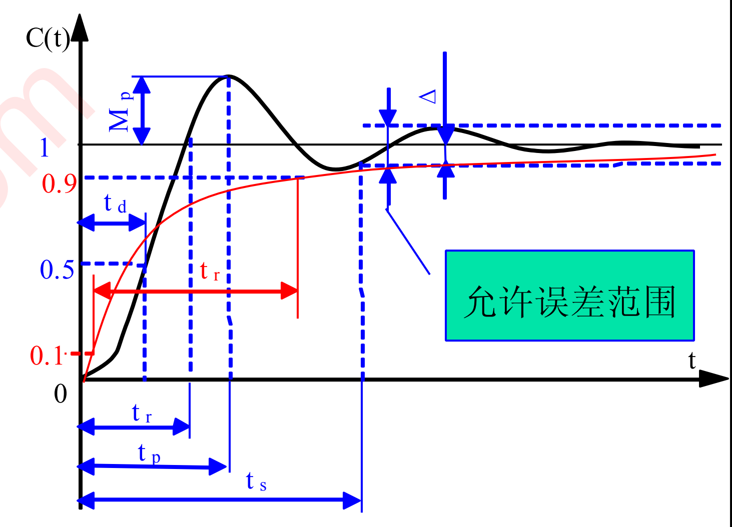
自动控制原理课程教材勘误表（答案来自：www.xyfxw.com）

序号	页码	行数	误	正
1	11	图 2-3b）	B_{eq}	θ_1
2	12	式（2-9）	u_1	u_i
3	14	式（2-19）	p_L	q_L
4	15	式（2-22）	Δp	p_L
5	16	倒 2	$-e^{st}$	$-e^{-st}$
6	18	表 2-1（2）	I（t）	1（t）
7	19	表 2-1（18）	$-\Phi$	$+\Phi$
8	20	倒 2	f(yt)	f(t)
9	21	式（2-37）	$\frac{1}{s^2}f^{(-1)}(0^+)$	$\frac{1}{s^n}f^{(-1)}(0^+)$
10	22	倒 6	$-\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$-\int_t^0 f(\tau)g(t-\tau)d\tau$
11	23	式（2-43）	f(s)	F(s)
12	23	式（2-43）	$\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty}F(s)e^{st}ds$	$\frac{1}{2\pi j}\int_{r-j\infty}^{r+j\infty}F(s)e^{st}ds$
13	24	倒 8	k1=…=1	k1=…=-1
14	25	15	$\frac{0.5(0.578\times0.866)}{(s+0.5)^2+0.866^2}$	$\frac{(0.578\times0.866)}{(s+0.5)^2+0.866^2}$
15	26	倒 6	$\ddot{y}(t)+5\dot{y}(t)+y(t)=6$	$\ddot{y}(t)+5\dot{y}(t)+6y(t)=6$
16	33	表 2-2（6）(7)	相加点前移 相加点后移	比较点前移 比较点后移
17	37	习题 2-1	拉氏交换	拉氏变换
18	37	习题 2-3（3）	$\left.\frac{dx(t)}{dt}\right\|_{t=0}=50$	$x(0)=50$
19	37	习题 2-4	$x_{i,}(0^-)$	$x_i(0^-)$
20	38	习题 2-7	其中，B 为	其中，f 为

21	42	图 3-2		
22	45	12	$T=\frac{B}{K}$	$T=\frac{f}{k}$
23	45	19	e(t)→0	$e^{-t/T}$→0
24	49	倒 9	ω_d 决定	ω_n 决定
25	55	倒 10	$x_0(t)-1$	$x_0(t_p)-1$
26	60	习题 3-3	超调量和 t_s=2s	超调量和允许误差 5%时 t_s=2s
27	60	习题 3-4	M_p=0.85，试确定	M_p=0.85，峰值时间 t_p=0.1s，试确定
28	69	10	∠G(jω)=90°	∠G(jω)=-90°
29	70	8	$\arctan\frac{\varsigma}{\sqrt{1-\varsigma^2}}$	$\arctan\frac{\varsigma}{\sqrt{1-2\varsigma^2}}$
30	71	17	传统函数	传递函数
31	75	13	$\left(-20\lg\sqrt{1}\right)$	$\left(-20\lg 1\right)$
32	76	倒 6	并且当ζ<1 时	并且当ζ<0.707 时
33	80	14	w=logspace(0,3)	w=logspace(-1,3)
34	80	17～21	bode(…,w,'k--')	bode(…,w) 或改为：bode(…,'k--')
35	82	倒 6	零点或极点	零点和极点
36	87	倒 4	｜G(jω) =	｜G(jω)｜ =
37	92	17～18	ζ=0.65，进一步…过渡过程时间 t_s=1.5s	ζ=0.707，进一步…调整时间 t_s=6～8s
38	105	5	1/s λ	$1/s^{\lambda}$
39	112	图 5-15 c)	K_g/dB>0	K_g/dB<0
40	116	表 5-1 ：3，4 行	[zero(sys)]' [pole(sys)]'	[zero(sys)]; [pole(sys)];

41	122	11	$\frac{\Delta C_{ss}}{C_{ss}} \approx \frac{1}{G(0)H(0)} \frac{\Delta G(0)}{G(0)}$..	$\frac{\Delta C_{ss}}{C_{ss}} \approx \frac{1}{1+G(0)H(0)} \frac{\Delta G(0)}{G(0)}$
42	125	5	$K_v = \lim_{s\to 0} s\frac{K_0(T_a+1)......}{s(T_1+1)......}$	$K_v = \lim_{s\to 0} s\frac{K_0(T_a+1)......}{(T_1+1)......}$
43	126	1	$R(s)=\frac{1}{s^2}$	$R(s)=\frac{1}{s^3}$
44	129	6-1	$G(s)=\frac{K}{s(0.3s+1)(0.6+1)}$	$G(s)=\frac{K}{s(0.3s+1)(0.6s+1)}$

注：勘误只进行一至七章，在附录中有许多错误，在此也未一一列出。

控制工程基础习题解答

第一章

1-1．控制论的中心思想是什么？简述其发展过程。

维纳（N.Wiener）在“控制论——关于在动物和机器中控制和通讯的科学”中提出了控制论所具有的信息、反馈与控制三个要素，这就是控制论的中心思想

控制论的发展经历了控制论的起步、经典控制理论发展和成熟、现代控制理论的发展、大系统理论和智能控制理论的发展等阶段。具体表现为：

1. 1765 年瓦特（Jams Watt）发明了蒸汽机，1788 年发明了蒸汽机离心式飞球调速器，
2. 1868 年麦克斯威尔（J.C.Maxwell）发表“论调速器”文章；从理论上加以提高，并首先提出了“反馈控制”的概念；
3. 劳斯（E.J.Routh）等提出了有关线性系统稳定性的判据
4. 20 世纪 30 年代奈奎斯特（H.Nyquist）的稳定性判据，伯德（H.W.Bode）的负反馈放大器；
5. 二次世界大仗期间不断改进的飞机、火炮及雷达等，工业生产自动化程度也得到提高；
6. 1948 年维纳（N.Wiener）通过研究火炮自动控制系统，发表了著名的“控制论—关于在动物和机器中控制和通讯的科学”一文，奠定了控制论这门学科的基础，提出了控制论所具有的信息、反馈与控制三要素；
7. 1954 年钱学森发表“工程控制论”
8. 50 年代末开始由于技术的进步和发展需要，并随着计算机技术的快速发展，使得现代控制理论发展很快，并逐渐形成了一些体系和新的分支。
9. 当前现代控制理论正向智能化方向发展，同时正向非工程领域扩展（如生物系统、医学系统、经济系统、社会系统等），

1-2．试述控制系统的工作原理。

控制系统就是使系统中的某些参量能按照要求保持恒定或按一定规律变化。它可分为人工控制系统（一般为开环控制系统）和自动控制系统（反馈控制系统）。人工控制系统就是由人来对参量进行控制和调整的系统。自动控制系统就是能根据要求自动控制和调整参量的系统，系统在受到干扰时还能自动保持正确的输出。它们的基本工作原理就是测量输出、求出偏差、再用偏差去纠正偏差。

1-3．何谓开环控制与闭环控制？

开环控制：系统的输出端和输入端之间不存在反馈回路，输出量对系统的控制作用没有影响。系统特点：系统简单，容易建造、一般不存在稳定性问题，精度低、抗干扰能力差。

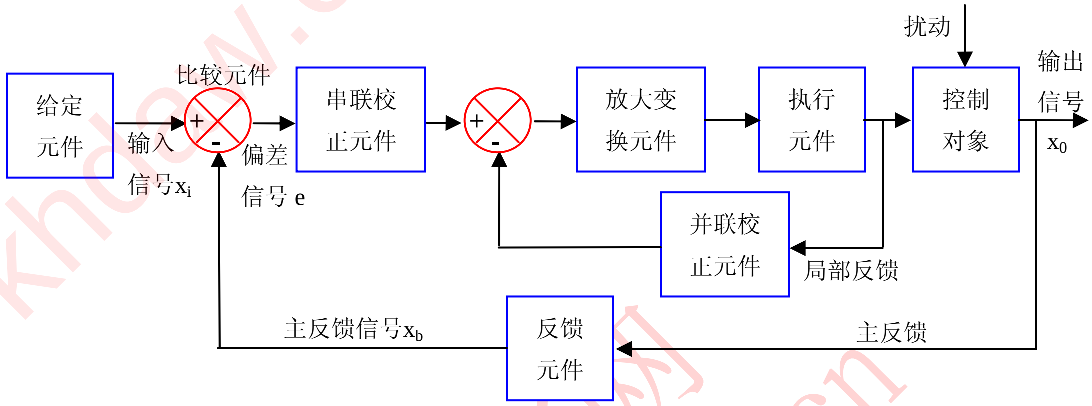
闭环控制：系统的输出端和输入端存在反馈回路，输出量对控制作用有直接影响。闭环的反馈有正反馈和负反馈两种，一般自动控制系统均采用负反馈系统，闭环控制系统的特点：精度高、抗干扰能力强、系统复杂，容易引起振荡。

1-4．试述反馈控制系统的基本组成。

反馈控制系统一般由以下的全部或部分组成（如图示）：

1. 给定元件：主要用于产生给定信号或输入信号

2. 反馈元件：测量被控量或输出量
3. 比较元件：比较输入信号和反馈信号之间的偏差
4. 放大元件：对偏差信号进行放大和功率放大
5. 执行元件：直接对控制对象进行操作
6. 校正元件：或称校正装置，用于改善系统的控制性能，有反馈校正和串联校正
7. 控制对象：控制系统所要操纵的对象，它的输出量即为系统的被控制量



典型的反馈控制系统框图

1-5. 反馈控制原理是什么？

反馈控制的基本原理可简单的表述为：

a) 测量、反馈：由传感器检测系统的输出变化，通过反馈回路将此信号的部分或全部反馈到输入端。
b) 求偏差：将反馈回来的信号和输入信号进行比较，可得它们之间的偏差大小，即实际输出值与给定值的偏差。
c) 纠正偏差：根据偏差的大小和方向对系统进行控制，以改变系统的输出，使偏差减小的过程。

经过以上三个过程，最终使系统的输出满足要求。

1-6. 试述自动控制系统的基本类型。

自动控制系统可按不同的分类方法，分成不同的类型，主要有：

1. 按控制作用的特点分：
a) 恒值系统：系统的输入变化很少，主要要求系统输出能保持恒定。
b) 程序控制系统：系统的输入是预先知道的，要求系统能在预定的输入时能使输出也能按照预定的规律变化。
c) 随动系统：输入信号是一种随机信号，要求系统能快速跟踪随机输入信号的变化。
2. 按系统反应特性分：
a) 连续系统：系统中的所有参量都是连续变化的。有线性系统和非线性系统。
b) 离散系统：亦称数字控制系统，系统中的所有参量都是数字量，数值不连续，时间上也是离散的。
c) 混合系统：系统中的参量既有连续量，也有离散量，一般系统的输出多为连续量，而信号的处理、控制采用数字量。
3. 按数学描述分：

a) 线性系统：可由线性微分方程描述的系统。线性微分方程是指微分方程是定常和线性的。线性系统可应用叠加原理，将多输入及多输出的系统转化为单输入和单输出的系统进行处理分析，最后进行叠加。另外线性系统还有一个重要的性质，就是均匀性，即当输入量的数值成比例增加时，输出量的数值也成比例增加，而且输出量的变化规律只与系统的结构、参数及输入量的变化规律有关，与输入量数值的大小是无关的。
b) 非线性系统：研究非线性系统的运动规律和分析方法的一个分支学科。系统是由非线性微分方程和非线性差分方程给出的。非线性系统理论的研究对象是非线性现象，它反映出非线性系统运动本质的一类现象，不能采用线性系统的理论来解释，主要原因是非线性现象有频率对振幅的依赖性、多值响应和跳跃谐振、分谐波振荡、自激振荡、频率插足、异步抑制、分岔和混沌等。

1-7．试述对控制系统的基本要求。

控制系统的基本要求可由稳、准、快三个字来描述。

1．稳即稳定性：由于系统存在惯性，当系统的各个参数匹配不妥时，将会引起系统的振荡而失去工作能力。稳定性是系统工作的首要条件。
2．准即准确性：输出量与给定量之间的偏差，随时间变化的程度，称动态精度偏差；调整过程结束后的偏差，称静态精度偏差。
3．快即快速性：在系统稳定的前提下，消除偏差过程的快速程度。

控制工程基础习题解答

第二章

2-1．试求下列函数的拉氏变换，假定当 t<0 时，f(t)=0。

(1). $f(t)=5(1-\cos 3t)$

解：$L[f(t)]=L[5(1-\cos 3t)]=\frac{5}{s}-\frac{5s}{s^2+9}$

(2). $f(t)=e^{-0.5t}\cos 10t$

解：$L[f(t)]=L[e^{-0.5t}\cos 10t]=\frac{s+0.5}{(s+0.5)^2+100}$

(3). $f(t)=\sin\left(5t+\frac{\pi}{3}\right)$

解：$L[f(t)]=L\left[\sin\left(5t+\frac{\pi}{3}\right)\right]=L\left[\frac{1}{2}\sin 5t+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5t\right]=\frac{5+\sqrt{3}s}{2(s^2+25)}$

2-2．试求下列函数的拉氏反变换。

(1). $F(s)=\frac{1}{s(s+1)}$

解：$L^{-1}[F(s)]=L^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)}\right]=L^{-1}\left[\frac{k_1}{s}+\frac{k_2}{s+1}\right]$

$$k_1=\left[\frac{1}{s(s+1)}\right]s\Big|_{s=0}=1$$

$$k_2=\left[\frac{1}{s(s+1)}\right](s+1)\Big|_{s=-1}=-1$$

$$L^{-1}[F(s)]=L^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right]=1-e^{-t}$$

(2). $F(s)=\frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$

解：$L^{-1}[F(s)]=L^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+2)(s+3)}\right]=L^{-1}\left[\frac{k_1}{s+2}+\frac{k_2}{s+3}\right]$

$$k_1=\left[\frac{s+1}{(s+2)(s+3)}\right](s+2)\Big|_{s=-2}=-1$$

$$k_2=\left[\frac{s+1}{(s+2)(s+3)}\right](s+3)\Big|_{s=-3}=2$$

$$L^{-1}[F(s)]=L^{-1}\left[-\frac{1}{s+2}+\frac{2}{s+3}\right]=2e^{-3t}-e^{-2t}$$

