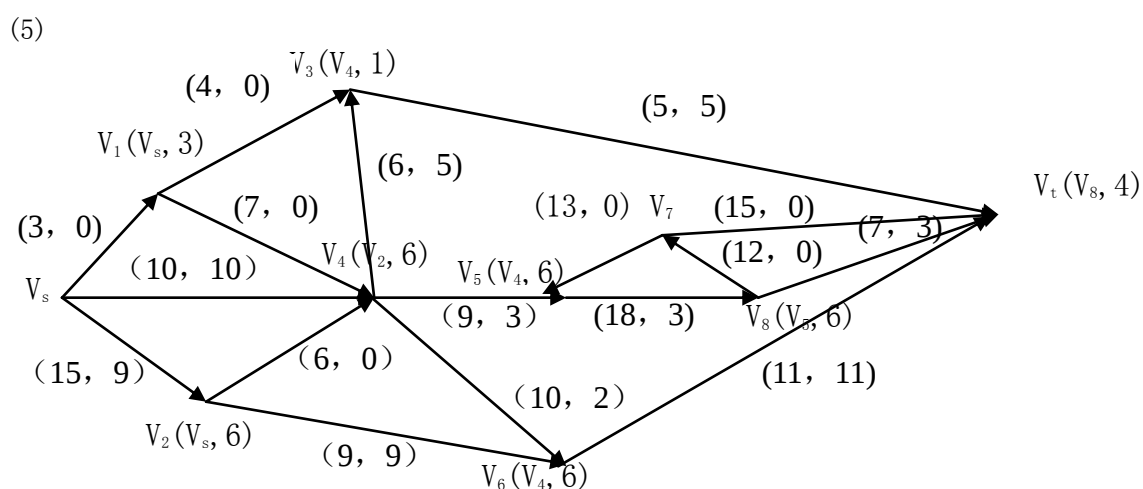


$\because V_t$ 已被标上号, 故存在另一条增广链: $\{V_s, V_4, V_5, V_8, V_t\}$

取调整量 $\Phi = l_{(V_t)} = 3$

$$\text{令 } f_{ij}^{(4)} = \begin{cases} f_{ij}^{(3)} + \Phi & \text{当 } (V_i, V_j) \in \mu^+ \\ f_{ij}^{(3)} - \Phi & \text{当 } (V_i, V_j) \in \mu^- \\ \text{其他不变} \end{cases}$$

故得到: $f_{s4}^{(4)}=10, f_{45}^{(4)}=3, f_{8t}^{(4)}=11$ 其他不变。



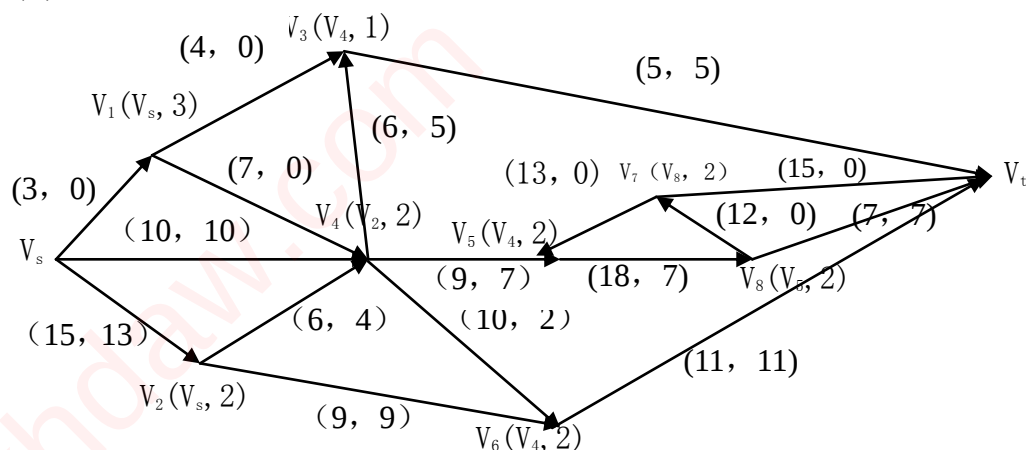
$\because V_t$ 已被标上号, 故存在另一条增广链: $\{V_s, V_2, V_4, V_5, V_8, V_t\}$

取调整量 $\Phi = l_{(V_t)} = 4$

$$\text{令 } f_{ij}^{(5)} = \begin{cases} f_{ij}^{(4)} + \Phi & \text{当 } (V_i, V_j) \in \mu^+ \\ f_{ij}^{(4)} - \Phi & \text{当 } (V_i, V_j) \in \mu^- \\ \text{其他不变} \end{cases}$$

故得到: $f_{s2}^{(5)}=13, f_{24}^{(5)}=4, f_{45}^{(5)}=7, f_{58}^{(5)}=7, f_{8t}^{(5)}=7$ 。

(6)