(3). $F(s)=\dfrac{s^2+5s+2}{(s+2)(s^2+2s+2)}$

解：$L^{-1}[F(s)]=L^{-1}\left[\dfrac{s^2+5s+2}{(s+2)(s^2+2s+2)}\right]=L^{-1}\left[\dfrac{k_1}{s+2}+\dfrac{k_2s+k_3}{s^2+2s+2}\right]$

$$k_1=\left[\frac{s^2+5s+2}{(s+2)(s^2+2s+2)}\right](s+2)\Big|_{s=-2}=-2$$

$$k_2s+k_3\Big|_{s=-1-j}=\left[\frac{s^2+5s+2}{(s+2)(s^2+2s+2)}\right](s^2+2s+2)\Big|_{s=-1-j}$$

$$-k_2+k_3-jk_2=\frac{-3-3j}{1-j}=-3j$$

$$k_2=3$$

$$k_3=3$$

$$L^{-1}[F(s)]=L^{-1}\left[-\frac{2}{s+2}+\frac{3s+3}{s^2+2s+2}\right]=L^{-1}\left[-\frac{2}{s+2}+\frac{3(s+1)}{(s+1)^2+1}\right]=-2e^{-2t}+3e^{-t}\cos t$$

2-3．用拉氏变换法解下列微分方程

（1）$\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}+6\dfrac{dx(t)}{dt}+8x(t)=1(t)$，其中 $x(0)=1,\dfrac{dx(t)}{dt}\Big|_{t=0}=0$

解：对方程两边求拉氏变换，得：

$$s^2X(s)-sx(0)-\left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0}+6(sX(s)-x(0))+8X(s)=\frac{1}{s}$$

$$s^2X(s)-s+6(sX(s)-1)+8X(s)=\frac{1}{s}$$

$$X(s)=\frac{s^2+6s+1}{s(s^2+6s+8)}=\frac{s^2+6s+1}{s(s+2)(s+4)}=\frac{k_1}{s}+\frac{k_2}{s+2}+\frac{k_3}{s+4}$$

$$k_1=\frac{1}{8}$$

$$k_2=\frac{7}{4}$$

$$k_3=-\frac{7}{8}$$

$$x(t)=L^{-1}[X(s)]=\frac{1}{8}+\frac{7}{4}e^{-2t}-\frac{7}{8}e^{-4t},(t\geq 0)$$

（2）$\frac{dx(t)}{dt}+10x(t)=2$，其中 $x(0)=0$

解：对方程两边求拉氏变换，得：

$$sX(s)-x(0)+10X(s)=\frac{2}{s}$$

$$sX(s)+10X(s)=\frac{2}{s}$$

$$X(s)=\frac{2}{s(s+10)}=\frac{k_1}{s}+\frac{k_2}{s+10}$$

$$k_1=\frac{1}{5}$$

$$k_2=-\frac{1}{5}$$

$$x(t)=L^{-1}[X(s)]=\frac{1}{5}-\frac{1}{5}e^{-10t},(t\geq 0)$$

（3）$\frac{dx(t)}{dt}+100x(t)=300$，其中 $x(0)=50$

解：对方程两边求拉氏变换，得：

$$sX(s)-x(0)+100X(s)=\frac{300}{s}$$

$$sX(s)-50+100X(s)=\frac{300}{s}$$

$$X(s)=\frac{50s+300}{s(s+100)}=\frac{k_1}{s}+\frac{k_2}{s+100}$$

$$k_1=3$$

$$k_2=47$$

$$x(t)=L^{-1}[X(s)]=3+47e^{-100t},(t\geq 0)$$

2-4．某系统微分方程为 $3\frac{dy_0(t)}{dt}+2y_0(t)=2\frac{dx_i(t)}{dt}+3x_i(t)$，已知 $y_0(0^-)=x_i(0^-)=0$，其极点和零点各是多少？

解：对方程两边求拉氏变换，得：

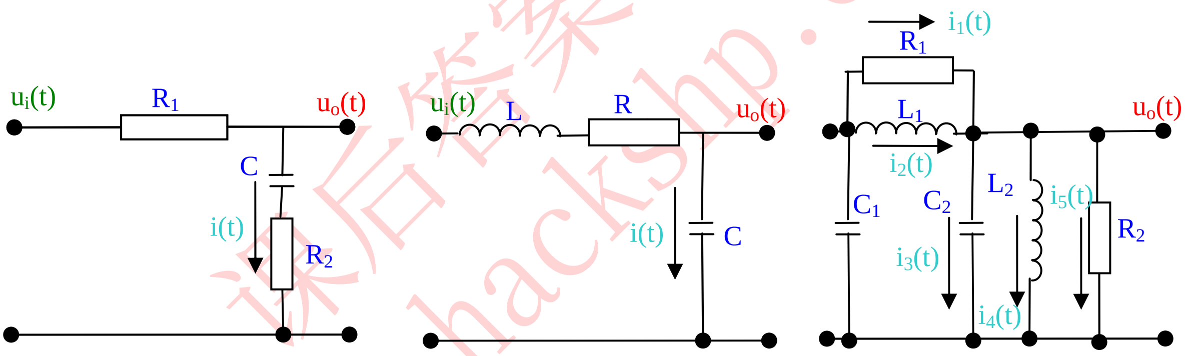
$$3(sY_0(s)-y_0(0))+2Y_0(s)=2(sX_i(s)-x_i(0))+3X_i(s)$$

$$G(s)=\frac{Y_0(s)}{X_i(s)}=\frac{2s+3}{3s+2}$$

$$s_p=-\frac{2}{3}$$

$$s_z=-\frac{3}{2}$$

2-5．试求图 2-25 所示无源网络传递函数。



a)　　　　　　　　b)　　　　　　　　c)

解：

a).
$$\begin{cases} u_i=iR_1+u_0 \\ u_0=iR_2+\frac{1}{C}\int idt \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_i=IR_1+U_0 \\ U_0=IR_2+\frac{I}{Cs} \end{cases}$$

$$R_1CsU_0=(R_2Cs+1)(U_i-U_0)$$

$$G(s)=\frac{U_0}{U_i}=\frac{R_2Cs+1}{(R_1+R_2)Cs+1}$$

b).
$$\begin{cases} u_i=iR+L\frac{di}{dt}+u_0 \\ u_0=\frac{1}{C}\int idt \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_i = IR + LsI + U_0 \\ U_0 = \dfrac{I}{Cs} \end{cases}$$

$$U_i = \left(RCs + LCs^2 + 1\right)U_0$$

$$G(s) = \frac{U_0}{U_i} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

c).

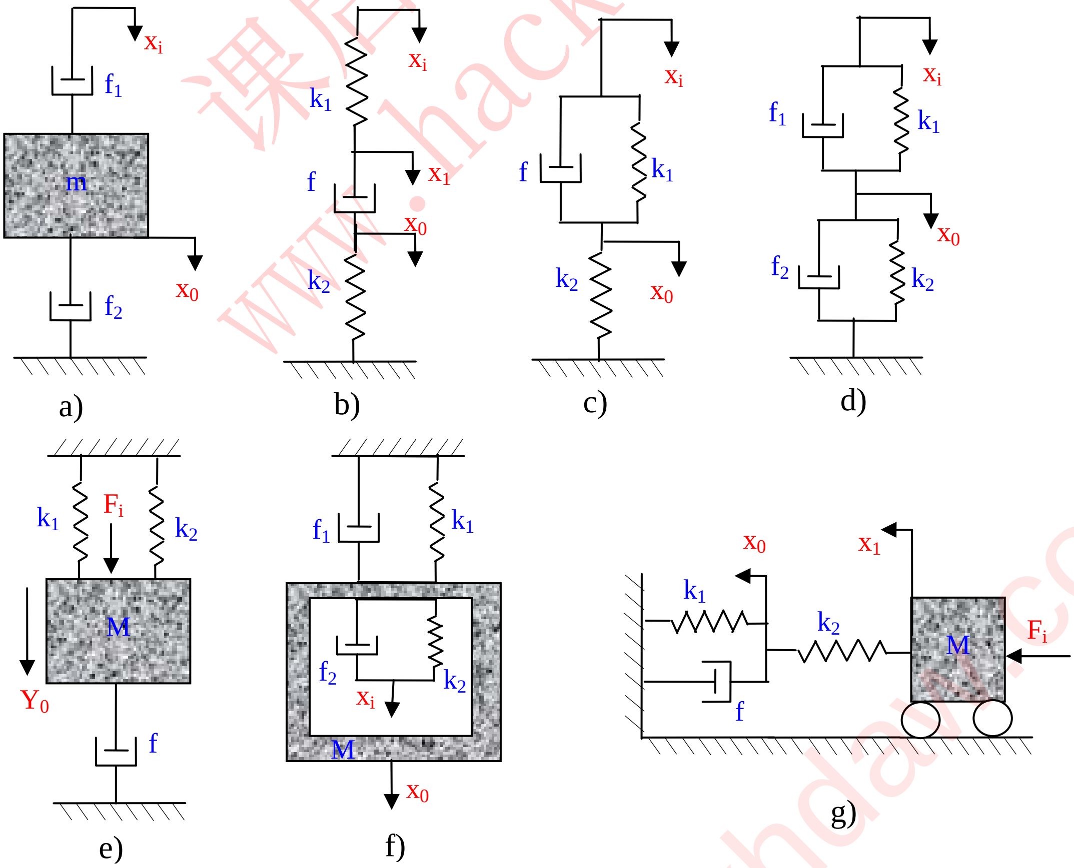
$$Z_1 = \frac{R_1L_1s}{L_1s + R_1}$$

$$Z_2 = \frac{1}{\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{L_2s} + C_2s} = \frac{R_2L_2s}{R_2L_2c_2s^2 + L_2s + R_2}$$

$$U_0 = \frac{\dfrac{R_2L_2s}{R_2L_2c_2s^2 + L_2s + R_2}}{\dfrac{R_2L_2s}{R_2L_2c_2s^2 + L_2s + R_2} + \dfrac{R_1L_1s}{L_1s + R_1}}U_i$$

$$G(s) = \frac{U_0}{U_i} = \frac{R_2L_2L_1s + R_1R_2L_2}{R_1R_2C_2L_1L_2s^2 + (R_1 + R_2)L_1L_2s + R_1R_2(L_1 + L_2)}$$

2-6．试求图 2-26 所示机械系统传递函数。



解：

a). 微分方程为：$f_1(\dot{x}_i-\dot{x}_0)-f_2\dot{x}_0=m\ddot{x}_0$

拉氏变换得：$f_1 s(X_i-X_0)-f_2 sX_0=ms^2X_0$

传递函数为：$G(s)=\dfrac{f_1}{ms+f_1+f_2}$

b). 微分方程组为：$\begin{cases}k_1(x_i-x_1)=f(\dot{x}_1-\dot{x}_0)\\ f(\dot{x}_1-\dot{x}_0)=k_2x_0\end{cases}$

拉氏变换得：

$$k_1(X_i-X_1)=fs(X_1-X_0)$$
$$fs(X_1-X_0)=k_2X_0$$
$$k_1\left(X_i-\frac{fs+k_2}{fs}X_0\right)=k_2X_0$$

传递函数为：$G(s)=\dfrac{k_1fs}{(k_1+k_2)fs+k_1k_2}$

c). 微分方程为：$k_1(x_i-x_0)+f(\dot{x}_i-\dot{x}_0)=k_2x_0$

拉氏变换得：$k_1(X_i-X_0)+fs(X_i-X_0)=k_2X_0$

传递函数为：$G(s)=\dfrac{k_1+fs}{fs+k_1+k_2}$

d). 微分方程为：$k_1(x_i-x_0)+f_1(\dot{x}_i-\dot{x}_0)=k_2x_0+f_2\dot{x}_0$

拉氏变换得：$k_1(X_i-X_0)+f_1s(X_i-X_0)=k_2X_0+f_2sX_0$

传递函数为：$G(s)=\dfrac{k_1+f_1s}{(f_1+f_2)s+k_1+k_2}$

e). 微分方程为：$F_i-(k_1+k_2)y_0-f\dot{y}_0=m\ddot{y}_0$

拉氏变换得：$F_i(s)=(ms^2+fs+k_1+k_2)Y_0$

传递函数为：$G(s)=\dfrac{1}{ms^2+fs+k_1+k_2}$

f). 微分方程为：$k_2(x_i-x_0)-f_2(\dot{x}_i-\dot{x}_0)=m\ddot{x}_0+k_1x_0+f_1\dot{x}_0$

拉氏变换得：$(f_2s+k_2)X_i=(ms^2+(f_1+f_2)s+k_1+k_2)Y_0$

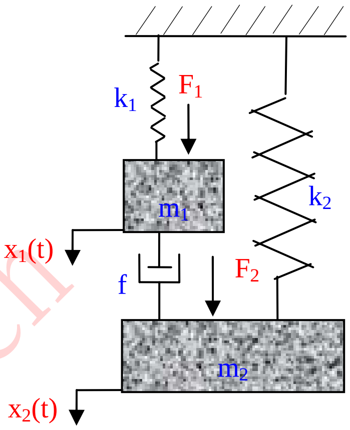
传递函数为：$G(s)=\dfrac{f_2s+k_2}{ms^2+(f_1+f_2)s+k_1+k_2}$

g). 微分方程为：
$$F_i - k_2(x_1 - x_0) = m\ddot{x}_1$$
$$k_2(x_1 - x_0) = k_1 x_0 + f\dot{x}_0$$

拉氏变换得：$F_i(s) = \left(ms^2 \dfrac{fs + k_1 + k_2}{k_2} + fs + k_1 \right) X_0$

传递函数为：$G(s) = \dfrac{k_2}{mfs^3 + (k_1 + k_2)ms^2 + k_2 fs + k_1 k_2}$

2-7. 对于如图 2-27 所示系统，试求从作用力$F_1(t)$到位移$x_2(t)$的传递函数。其中B为粘性阻尼系数。作用力$F_2(t)$到位移$x_1(t)$的传递函数又是什么？



解：从作用力$F_1(t)$到位移$x_2(t)$

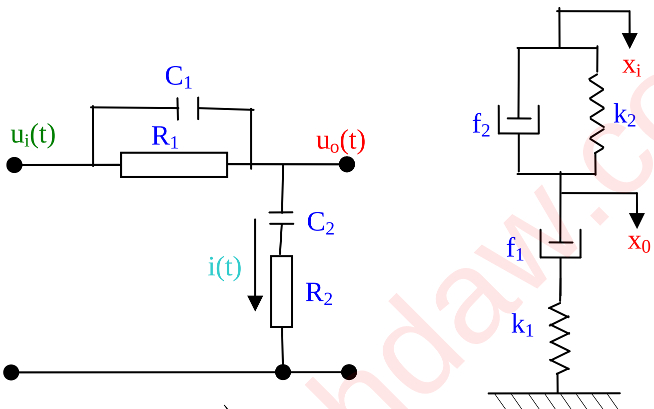
微分方程为：
$$F_1 - k_1 x_1 - f(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = m_1 \ddot{x}_1$$
$$f(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_2 x_2 = m_2 \ddot{x}_2$$

拉氏变换得：
$$F_1(s) = \left(m_1 s^2 \frac{m_2 s^2 + fs + k_2}{fs} + m_2 s^2 + k_2 + k_1 \frac{m_2 s^2 + fs + k_2}{fs} \right) X_2$$

传递函数为：
$$G_1(s) = \frac{X_2}{F_1} = \frac{fs}{m_1 m_2 s^4 + (m_1 + m_2) fs^3 + (k_1 m_2 + k_2 m_1) s^2 + (k_1 + k_2) fs + k_1 k_2}$$

从作用力$F_2(t)$到位移$x_1(t)$
系统为对称系统所以传递函数为：
$$G_2(s) = \frac{X_1}{F_2} = \frac{fs}{m_1 m_2 s^4 + (m_1 + m_2) fs^3 + (k_1 m_2 + k_2 m_1) s^2 + (k_1 + k_2) fs + k_1 k_2}$$

2-8. 证明 2-28a 与 b 表示的系统是相似系统（即证明两个系统的传递函数具有相同的形式）。



a)　b)

解：

a). 用等效阻抗法做：

拉氏变换得：$U_0=\dfrac{\dfrac{1}{C_2s}+R_2}{\dfrac{R_1\dfrac{1}{C_1s}}{\dfrac{1}{C_1s}+R_1}+\dfrac{1}{C_2s}+R_2}U_i=\dfrac{(C_1R_1s+1)(C_2R_2s+1)}{C_2R_1s+(C_1R_1s+1)(C_2R_2s+1)}U_i$

传递函数为：$G(s)=\dfrac{(C_1R_1s+1)(C_2R_2s+1)}{C_2R_1s+(C_1R_1s+1)(C_2R_2s+1)}$

b). 用等效刚度法做：

拉氏变换得：$(f_2s+k_2)(X_i-X_0)=\dfrac{f_1k_1s}{f_1s+k_1}X_0$

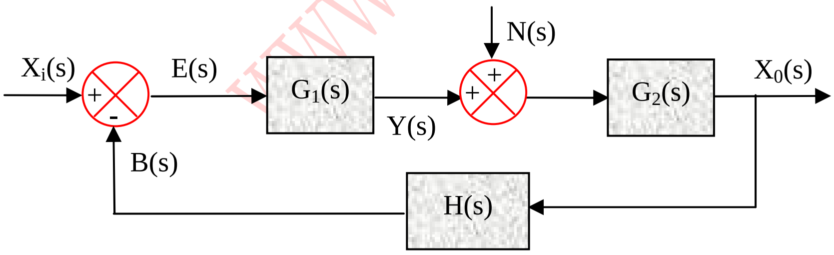
传递函数为：$G(s)=\dfrac{(f_2s+k_2)(f_1s+k_1)}{(f_1s+k_1)(f_2s+k_2)+f_1k_1s}=\dfrac{\left(\dfrac{f_2}{k_2}s+1\right)\left(\dfrac{f_1}{k_1}s+1\right)}{\left(\dfrac{f_1}{k_1}s+1\right)\left(\dfrac{f_2}{k_2}s+1\right)+\dfrac{f_1}{k_2}s}$

可见当：$R_1=\dfrac{1}{k_1},R_2=\dfrac{1}{k_2},C_1=f_1,C_2=f_2$时，两系统的数学模型完全相同。

2-9．如图 2-29 所示系统，试求

（1）以$X_i(s)$为输入，分别以$X_0(s)$、Y(s)、B(s)、E(s)为输出的传递函数。

（2）以N(s)为输入，分别以$X_0(s)$、Y(s)、B(s)、E(s)为输出的传递函数。



解：

（1）$G_{x_0}(s)=\dfrac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$

$G_y(s)=\dfrac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$

$G_b(s)=\dfrac{G_1(s)G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$

$$G_e(s)=\frac{1}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

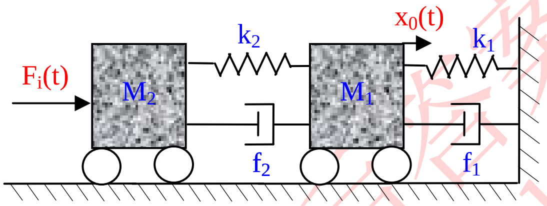
（2）$$G_{x_0}(s)=\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

$$G_y(s)=-\frac{G_1(s)G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

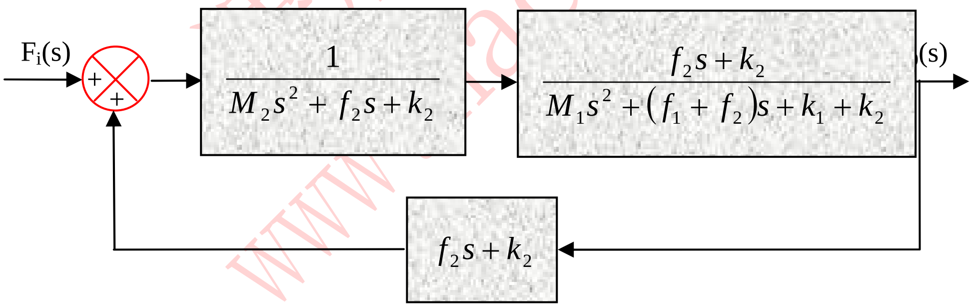
$$G_b(s)=\frac{G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

$$G_e(s)=-\frac{G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

2-10．试画出图 2-30 系统的框图，并求出其传递函数。其中$F_i(t)$为输入力，$X_0(t)$为输出位移。



解：框图不是唯一的，如可画成：

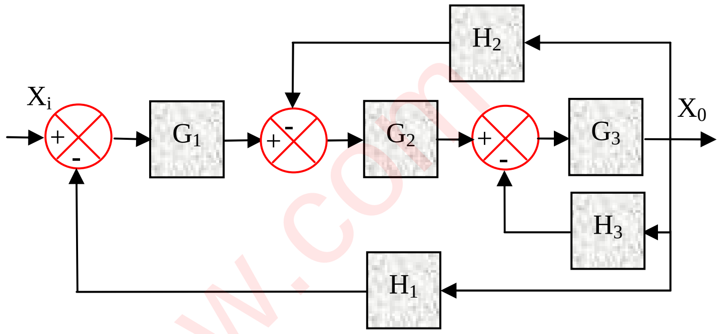


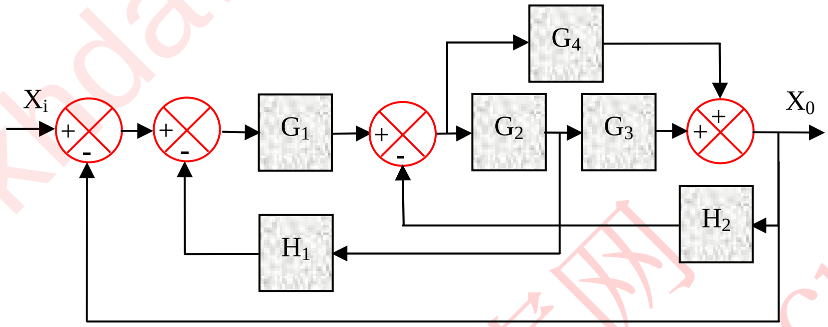
$$G(s)=\frac{\dfrac{1}{M_2s^2+f_2s+k_2}\dfrac{f_2s+k_2}{M_1s^2+(f_1+f_2)s+k_1+k_2}}{1-\dfrac{1}{M_2s^2+f_2s+k_2}\dfrac{f_2s+k_2}{M_1s^2+(f_1+f_2)s+k_1+k_2}(f_2s+k_2)}$$

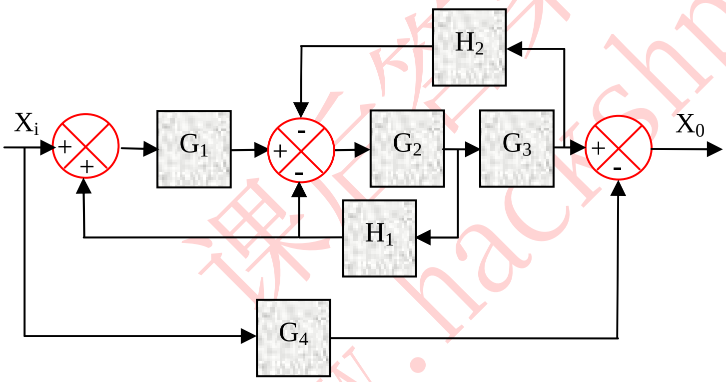
$$=\frac{f_2s+k_2}{(M_2s^2+f_2s+k_2)(M_1s^2+f_1s+k_1)+M_2s^2(f_2s+k_2)}$$

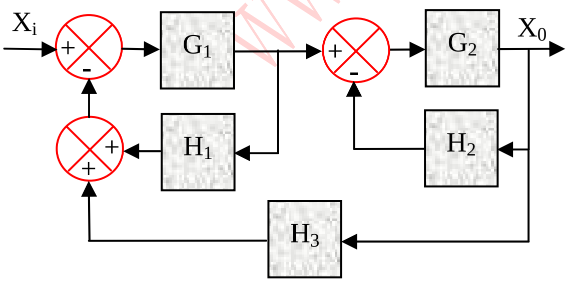
$$=\frac{f_2s+k_2}{M_1M_2s^4+((f_1+f_2)M_2+f_2M_1)s^3+((k_1+k_2)M_2+k_2M_1+f_1f_2)s^2+(k_1f_2+k_2f_1)s+k_1k_2}$$

2-11．化简图 2-31 所示各系统框图；并求其传递函数。

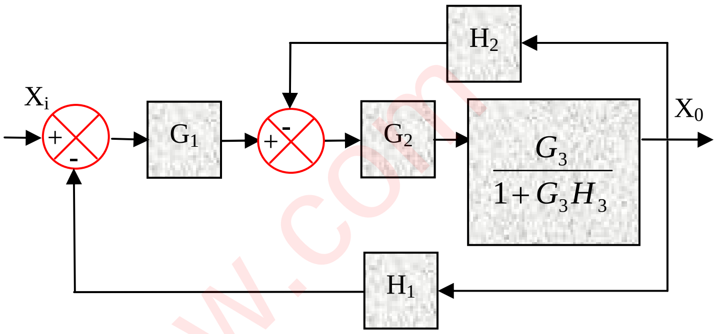

X_i
G_1
G_2
G_3
H_1
H_2
H_3
X_0
+
-

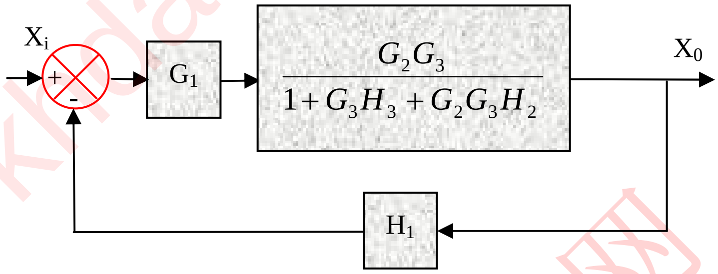

X_i
G_1
G_2
G_3
G_4
H_1
H_2
X_0
+
-

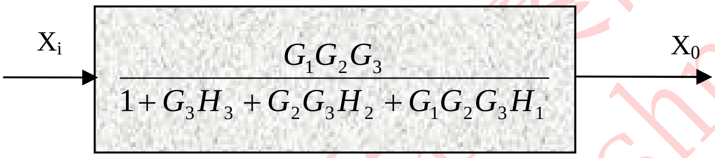

X_i
G_1
G_2
G_3
G_4
H_1
H_2
X_0
+
-


X_i
G_1
G_2
H_1
H_2
H_3
X_0
+
-

a).

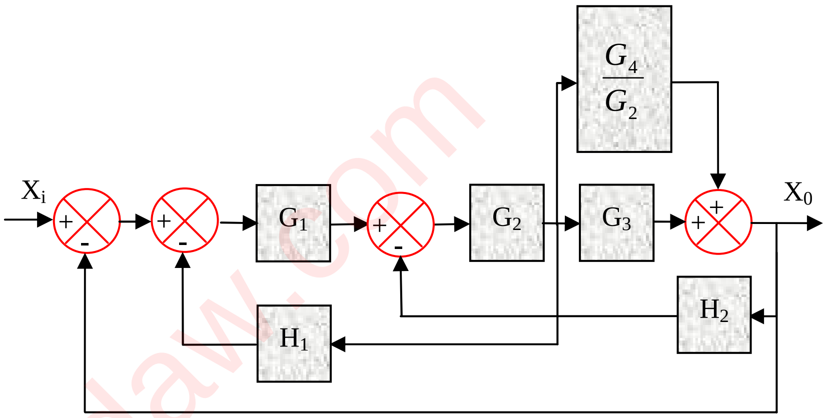




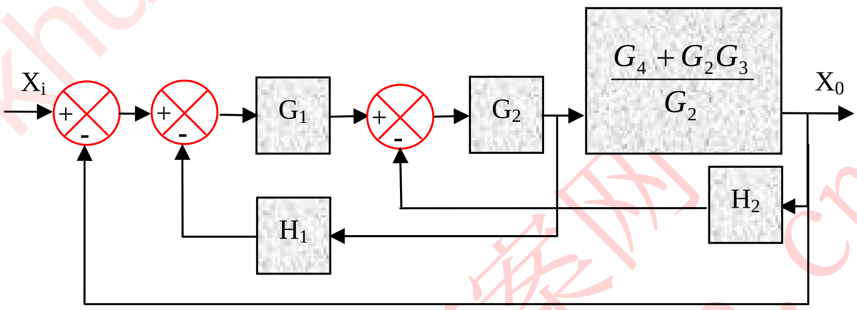


$$\phi(s)=\frac{G_1G_2G_3}{1+G_3H_3+G_2G_3H_2+G_1G_2G_3H_1}$$

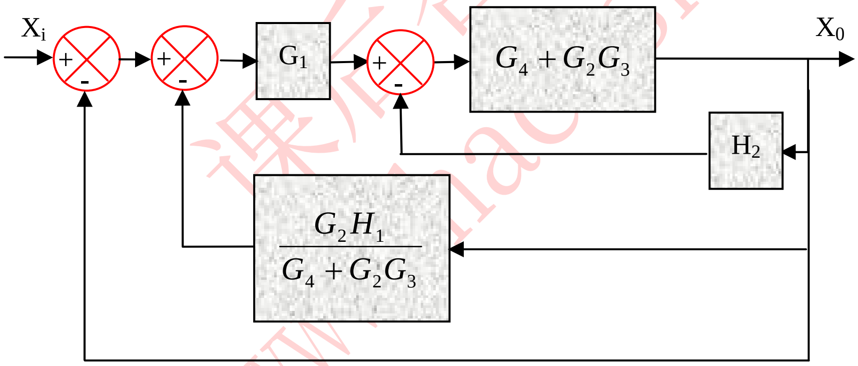
b).



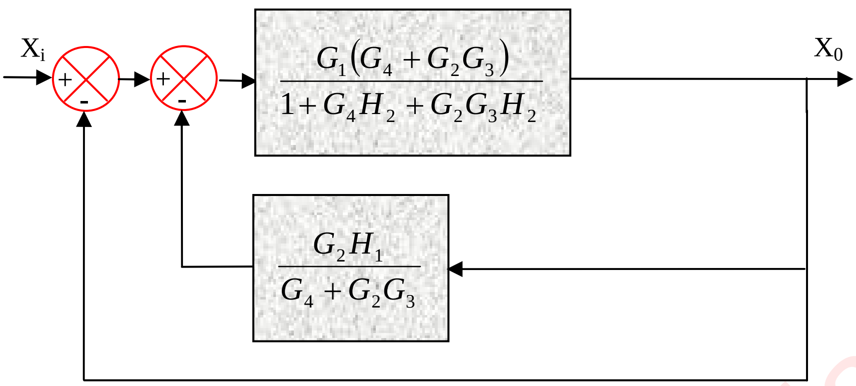
X_i
G_1
G_2
G_3
$\frac{G_4}{G_2}$
H_1
H_2
X_0



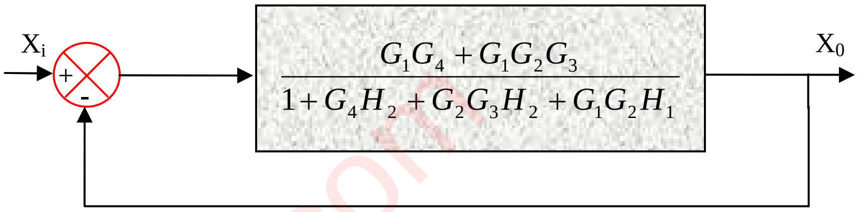
X_i
G_1
G_2
$\frac{G_4+G_2G_3}{G_2}$
H_1
H_2
X_0