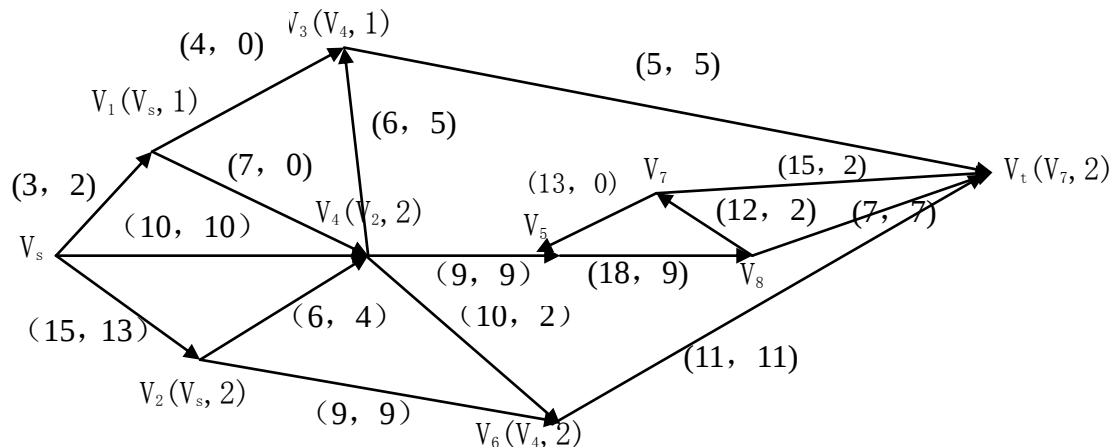
$\because V_t$ 已被标上号, 故存在另一条增广链: $\{V_s, V_1, V_4, V_5, V_8, V_7, V_t\}$

取调整量 $\Phi = l_{(V_t)} = 2$

$$\text{令 } f_{ij}^{(6)} = \begin{cases} f_{ij}^{(5)} + \Phi & \text{当 } (V_i, V_j) \in \mu^+ \\ f_{ij}^{(5)} - \Phi & \text{当 } (V_i, V_j) \in \mu^- \\ \text{其他不变} \end{cases}$$

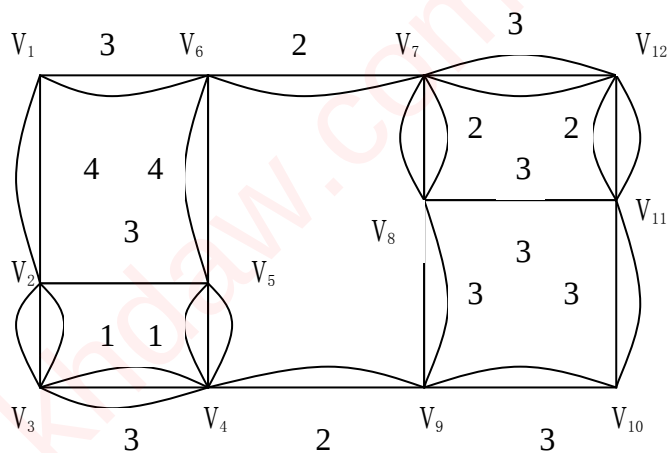
故得到: $f_{s1}^{(6)}=2, f_{14}^{(6)}=2, f_{45}^{(6)}=9, f_{58}^{(6)}=2, f_{7t}^{(6)}=2$ 。

(7)



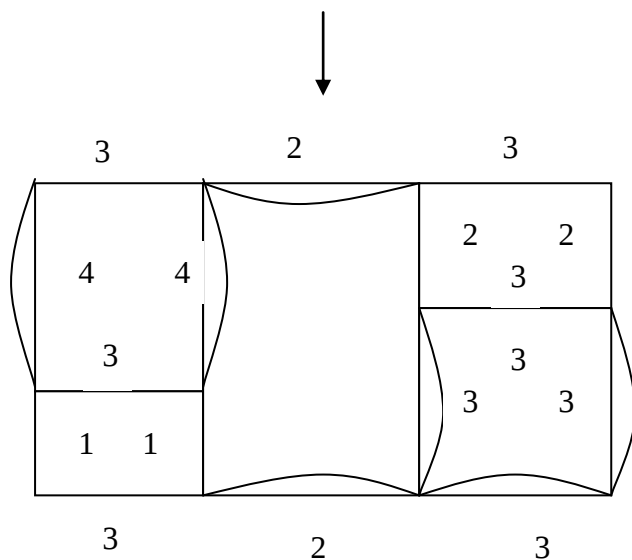
$\because V_t$ 已被标上号, 故得到最优解。最大流为 $2+10+13=25$ 。

3.

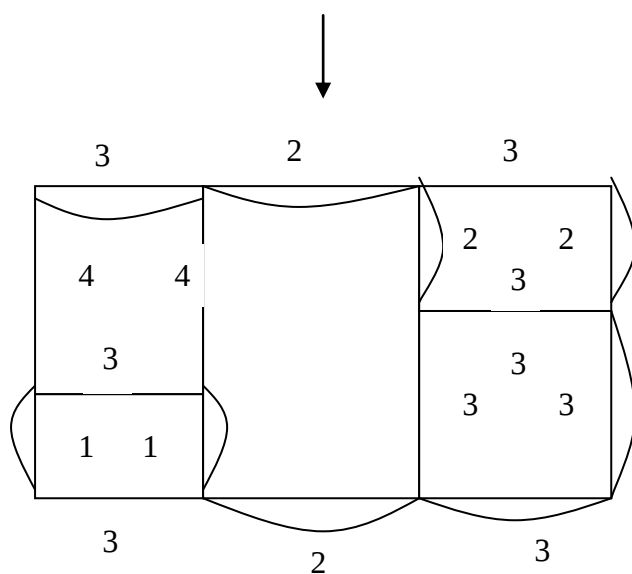


其中, $V_2, V_5, V_4, V_9, V_6, V_7,$
 V_8, V_{11} 为奇点。

令 V_2 与 V_5 一对; V_4 与 V_9 一对;
 V_9 与 V_6 一对; V_8 与 V_{11} 一对, 加
 入重复边。



用制定标准 2 制定图中每一个
 圈的重复边的总权是否小于或
 等于该圈总权的一半。如果大
 于, 则作相应调整。使其重复
 边的总权小于或等于该圈总权
 的一半。



满足制定标准 1、2 故得最优
 解。