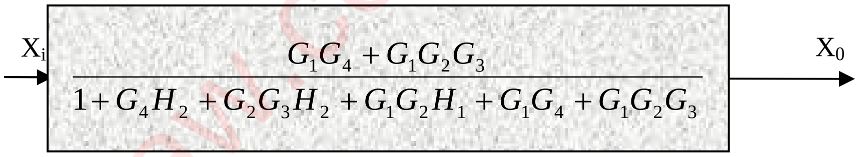


X_i
G_1
$G_4+G_2G_3$
H_2
$\frac{G_2H_1}{G_4+G_2G_3}$
X_0



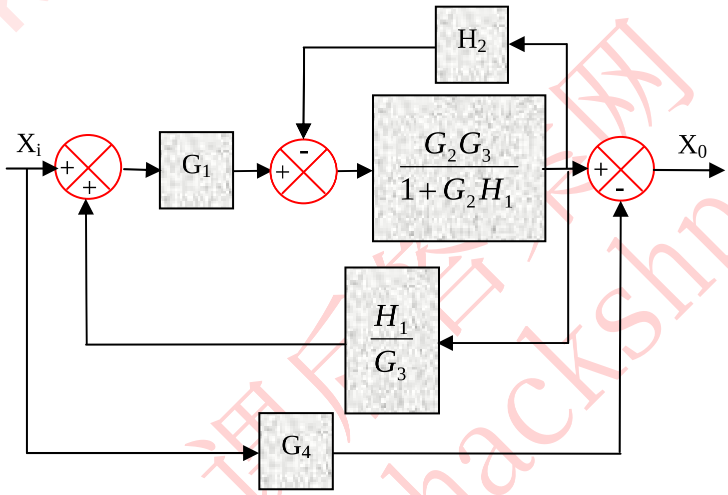
X_i
$\frac{G_1(G_4+G_2G_3)}{1+G_4H_2+G_2G_3H_2}$
$\frac{G_2H_1}{G_4+G_2G_3}$
X_0

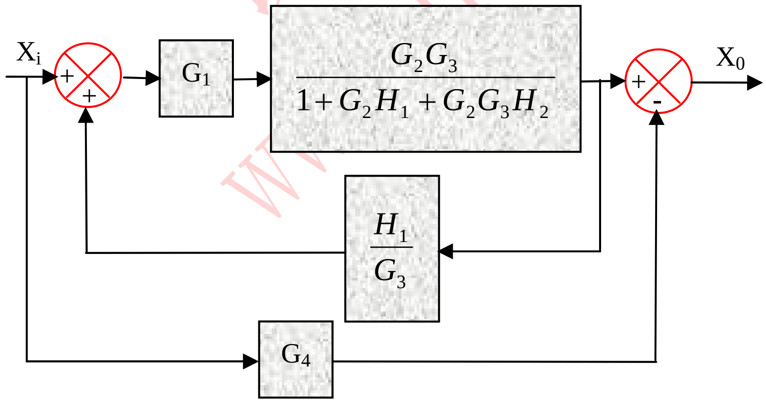


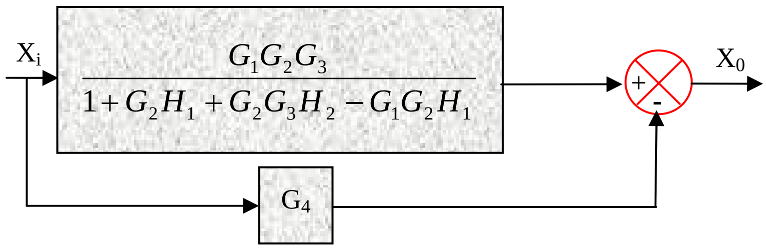


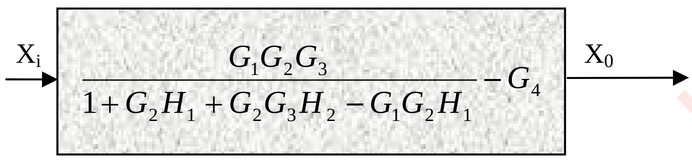
$$\phi(s)=\frac{G_1G_4+G_1G_2G_3}{1+G_4H_2+G_2G_3H_2+G_1G_2H_1+G_1G_4+G_1G_2G_3}$$

c).



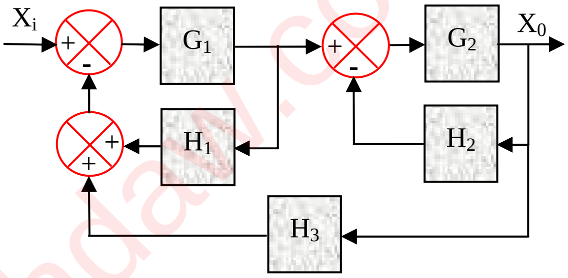


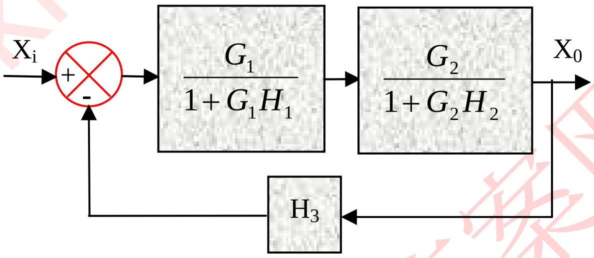


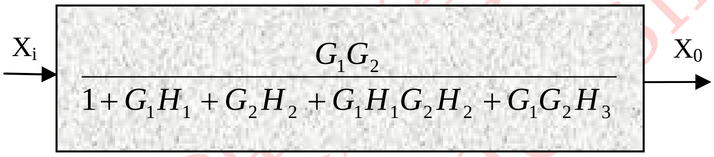


$$\phi(s)=\frac{G_1G_2G_3}{1+G_2H_1+G_2G_3H_2-G_1G_2H_1}-G_4$$

d).







$$\phi(s)=\frac{G_1G_2}{1+G_1H_1+G_2H_2+G_1H_1G_2H_2+G_1G_2H_3}$$

控制工程基础习题解答

第三章

3-1．已知二阶系统的闭环传递函数为 $\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n{}^2}{s^2+2\varsigma\omega_n s+\omega_n{}^2}$，其中 ζ =0.6， ω_n=5rad/s，试求在单位阶跃输入下的瞬态响应指标 t_r、t_p、σ_p%、和 t_s。

解：

$$\beta=\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\varsigma^2}}{\varsigma}=\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-0.6^2}}{0.6}=53.13°=0.927rad$$

$$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\varsigma^2}=5\sqrt{1-0.6^2}=4rad/s$$

$$t_r=\frac{\pi-\beta}{\omega_d}=\frac{\pi-0.927}{4}=0.55(\mathrm{s})$$

$$t_p=\frac{\pi}{\omega_d}=\frac{\pi}{4}=0.79(s)$$

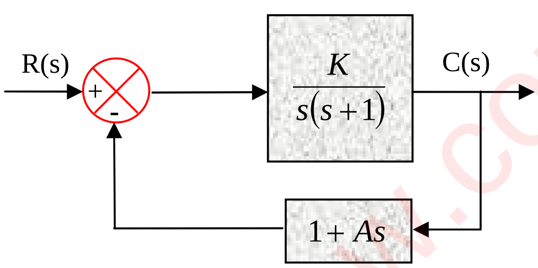
$$\sigma_p\%=e^{-\frac{\varsigma\pi}{\sqrt{1-\varsigma^2}}}=e^{-\frac{0.6\pi}{\sqrt{1-0.6^2}}}=9.5\%$$

$$t_s=\frac{3}{\varsigma\omega_n}=\frac{3}{0.6\times5}=1(s)$$

$$t_s=\frac{4}{\varsigma\omega_n}=\frac{4}{0.6\times5}=1.33(s)$$

3-2．已知某系统的框图如图 3-16 所示，要求系统的性能指标为 σ_p%=20%，t_p =1s，试确定系统的K值和A值，并计算 t_r 和 t_s 之值。

解：



$$\phi(s)=\frac{K}{s^2+(AK+1)s+K}$$

$$\omega_n=\sqrt{K}$$

$$\varsigma=\frac{AK+1}{2\sqrt{K}}$$

$$\sigma_p\%=e^{-\frac{\varsigma\pi}{\sqrt{1-\varsigma^2}}}=0.2$$

$$\varsigma=0.45$$

$$t_p=\frac{\pi}{\omega_d}=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-0.45^2}}=1(s)$$

$$\omega_n=3.52rad/s$$

$$K=\omega_n{}^2=12.39$$

$$A=\frac{2\sqrt{K}\varsigma-1}{K}=\frac{2\times\sqrt{12.39}\times0.45-1}{12.39}=0.17$$

$$\beta=\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\varsigma^2}}{\varsigma}=\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-0.45^2}}{0.45}=1.1rad$$

$$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\varsigma^2}=3.52\sqrt{1-0.45^2}=3.14rad/s$$

$$t_r=\frac{\pi-\beta}{\omega_d}=\frac{\pi-1.1}{3.14}=0.65(\mathrm{s})$$

$$t_s=\frac{3}{\varsigma\omega_n}=\frac{3}{0.45\times3.52}=1.89(s),\quad \pm5\%$$

$$=\frac{4}{\varsigma\omega_n}=\frac{4}{0.45\times3.52}=2.52(s),\quad \pm2\%$$

3-3．某系统的开环传递函数为$G(s)=\dfrac{\omega_n{}^2}{s^2+2\varsigma\omega_n s}$，为使单位反馈的闭环系统对单位阶跃输入的瞬态响应具有$\sigma_p\%=5\%$的超调量和$t_s=2s$的调整时间，试确定系统的ζ和ω_n的值。

解：闭环传递函数：$\phi(s)=\dfrac{\omega_n{}^2}{s^2+2\varsigma\omega_n s+\omega_n{}^2}$

$$\sigma_p\%=e^{-\frac{\varsigma\pi}{\sqrt{1-\varsigma^2}}}=0.05$$

$$\varsigma=0.7$$

$$t_s=\frac{3}{\varsigma\omega_n}=\frac{3}{0.7\times\omega_n}=2(s),\quad \pm5\%$$

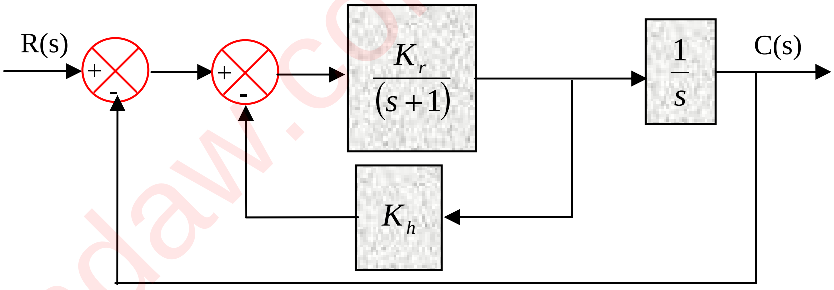
$$\omega_n=2.14rad/s$$

$$t_s=\frac{4}{\varsigma\omega_n}=\frac{4}{0.7\times\omega_n}=2(s),\quad \pm2\%$$

$$\omega_n=2.86rad/s$$

3-4．某一带速度反馈的位置伺服系统，其框图如图 3-17 所示。为了使系统的最大超调量$M_p=0.85$，试确定增益K_r和K_h的值，并求取在此

K_r和K_h数值下，系统的上升时间t_r和调整时间t_s。（峰值时间tp=0.1 秒时）



解：闭环传递函数：$\phi(s)=\dfrac{\omega_n^{\ 2}}{s^2+2\varsigma\omega_n s+\omega_n^{\ 2}}=\dfrac{K_r}{s^2+(K_rK_h+1)s+K_r}$

$$\omega_n=\sqrt{K_r}$$

$$\varsigma=\frac{K_rK_h+1}{2\sqrt{K_r}}$$

$$M_p\%=e^{-\frac{\varsigma\pi}{\sqrt{1-\varsigma^2}}}=0.85$$

$$\varsigma=0.05$$

$$\varsigma=\frac{K_rK_h+1}{2\sqrt{K_r}}=0.05$$

$$t_p=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\varsigma^2}}=\frac{\pi}{\sqrt{K_r}\sqrt{1-0.05^2}}=0.1$$

$$K_r=987$$

$$K_h=\frac{0.1\sqrt{K_r}-1}{K_r}=0.002$$

$$\beta=\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-0.05^2}}{0.05}=1.52rad$$

$$\omega_n=\sqrt{K_r}=\sqrt{987}=31.4rad/s$$

$$\omega_d=31.4\sqrt{1-0.05^2}=31.3rad/s$$

$$t_r=\frac{\pi-\beta}{\omega_d}=\frac{\pi-1.52}{31.3}=0.05(s)$$

$$t_s=\frac{3}{0.05\times31.4}=1.91(s),\quad \pm5\%$$

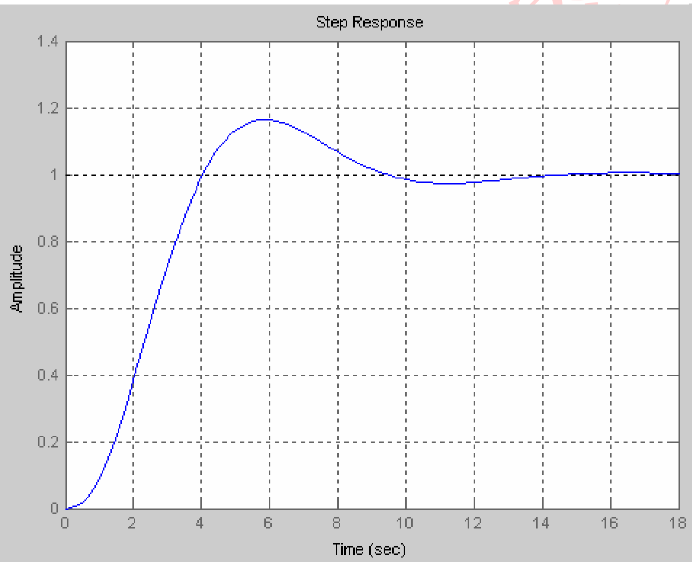
$$t_s=\frac{4}{0.05\times31.4}=2.55(s),\quad \pm5\%$$

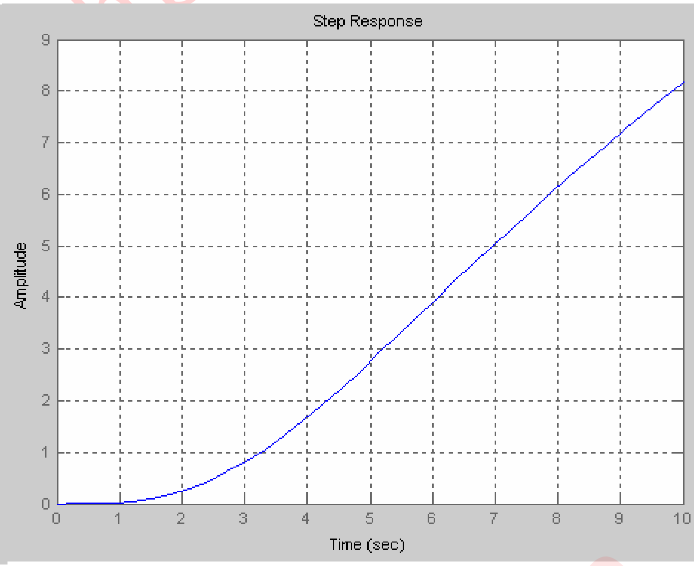
3-5．某系统的开环传递函数为$G(s)=\dfrac{1.06}{s(s+1)(s+2)}$，试求单位反馈闭环系统的单位阶跃响应和单位斜坡响应。

解：用 Matlab 解该题

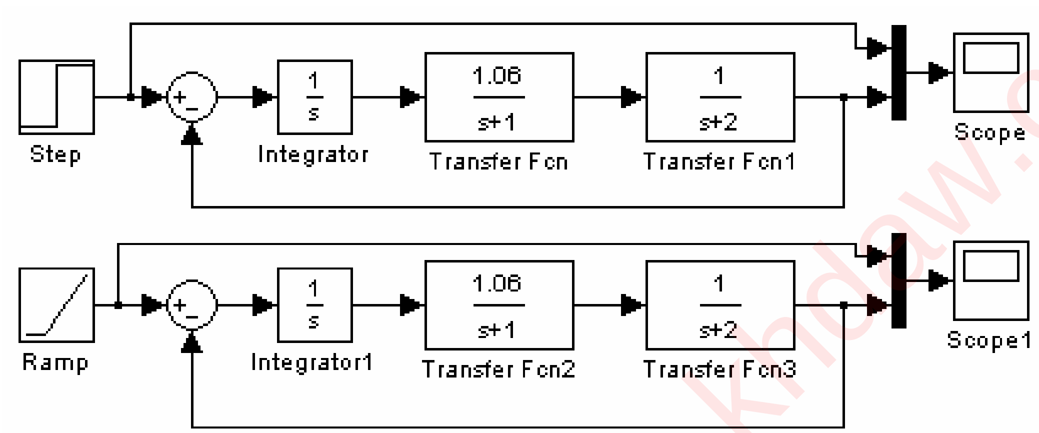
M 文件：

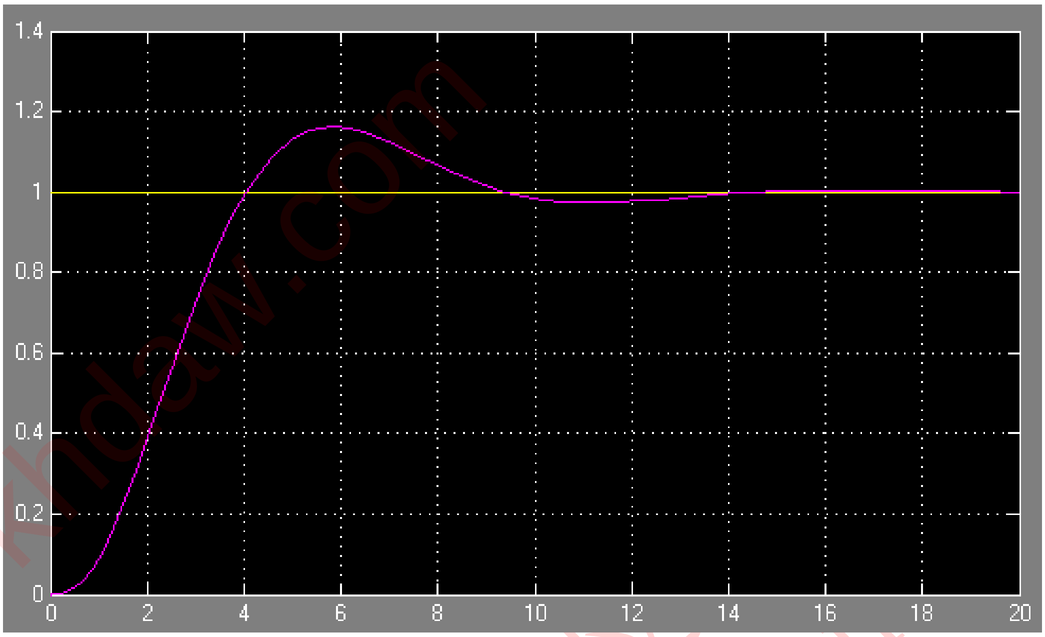
```
num=1.06;
den=conv(conv([1 0],[1 1]),[1 2]);
g= tf(num,den);
sys=feedback(g,1);
g1=tf(1,[1 0]);
syst=sys*g1;
figure(1)
Step(sys)
grid
figure(2)
Step(syst)
grid
```

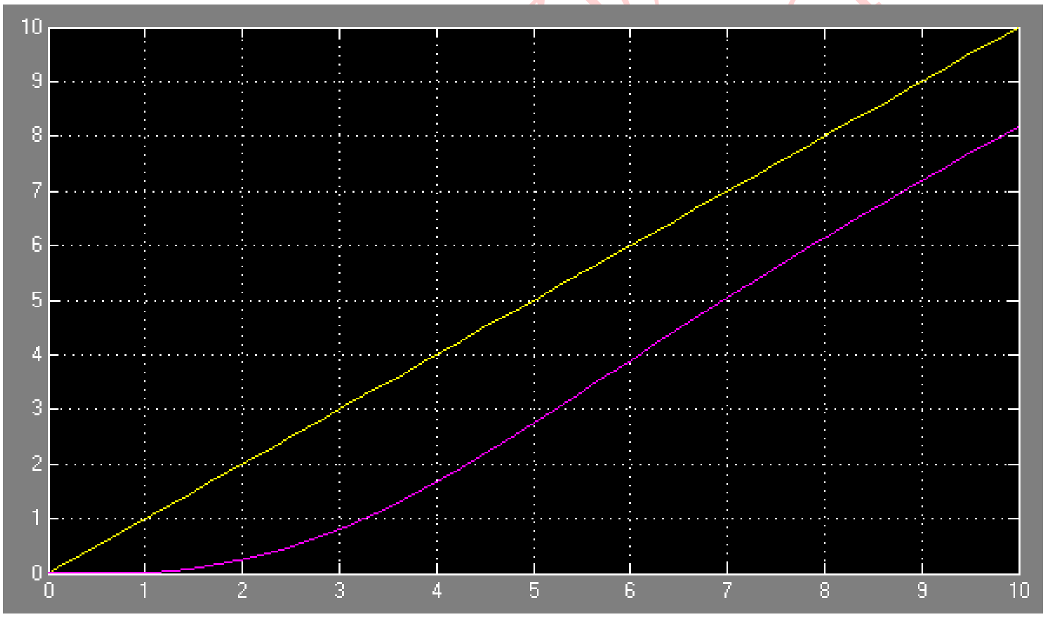




用Simulink解该题







3-6．某单位反馈闭环系统，具有一个不稳定的开环传递函数 $G(s)=\dfrac{10(s+1)}{s(s-3)}$，试问闭环系统是否稳定并作出该闭环系统的单位阶跃响应曲线。

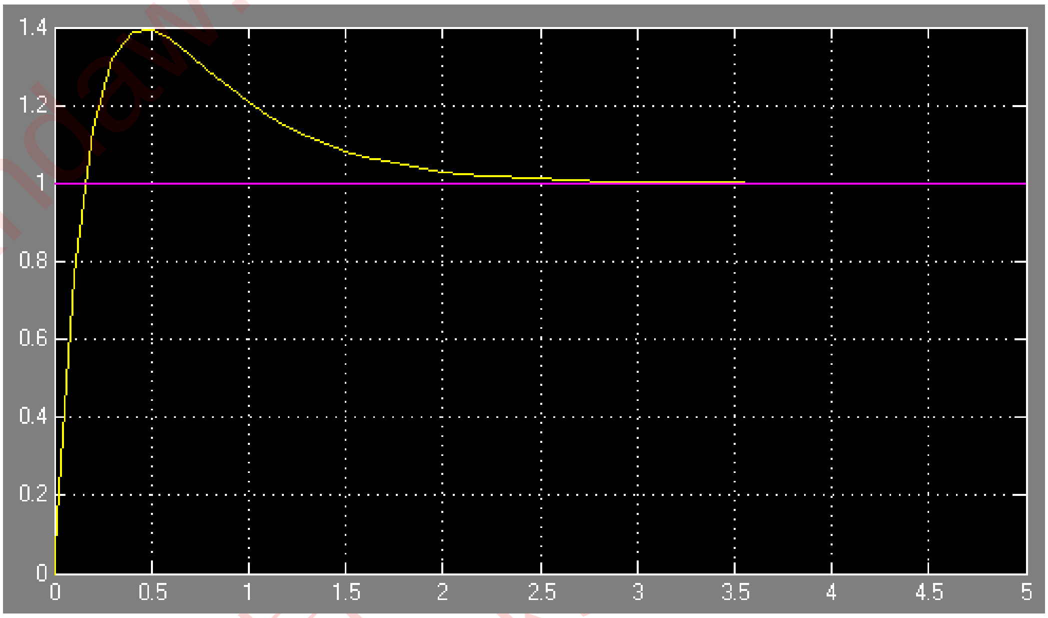
解：闭环传递函数：$\phi(s)=\dfrac{10s+10}{s^2+7s+10}$

$$c(t)=L^{-1}[C(s)]=L^{-1}\left[\frac{10s+10}{s^2+7s+10}\frac{1}{s}\right]=L^{-1}\left[\frac{10s+10}{(s+2)(s+5)}\frac{1}{s}\right]$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s}+\frac{5}{3}\frac{1}{s+2}-\frac{8}{3}\frac{1}{s+5}\right]=1+\frac{5}{3}e^{-2t}-\frac{8}{3}e^{-5t}$$

是一闭环稳定的系统。

响应曲线：



控制工程基础习题解答

第四章

4-1．试求下列函数的幅频特性 A（ω）、相频特性Φ（ω）、实频特性 U（ω）和虚频特性 V（ω）。

（1）． $G_1(j\omega) = \dfrac{5}{30\ j\omega + 1}$

（2）． $G_2(j\omega) = \dfrac{1}{j\omega(0.1j\omega + 1)}$

解：

（1）． $G_1(j\omega) = \dfrac{5}{900\omega^2 + 1} - j\dfrac{150\omega}{900\omega^2 + 1}$

$$A(\omega) = \frac{5}{\sqrt{900\omega^2 + 1}}$$

$$\phi(\omega) = -\arctan(30\omega)$$

$$U(\omega) = \frac{5}{900\omega^2 + 1}$$

$$V(\omega) = -\frac{150\omega}{900\omega^2 + 1}$$

（2）． $G_2(j\omega) = -\dfrac{0.1}{(0.01\omega^2 + 1)} - j\dfrac{1}{\omega(0.01\omega^2 + 1)}$

$$A(\omega) = \frac{1}{\omega\sqrt{0.01\omega^2 + 1}}$$

$$\phi(\omega) = \arctan\frac{1}{0.1\omega}$$

$$U(\omega) = -\frac{0.1}{(0.01\omega^2 + 1)}$$

$$V(\omega) = -j\frac{1}{\omega(0.01\omega^2 + 1)}$$

4-2．某系统传递函数 $G(j\omega) = \dfrac{5}{0.25s + 1}$，当输入为 $5\cos(4t - 30^\circ)$ 时，试求系统的稳态输出。

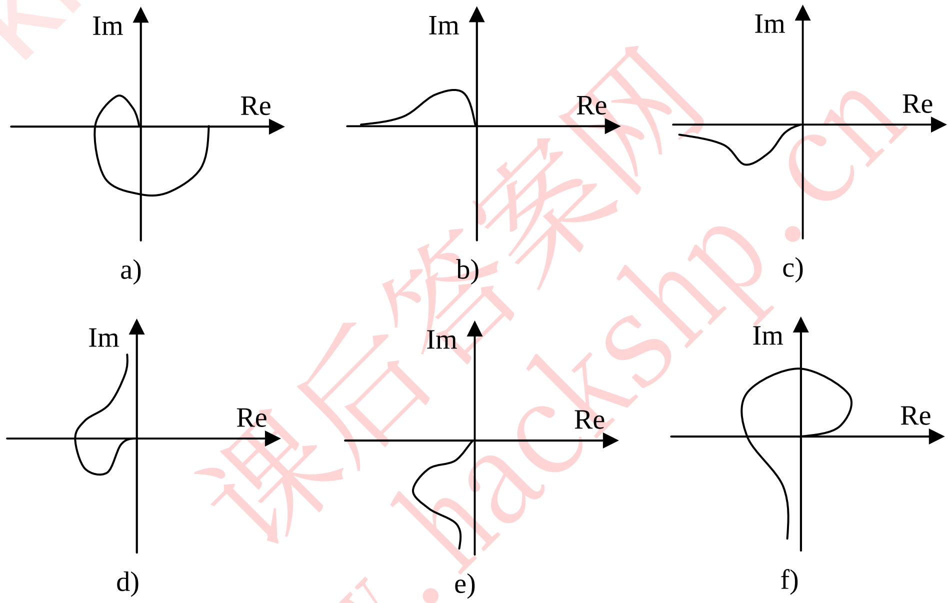
解：$G(j\omega)=5\left(\dfrac{1}{0.0625\omega^2+1}-j\dfrac{0.25\omega}{0.0625\omega^2+1}\right)$

$$A(4)=\frac{5}{\sqrt{0.0625\times4^2+1}}=\frac{5}{2}\sqrt{2}$$

$$\phi(4)=-\arctan(0.25\times4)=-45^\circ$$

稳态输出：$5A(4)\cos\left(4t-30^\circ+\phi(4)\right)=\dfrac{25}{2}\sqrt{2}\cos\left(4t-75^\circ\right)$

4-3．下面的各传递函数能否在图 4-30 中找到相应的奈氏曲线。



（1）． $G_1(s)=\dfrac{0.2(4s+1)}{s^2(0.4s+1)}$

（2）． $G_2(s)=\dfrac{0.14(9s^2+5s+1)}{s^2(0.3s+1)}$

（3）． $G_3(s)=\dfrac{K(0.1s+1)}{s(s+1)}$

（4）． $G_4(s)=\dfrac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

（5）． $G_5(s)=\dfrac{K}{s(s+1)(0.5s+1)}$

（6）． $G_6(s)=\dfrac{K}{(s+1)(s+2)}$

解：

（1）． $G_1(s)=\dfrac{0.2(4s+1)}{s^2(0.4s+1)}$

$$G_1(j\omega)=-0.2\left[\frac{1+1.6\omega^2}{\omega^2(0.16\omega^2+1)}+j\frac{3.6\omega}{\omega^2(0.16\omega^2+1)}\right]$$

$$=-\frac{0.2(1+1.6\omega^2)}{\omega^2(0.16\omega^2+1)}-j\frac{0.72}{\omega(0.16\omega^2+1)}$$

$$U_1(\omega)=-\frac{0.2(1+1.6\omega^2)}{\omega^2(0.16\omega^2+1)}$$

$$V_1(\omega)=-\frac{0.72}{\omega(0.16\omega^2+1)}$$

起点：$\omega\to 0^+$：$|G_1(j\omega)|=\infty$，$\phi_1(\omega)=-2\times 90^\circ=-180^\circ$，$U_1(\omega)=-\infty$，$V_1(\omega)=-\infty$；

终点：$\omega\to +\infty$：$|G_1(j\omega)|=0$，$\phi_1(\omega)=(m-n)\times 90^\circ=(1-3)\times 90^\circ=-180^\circ$；

中间变化过程：幅值、实部和虚部的绝对值单调下降；实部和虚部恒小于 0，位于第三象限；
转角频率从小到大排列：一阶微分、惯性环节，相位先增加后减少；
c)相近，但起点虚部和虚部的变化规律不符。找不到对应的图形。

（2）． $G_2(s)=\dfrac{0.14(9s^2+5s+1)}{s^2(0.3s+1)}$

起点：$\omega\to 0^+$：$|G_1(j\omega)|=\infty$，$\phi_1(\omega)=-2\times 90^\circ=-180^\circ$；

终点：$\omega\to +\infty$：$|G_1(j\omega)|=0$，$\phi_1(\omega)=(m-n)\times 90^\circ=(2-3)\times 90^\circ=-90^\circ$；

从起点和终点的相位变化即可知找不到对应的图形。

（3）． $G_3(s)=\dfrac{K(0.1s+1)}{s(s+1)}$

$$G_3(j\omega)=-K\left[\frac{0.9}{(\omega^2+1)}+j\frac{1+0.1\omega^2}{\omega(\omega^2+1)}\right]$$

$$U_3(\omega)=-\frac{0.9K}{(\omega^2+1)}$$

$$V_3(\omega)=-K\frac{1+0.1\omega^2}{\omega(\omega^2+1)}$$

起点：$\omega \to 0^+$：$|G_3(j\omega)| = \infty$，$\phi_3(\omega) = -1\times 90^\circ = -90^\circ$，$U_3(\omega) = -0.9K$，$V_3(\omega) = -\infty$；

终点：$\omega \to +\infty$：$|G_3(j\omega)| = 0$，$\phi_3(\omega) = (m-n)\times 90^\circ = (1-2)\times 90^\circ = -90^\circ$；

中间变化过程：幅值、实部和虚部的绝对值单调下降；实部和虚部恒小于 0，位于第三象限；转角频率从小到大排列：惯性环节、一阶微分，相位先减少后增加；
e)相近，但实起点部和实部的变化规律不符。找不到对应的图形。

（4）． $G_4(s) = \dfrac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

$$G_4(j\omega) = K\left[\frac{6-6\omega^2}{\left((6-6\omega^2)^2 + (11\omega-\omega^3)^2\right)} - j\frac{11\omega-\omega^3}{\left((6-6\omega^2)^2 + (11\omega-\omega^3)^2\right)}\right]$$

$$|G_4(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{4+\omega^2}\sqrt{9+\omega^2}}$$

$$U_4(\omega) = K\frac{6-6\omega^2}{\left((6-6\omega^2)^2 + (11\omega-\omega^3)^2\right)}$$

$$V_4(\omega) = -K\frac{11\omega-\omega^3}{\left((6-6\omega^2)^2 + (11\omega-\omega^3)^2\right)}$$

起点：$\omega \to 0^+$：$|G_4(j\omega)| = \dfrac{K}{6}$，$\phi_4(\omega) = -0\times 90^\circ = 0^\circ$，$U_4(\omega) = \dfrac{K}{6}$，$V_4(\omega) = 0$；

终点：$\omega \to +\infty$：$|G_4(j\omega)| = 0$，$\phi_4(\omega) = (m-n)\times 90^\circ = (0-3)\times 90^\circ = -270^\circ$；

中间变化过程：$U_4(\omega) = K\dfrac{6-6\omega^2}{\left((6-6\omega^2)^2 + (11\omega-\omega^3)^2\right)} = 0$，得：$\omega = \pm 1$，取正值，则

$V_4(\omega) = -K\dfrac{11-1}{\left((11-1)^2\right)} = -K$ ； $V_4(\omega) = -K\dfrac{11\omega-\omega^3}{\left((6-6\omega^2)^2 + (11\omega-\omega^3)^2\right)} = 0$ ， 得 ：

$\omega = \pm\sqrt{11}, \omega = 0$，取正值，则$U_4(\omega) = K\dfrac{6-6\times 11}{\left((6-6\times 11)^2 + \left(11\sqrt{11} - \left(\sqrt{11}\right)^3\right)^2\right)} = -\dfrac{K}{60}$ 幅值单调下降；全部为惯性环节，相位单调减少；$\phi_4(\omega) = 0^\circ \to -270^\circ$

对应的图形为 a)。

（5）． $G_5(s) = \dfrac{K}{s(s+1)(0.5s+1)}$

起点：$\omega \to 0^+$：$|G_5(j\omega)| = \infty$，$\phi_5(\omega) = -1\times 90^\circ = -90^\circ$；

终点：$\omega \to +\infty$：$\left|G_5(j\omega)\right| = 0$，$\phi_5(\omega) = (m-n)\times 90^\circ = (0-3)\times 90^\circ = -270^\circ$；

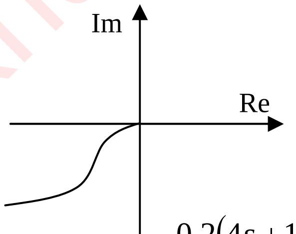
从起点和终点的相位变化即可知找不到对应的图形。

（6）． $G_6(s) = \dfrac{K}{(s+1)(s+2)}$

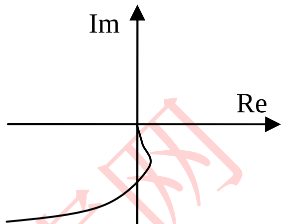
起点：$\omega \to 0^+$：$\left|G_6(j\omega)\right| = \dfrac{K}{2}$，$\phi_6(\omega) = -0\times 90^\circ = 0^\circ$；

终点：$\omega \to +\infty$：$\left|G_6(j\omega)\right| = 0$，$\phi_6(\omega) = (m-n)\times 90^\circ = (0-2)\times 90^\circ = -180^\circ$；

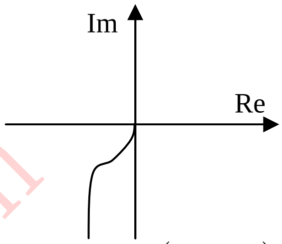
从起点和终点的相位变化即可知找不到对应的图形。



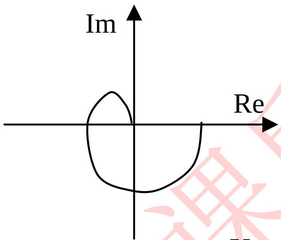
1) $G_1(s) = \dfrac{0.2(4s+1)}{s^2(0.4s+1)}$



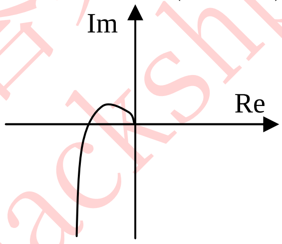
2) $G_2(s) = \dfrac{0.14(9s^2+5s+1)}{s^2(0.3s+1)}$



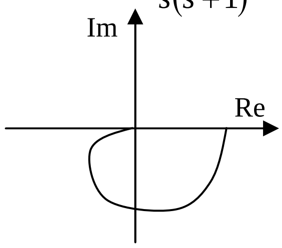
3) $G_3(s) = \dfrac{K(0.1s+1)}{s(s+1)}$



4) $G_4(s) = \dfrac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}$



5) $G_5(s) = \dfrac{K}{s(s+1)(0.5s+1)}$



6) $G_6(s) = \dfrac{K}{(s+1)(s+2)}$

4-4．试画出下列传递函数的伯德图。

（1）． $G_1(s) = \dfrac{20}{s(0.5s+1)(0.1s+1)}$

（2）． $G_2(s) = \dfrac{2s^2}{(0.4s+1)(0.04s+1)}$

（3）． $G_3(s) = \dfrac{50(0.6s+1)}{s^2(4s+1)}$

（4）． $G_4(s) = \dfrac{7.5(0.2s+1)(s+1)}{s(s^2+16s+100)}$

解：

（1）． $G_1(s)=\dfrac{20}{s(0.5s+1)(0.1s+1)}$

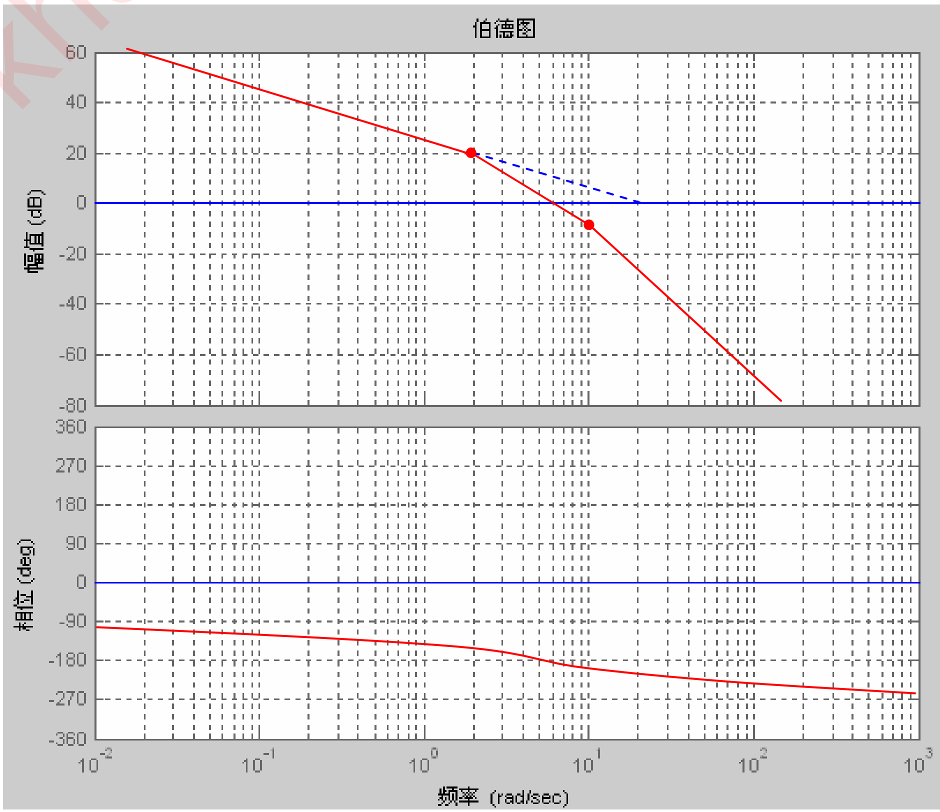
环节	惯性	惯性
转角频率	2	10
斜率（dB/dec）	-20	-20
相位	0^o ～-90^o	0^o ～-90^o

对数幅频特性：

起始段：-20dB/dec，过（0，20）

对数相频特性：

-90^o ～-270^o



（2）． $G_2(s)=\dfrac{2s^2}{(0.4s+1)(0.04s+1)}$

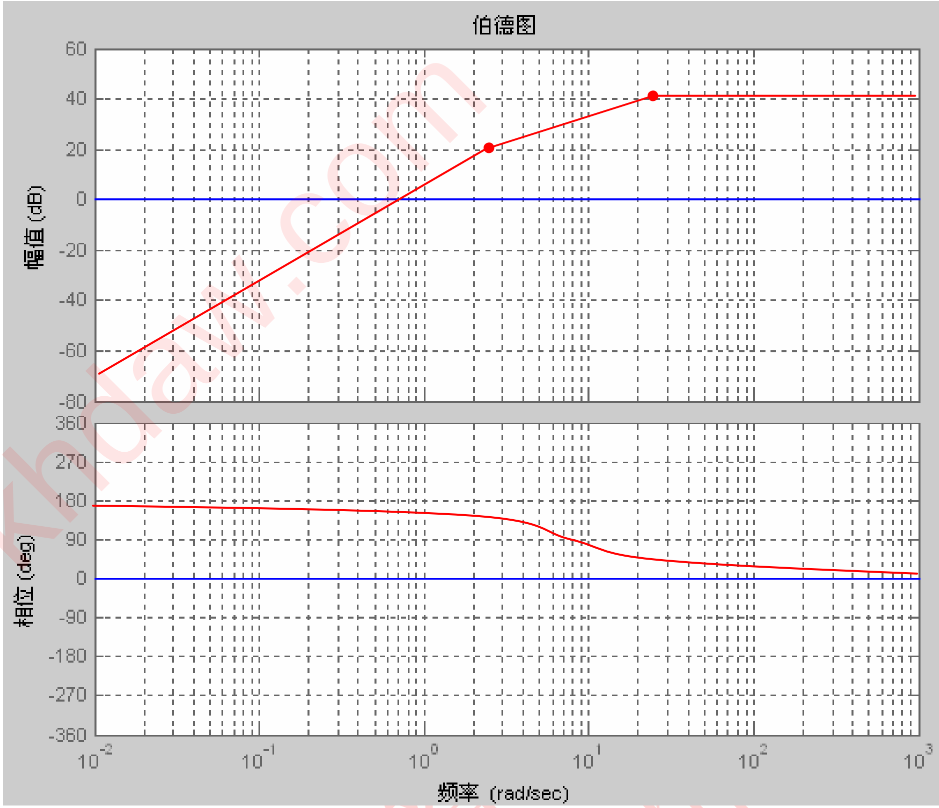
环节	惯性	惯性
转角频率	25	2.5
斜率（dB/dec）	-20	-20
相位	0^o ～-90^o	0^o ～-90^o

对数幅频特性：

起始段：40dB/dec，过（0，0.707）

对数相频特性：

180^o ～0^o



（3）． $G_3(s)=\dfrac{50(0.6s+1)}{s^2(4s+1)}$

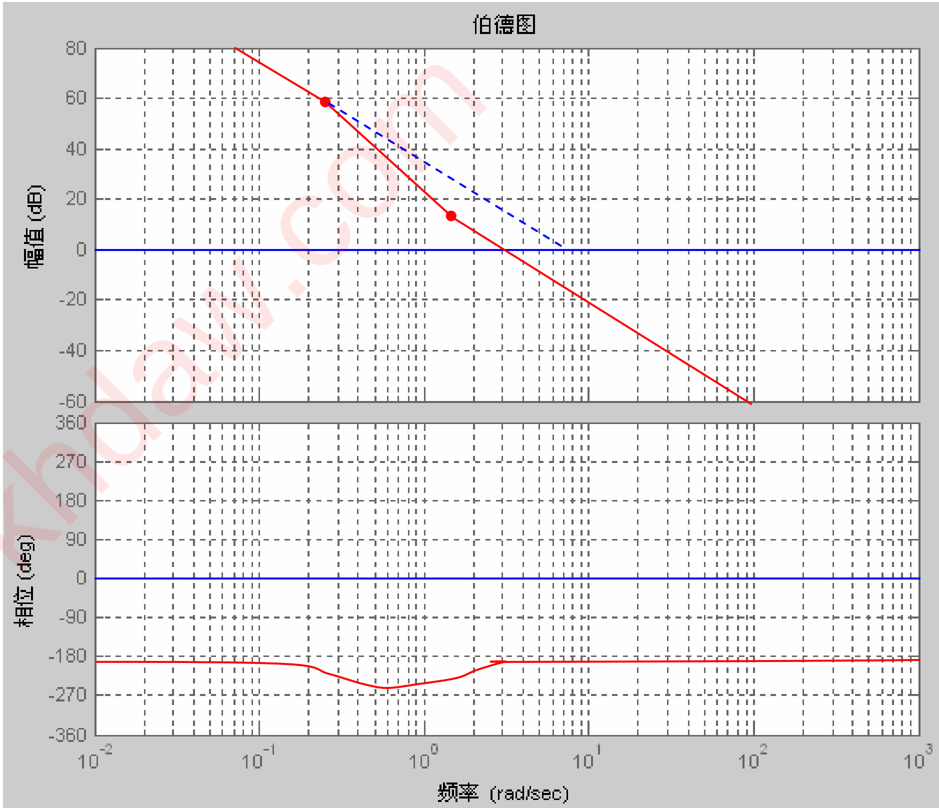
环节	惯性	一阶微分
转角频率	0. 25	1. 33
斜率（dB/dec）	-20	20
相位	0° ～-90°	0° ～90°

对数幅频特性：

起始段：40dB/dec，过（0，7. 07）

对数相频特性：

-180° ～-180°，先减后增。



（4）． $G_4(s)=\dfrac{7.5(0.2s+1)(s+1)}{s(s^2+16s+100)}$

$$G_4(s)=\frac{0.075(0.2s+1)(s+1)}{s((0.1s)^2+0.16s+1)}$$

环节	一阶微分	一阶微分	振荡环节
转角频率	1	5	10
斜率（dB/dec）	20	20	-40
相位	0º ～90º	0º ～90º	0º ～-180º

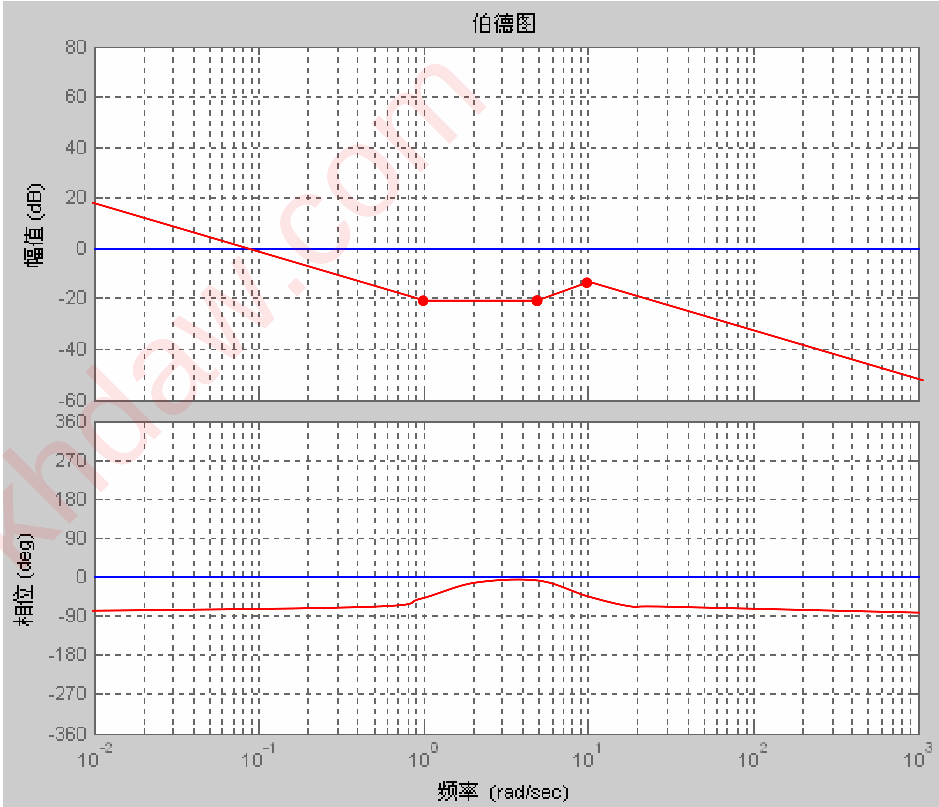
对数幅频特性：

起始段：-20dB/dec，过（1，-22.5）。

ζ=0.8 不必进行修正。

对数相频特性：

-90º ～-90º，先增后减。



4-5．某单位反馈的二阶Ⅰ型系统，其最大超调量为 16.3%，峰值时间为 114.6ms，试求其开环传递函数，并求出闭环谐振峰值M_r和谐振频率ω_r。

解：$\sigma_p\% = e^{-\frac{\varsigma\pi}{\sqrt{1-\varsigma^2}}} = 0.163$

$\varsigma = 0.5$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\varsigma^2}} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-0.5^2}} = 0.1146$$

$\omega_n = 31.65 rad/s$

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\varsigma\omega_n s} = \frac{1336}{s(s+36.55)} = \frac{36.55}{s(0.027s+1)}$$

$$M_r = \frac{1}{2\varsigma\sqrt{1-\varsigma^2}} = \frac{1}{2\times0.5\sqrt{1-0.5^2}} = 1.15$$

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\varsigma^2} = 31.65\sqrt{1-2\times0.5^2} = 22.38 rad/s$$

4-6．某单位反馈系统的开环传递函数$G(s) = \dfrac{K}{s(s+a)}$，试求出满足

$M_r = 1.04$，$\omega_r = 11.55 rad/s$ 的 K 和 a 值，并计算系统取此参数时的频宽和调整时间。

解：$G(s) = \dfrac{\left(\sqrt{K}\right)^2}{s\left(s + 2\sqrt{K}\dfrac{a}{2\sqrt{K}}\right)}$

$$\zeta = \frac{a}{2\sqrt{K}}$$
$$\omega_n = \sqrt{K}$$

$$M_r = \frac{1}{2\varsigma\sqrt{1-\varsigma^2}} = 1.04$$
$$\zeta^4 - \zeta^2 + 0.2311 = 0$$
$$\zeta = \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\times 0.2311}}{2}} = \sqrt{\frac{1 \pm 0.275}{2}} = \begin{cases} 0.798 \\ 0.6 \end{cases}$$

因 $\zeta < 0.707$，所以取 $\zeta = 0.6$

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\varsigma^2} = \omega_n\sqrt{1-2\times 0.6^2} = 11.55$$
$$\omega_n = 21.83 rad/s$$

$$K = \omega_n{}^2 = 21.83^2 = 476.55 s^{-2}$$
$$a = 2\zeta\omega_n = 2\times 0.6\times 21.83 = 26.196 s^{-1}$$

$$G(s) = \frac{K}{s(s+a)} = \frac{476.55}{s(s+26.196)}$$

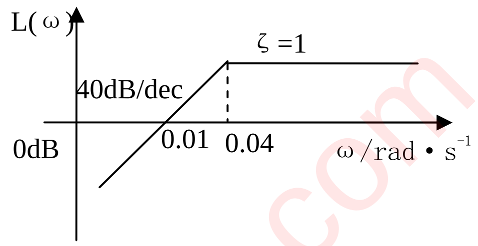
$$\omega_b = \omega_n\sqrt{1-2\varsigma^2+\sqrt{2-4\varsigma^2+4\varsigma^4}}$$
$$= \omega_n\sqrt{1-2\times 0.6^2+\sqrt{2-4\times 0.6^2+4\times 0.6^4}} = 25.07 rad/s$$

频宽：$\omega_{BW} = 0 \cdots 25.07(rad/s)$

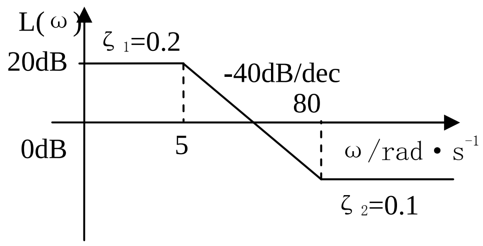
允许误差为 2%时的调整时间：$t_s = \dfrac{4}{\varsigma\omega_n} = \dfrac{4}{0.6\times 21.83} = 0.305s$

允许误差为 5%时的调整时间：$t_s = \dfrac{3}{\varsigma\omega_n} = \dfrac{3}{0.6\times 21.83} = 0.229s$

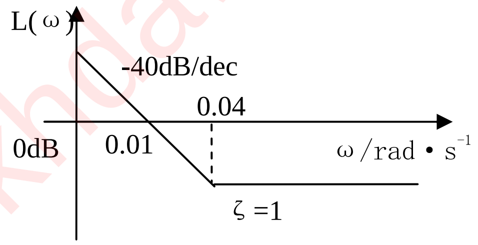
4-7．对于图 4-31 所示的最小相位系统，试写出其传递函数。



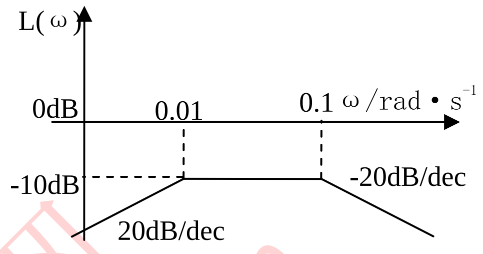
a)



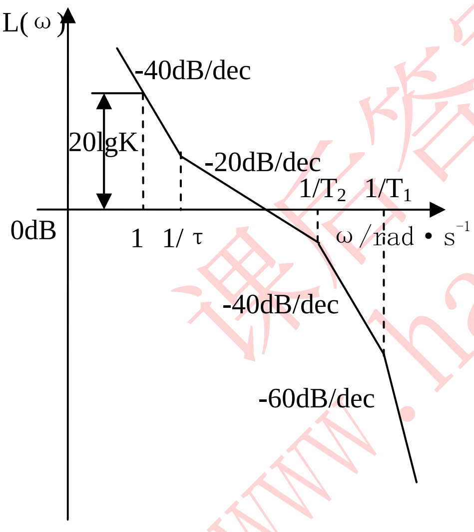
b)



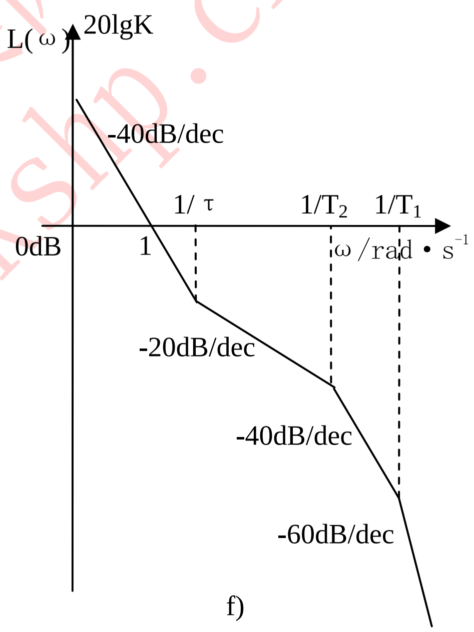
c)



d)



e)



f)

解：

a) $G(s)=\dfrac{10000s^2}{\left((25s)^2+50s+1\right)}$，$\left(20\lg K\omega^2=0, K=\dfrac{1}{\omega^2}=\dfrac{1}{0.01^2}=10000\right)$

b) $G(s)=\dfrac{10\left(\left(\dfrac{1}{80}s\right)^2+\dfrac{1}{400}s+1\right)}{\left(\left(\dfrac{1}{5}s\right)^2+\dfrac{2}{25}s+1\right)}$，$\left(20\lg K=20, K=10\right)$

c) $G(s)=\dfrac{0000.1\left((25s)^2+50s+1\right)}{s^2}$， $\left(\omega=K^{\frac{1}{\lambda}}, K=\omega^{\lambda}=0.01^2=0.0001\right)$

d) $G(s)=\dfrac{31.62s}{(100s+1)(10s+1)}$，

$$\left(20\lg K\omega=-10, K=\frac{10^{-\frac{1}{2}}}{\omega}=\frac{1}{0.01\sqrt{10}}=10\sqrt{10}=31.62\right)$$

e) $G(s)=\dfrac{K(\tau s+1)}{s^2(T_2s+1)(T_1s+1)}$

f) $G(s)=\dfrac{(\tau s+1)}{s^2(T_2s+1)(T_1s+1)}$

控制工程基础习题解答

第五章

5-1．已知开环系统的传递函数如下，试用罗斯-赫尔维茨判据判别其闭环稳定性。

（1）． $G(s)H(s)=\dfrac{10(s+1)}{s(s+2)(s+3)}$

（2）． $G(s)H(s)=\dfrac{0.2(s+2)}{s(s+0.5)(s+0.8)(s+3)}$

（3）． $G(s)H(s)=\dfrac{100}{s^2(300s^2+600s+50)}$

（4）． $G(s)H(s)=\dfrac{3s+1}{s^2(s^2+8s+24)}$

解：

（1）． 特征方程为 $s^3+5s^2+16s+10=0$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 16 \\ s^2 & 5 & 10 \\ s^1 & 14 & 0 \\ s^0 & 10 & \end{array}$$

第一列全部大于零，所以闭环稳定。

（2）． 特征方程为 $s^4+4.3s^3+4.3s^2+1.4s+0.4=0$

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 4.3 & 0.4 \\ s^3 & 4.3 & 1.4 & \\ s^2 & 3.97 & 0.4 & \\ s^1 & 0.97 & & \\ s^0 & 0.4 & & \end{array}$$

第一列全部大于零，所以闭环稳定。

（3）． 特征方程为 $300s^4+600s^3+50s^2+100=0$

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 300 & 50 & 100 \\ s^3 & 600 & 0 & \\ s^2 & 50 & 100 & \\ s^1 & -1200 & 0 & \\ s^0 & 100 & 0 & \end{array}$$

第一列有小于零的数存在，所以闭环不稳定，符号变化了两次，有两个右极点。

（4）．　特征方程为 $s^4 + 8s^3 + 24s^2 + 3s + 1 = 0$

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 24 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 24 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 1 & 24 \end{vmatrix} = 189$$

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 & 0 \\ 1 & 24 & 1 \\ 0 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 503$$

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 24 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 24 & 1 \end{vmatrix} = 503$$

所有主子行列式全大于零，所以闭环稳定。

5-2．已知单位负反馈系统的开环传递函数如下

$$G(s) = \frac{K}{s\left(\dfrac{s^2}{\omega_n{}^2} + \dfrac{2\zeta s}{\omega_n} + 1\right)}$$

式中 $\omega_n = 90 rad/s$， $\zeta = 0.2$。试确定 K 取何值闭环稳定。

解：

方法 1：特征方程为 $s^3 + 36s^2 + 8100s + 8100K = 0$

$$\begin{vmatrix} 36 & 8100K & 0 \\ 1 & 8100 & 0 \\ 0 & 36 & 8100K \end{vmatrix} = 36 \times 8100^2 K - 8100^2 K^2 \geq 0$$

$K \geq 0$

$K \leq 36$

$$\begin{vmatrix} 36 & 8100K \\ 1 & 8100 \end{vmatrix} = 36 \times 8100 - 8100K \geq 0$$

$K \leq 36$

得当$0 < K < 36$时，闭环稳定，当 36 时，闭环临界稳定。

方法 2：特征方程为$s^3 + 36s^2 + 8100s + 8100K = 0$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 8100 \\ s^2 & 36 & 8100K \\ s^1 & 8100 - \dfrac{8100K}{36} & 0 \\ s^0 & 8100K & \end{array}$$

$$8100 - \frac{8100K}{36} \geq 0$$

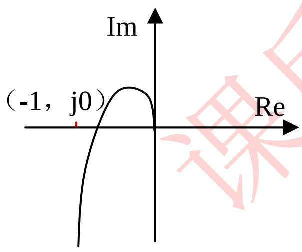
$K \leq 36$

$8100K \geq 0$

$K \geq 0$

得当$0 < K < 36$时，闭环稳定，当 36 时，闭环临界稳定。

方法 3： 奈氏判据



$$G(j\omega) = -\frac{K}{\omega}\left[\frac{\dfrac{2\zeta\omega}{\omega_n}}{\left(1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(\dfrac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2} + j\frac{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left(1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(\dfrac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2}\right]$$

$$U(\omega) = -\frac{K}{\omega}\frac{\dfrac{2\zeta\omega}{\omega_n}}{\left(1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(\dfrac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$V(\omega)=-\frac{K}{\omega}\frac{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2+\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

临界稳定时：$$V(\omega_g)=-\frac{K}{\omega_g}\frac{1-\left(\frac{\omega_g}{\omega_n}\right)^2}{\left(1-\left(\frac{\omega_g}{\omega_n}\right)^2\right)^2+\left(\frac{2\zeta\omega_g}{\omega_n}\right)^2}=0$$

$$\omega_g=\omega_n$$

$$\omega_c=\omega_g$$

$$U(\omega_c)=-\frac{K}{\omega_c}\frac{\frac{2\zeta\omega_c}{\omega_n}}{\left(1-\left(\frac{\omega_c}{\omega_n}\right)^2\right)^2+\left(\frac{2\zeta\omega_c}{\omega_n}\right)^2}\geq -1$$

$$K\leq\frac{(2\zeta)^2}{\frac{2\zeta}{\omega_n}}=\frac{0.4^2}{\frac{0.4}{90}}=36$$

或临界稳定时：

$$\phi(\omega_g)=-90^\circ+\arctan\frac{1-\left(\frac{\omega_g}{\omega_n}\right)^2}{\frac{2\zeta\omega_g}{\omega_n}}=-180^\circ$$

$$1-\left(\frac{\omega_g}{\omega_n}\right)^2=0$$

$$\omega_g=\omega_n$$

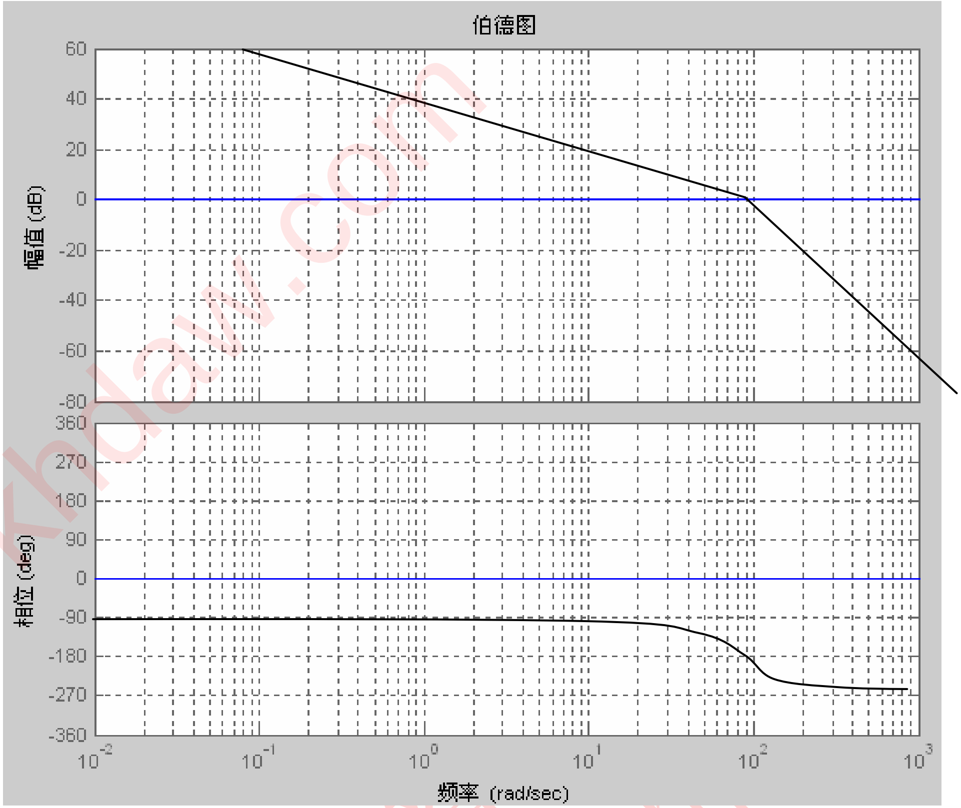
$$|G(j\omega_c)|=\frac{K}{\omega_c}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega_g}{\omega_n}\right)^2\right)^2+\left(\frac{2\zeta\omega_g}{\omega_n}\right)^2}}=1$$

$$\omega_g=\omega_c$$

$$K=\omega_c\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega_c}{\omega_n}\right)^2\right)^2+\left(\frac{2\zeta\omega_c}{\omega_n}\right)^2}=2\zeta\omega_n=36$$

得当 $0<K<36$ 时，闭环稳定，当 36 时，闭环临界稳定。

方法 4： 对数判据



由于 K 的变化不会影响相位，所以由图可得：$K<90$，即当 $0<K<90$ 时，闭环稳定，当 36 时，闭环临界稳定。

5-3．已知系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{10K(s+1)}{s(s-1)}$$

试确定闭环系统稳定时 K 的临界值。

解：特征方程为 $s^2+(10K-1)s+10K=0$

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & 10K \\ s^1 & 10K-1 & \\ s^0 & 10K & \end{array}$$

得：
$$\begin{aligned} &10K-1\geq 0 \\ &K\geq 0.1 \\ &10K\geq 0 \\ &K\geq 0 \end{aligned}$$

综合得闭环系统稳定时 K 的临界值：$K=0.1$

5-4．对于有如下特征方程的反馈控制系统，试用代数判据求系统稳定的 K 值。

（1）．　$s^4+22s^3+10s^2+2s+K=0$

（2）．　$s^4+20Ks^3+5s^2+(10+K)s+15=0$

（3）．　$s^3+(K+0.5)s^2+4Ks+50=0$

（4）．　$s^4+Ks^3+s^2+s+1=0$

解：

（1）．　$s^4+22s^3+10s^2+2s+K=0$

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 10 & K \\ s^3 & 22 & 2 & \\ s^2 & 9.9 & K & \\ s^1 & 2-2.22K & 0 & \\ s^0 & K & 0 & \end{array}$$

得：

$$\begin{aligned} &2-2.22K\ge 0 \\ &K\le 0.9 \\ &K\ge 0 \\ &K\ge 0 \end{aligned}$$

即：$0\le K\le 0.9$

（2）．　$s^4+20Ks^3+5s^2+(10+K)s+15=0$

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 5 & 15 \\ s^3 & 20K & 10+K & \\ s^2 & \dfrac{99K-10}{20K} & 15 & \\ s^1 & \left[\dfrac{(99K-10)(10+K)}{20K}-300K\right]\dfrac{20K}{(99K-10)} & 0 & \\ s^0 & 15 & 0 & \end{array}$$

得：

$20K\ge 0$

$\dfrac{99K-10}{20K}\ge 0$

$K\ge 0.101$

$\left[\dfrac{(99K-10)(10+K)}{20K}-300K\right]\dfrac{20K}{(99K-10)}\ge 0$

$-5901K^2+980K-100\ge 0$

方程无解，故无论 K 取何值，系统都不稳定。

（3）．　$s^3+(K+0.5)s^2+4Ks+50=0$

$$\begin{vmatrix} K+0.5 & 50 & 0 \\ 1 & 4K & 0 \\ 0 & K+0.5 & 50 \end{vmatrix} = 200K(K+0.5) - 2500 \ge 0$$

$$\begin{vmatrix} K+0.5 & 50 \\ 1 & 4K \end{vmatrix} = 4K(K+0.5) - 50 \ge 0$$

$K + 0.5 \ge 0$

$K \ge -0.5$

$4K \ge 0$

$K \ge 0$

$2K^2 + K - 25 \ge 0$

$$K \le \frac{-1-\sqrt{1+200}}{4} = -3.79$$

$$K \ge \frac{-1+\sqrt{1+200}}{4} = 3.29$$

（4）. $s^4 + Ks^3 + s^2 + s + 1 = 0$

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 1 & 1 \\ s^3 & K & 1 & \\ s^2 & \dfrac{K-1}{K} & 1 & \\ s^1 & \left[\dfrac{K-1}{K} - K\right]\dfrac{K}{K-1} & 0 & \\ s^0 & 1 & 0 & \end{array}$$

得：
$K \ge 0$

$K - 1 \ge 0$

$\dfrac{K-1}{K} - K \ge 0$

$-K^2 + K - 1 \ge 0$

方程无解，故无论 K 取何值，系统都不稳定。

5-5．设闭环系统特征方程如下，试确定有几个根在右半[s]平面。

（1）． $s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24 = 0$

（2）． $s^4 + 2s^3 + 10s^2 + 24s + 80 = 0$

（3）． $s^3 - 15s^2 + 126 = 0$

（4）． $s^5 + 3s^4 - 3s^3 - 9s^2 - 4s - 12 = 0$

解：

（1）． $s^4+10s^3+35s^2+50s+24=0$

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 35 & 24 \\ s^3 & 10 & 50 & \\ s^2 & 30 & 24 & \\ s^1 & 42 & 0 & \\ s^0 & 24 & 0 & \end{array}$$

第一列系数全为零，所以没有根在右半[s]平面

（2）． $s^4+2s^3+10s^2+24s+80=0$

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 10 & 80 \\ s^3 & 2 & 24 & \\ s^2 & -2 & 80 & \\ s^1 & 104 & 0 & \\ s^0 & 80 & 0 & \end{array}$$

第一列系数有一个小于零，符号变化次数为 2，所以有 2 个根在右半[s]平面

（3）． $s^3-15s^2+126=0$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 0 \\ s^2 & -15 & 126 \\ s^1 & 8.4 & \\ s^0 & 126 & \end{array}$$

第一列系数有一个小于零，符号变化次数为 2，所以有 2 个根在右半[s]平面

（4）． $s^5+3s^4-3s^3-9s^2-4s-12=0$

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & -3 & -4 \\ s^4 & 3 & -9 & -12 \\ s^3 & 0 & 0 & 0 \\ s^2 & & & \\ s^1 & & & \\ s^0 & & & \end{array}$$

有一行全为零，用其上一行的系数作辅助方程：$3s^4-9s^2-12=0$

求导得：$12s^3-18s=0$，$2s^3-3s=0$，替换零得新的罗斯计算表：

$$
\begin{array}{l|lll}
s^5 & 1 & -3 & -4 \\
s^4 & 1 & -3 & -4 \\
s^3 & 2 & -3 & 0 \\
s^2 & -\frac{3}{2} & -4 & \\
s^1 & -\frac{25}{3} & & \\
s^0 & -4 & &
\end{array}
$$

第一列系数有一个小于零，符号变化次数为 1，所以有 1 个根在右半[s]平面

从辅助方程可求得其对称根：

$$s^4 - 3s^2 - 4 = 0$$

$$s^2 = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

$$s = \begin{cases} 2 \\ -2 \\ j \\ -j \end{cases}$$

5-6. 一个单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \dfrac{10(s+a)}{s(s+2)(s+3)}$，试确定：

（1）． 使系统稳定的 a 值；

（2）． 使系统特征根均落在[s]平面中 R_e=-1 这条线左边的a值。

解：

闭环传递函数为 $\phi(s) = \dfrac{10(s+a)}{s^3 + 5s^2 + 16s + 10a}$

（1）． 用罗斯判据可得：

$$
\begin{array}{l|ll}
s^3 & 1 & 16 \\
s^2 & 5 & 10a \\
s^1 & 16-2a & \\
s^0 & 10a &
\end{array}
$$

系统稳定，则应：$\begin{cases} 16 - 2a \geq 0 \\ 10a \geq 0 \end{cases}$，即 a 值应为：$0 \leq a \leq 8$

（2）． 令 $s_1 = s + 1$，即 $s = s_1 - 1$，对闭环传递函数进行变换得：

$$\phi_1(s_1) = \frac{10(s_1 + a - 1)}{s_1^{\ 3} + 2s_1^{\ 2} + 9s_1 + 10a - 12}$$

$$
\begin{array}{c|cc}
s_1^{\ 3} & 1 & 9 \\
s_1^{\ 2} & 2 & 10a-12 \\
s_1^{\ 1} & 15-5a & \\
s_1^{\ 0} & 10a-12 &
\end{array}
$$

系统稳定，则应：$\begin{cases} 15-5a \geq 0 \\ 10a-12 \geq 0 \end{cases}$，即 a 值应为：$1.2 \leq a \leq 3$

5-7. 设一单位反馈系统的开环传递函数为$G(s)=\dfrac{K}{s(Ts+1)}$，现希望系统特征方程的所有根都在 s=-a 这条线的左边区域内，试确定所需的 K 值和 T 值。

解：

令 $s_1 = s + a$，即 $s = s_1 - a$，对闭环传递函数进行变换得：

$$\phi_1(s_1)=\frac{K}{Ts_1^{\ 2}+(1-2Ta)s_1-a(1-Ta)+K}$$

$$T>0$$
$$1-2aT>0$$
$$K-a(1-aT)>0$$

$$0<T<\frac{1}{2a}$$
$$K>a(1-aT)$$

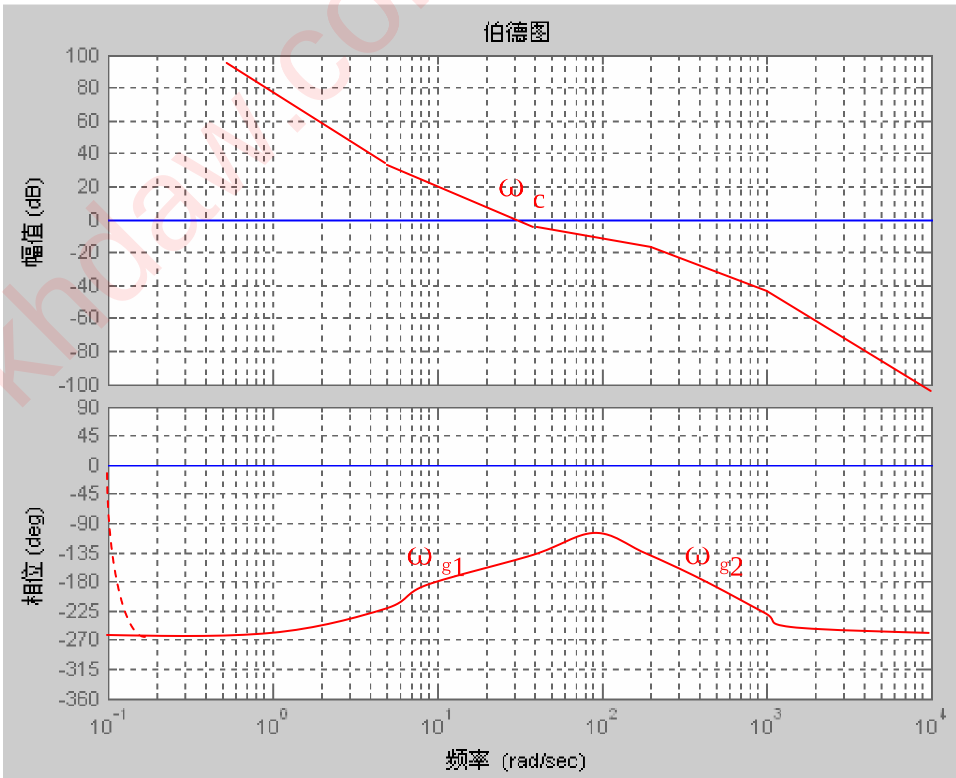
5-8. 一个单位反馈系统的开环传递函数为$G(s)=\dfrac{K(s+5)(s+40)}{s^3(s+200)(s+1000)}$，讨论当 K 变化时闭环系统的稳定性，使闭环系统持续振荡的 K 值等于多少？振荡频率为多少？

解：用对数判据。

$$G(s)=\frac{K(s+5)(s+40)}{s^3(s+200)(s+1000)}=\frac{\dfrac{K}{1000}\left(\dfrac{1}{5}s+1\right)\left(\dfrac{1}{40}s+1\right)}{s^3\left(\dfrac{1}{200}s+1\right)\left(\dfrac{1}{1000}s+1\right)}$$

起始段：-60dB/dec，-270°，$\omega=1$，$L(\omega)=20\lg K-60$

环节	一阶微分	一阶微分	惯性	惯性
转角频率	5	40	200	1000
斜率（dB/dec）	-20	-20	-20	-20
相位	0º ～-90º	0º ～-90º	0º ～-90º	0º ～-90º



开环右极点数目P_R=0，如图伯德图作辅助线，可见在中有两次负穿越和一次正穿越，分别在：

$\omega \to 0^+$ 时的负穿越、$5 < \omega < 40$ 时的正穿越、$200 < \omega < 1000$ 时的负穿越。

闭环系统稳定，则必须N=0，即幅值穿越频率ω_c应在ω_{g1}和ω_{g2}之间。

$$\phi(\omega_g) = -270^\circ + \arctan\frac{\omega_g}{5} + \arctan\frac{\omega_g}{40} - \arctan\frac{\omega_g}{200} - \arctan\frac{\omega_g}{1000} = -180^\circ$$

$$\arctan\frac{\omega_g}{5} + \arctan\frac{\omega_g}{40} - \arctan\frac{\omega_g}{200} - \arctan\frac{\omega_g}{1000} = 90^\circ$$

$$\arctan\frac{\omega_{g1}}{5} + \arctan\frac{\omega_{g1}}{40} \approx 90^\circ$$

$$\arctan\frac{\dfrac{9\omega_{g1}}{40}}{1-\dfrac{\omega_{g1}^{\ 2}}{200}} \approx 90^\circ$$

$$\omega_{g1} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

$$\arctan\frac{\omega_{g2}}{200} + \arctan\frac{\omega_{g2}}{1000} \approx 90^\circ$$

$$\arctan\frac{\dfrac{6\omega_{g2}}{1000}}{1-\dfrac{\omega_{g2}^{\ 2}}{200\times1000}} \approx 90^\circ$$

$$\omega_{g2} = \sqrt{200\times1000} = 200\sqrt{5}$$

$$L(\omega_c) = L(\omega_{g1}) \approx 20\left(\lg K - 3\lg\omega_{g1} - 3 + \lg\frac{\omega_{g1}}{5}\right) = 0$$

$$K = 1000\frac{5\omega_{g1}^{\ 3}}{\omega_{g1}} = 5000\omega_{g1}^{\ 2} = 1\times10^6$$

$$L(\omega_c) = L(\omega_{g2}) \approx 20\left(\lg K - 3\lg\omega_{g2} - 3 + \lg\frac{\omega_{g2}}{5} + \lg\frac{\omega_{g2}}{40} - \lg\frac{\omega_{g2}}{200}\right) = 0$$

$$K = 1000\frac{5\omega_{g2}^{\ 3}}{\omega_{g2}}\frac{40}{\omega_{g2}}\frac{\omega_{g2}}{200} = 1000\omega_{g2}^{\ 2} = 2\times10^8$$

即当$1\times10_6 < K < 2\times10^8$时系统稳定

系统持续振荡：

$\omega_1 = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$，$K_1 = 1\times10^6$；

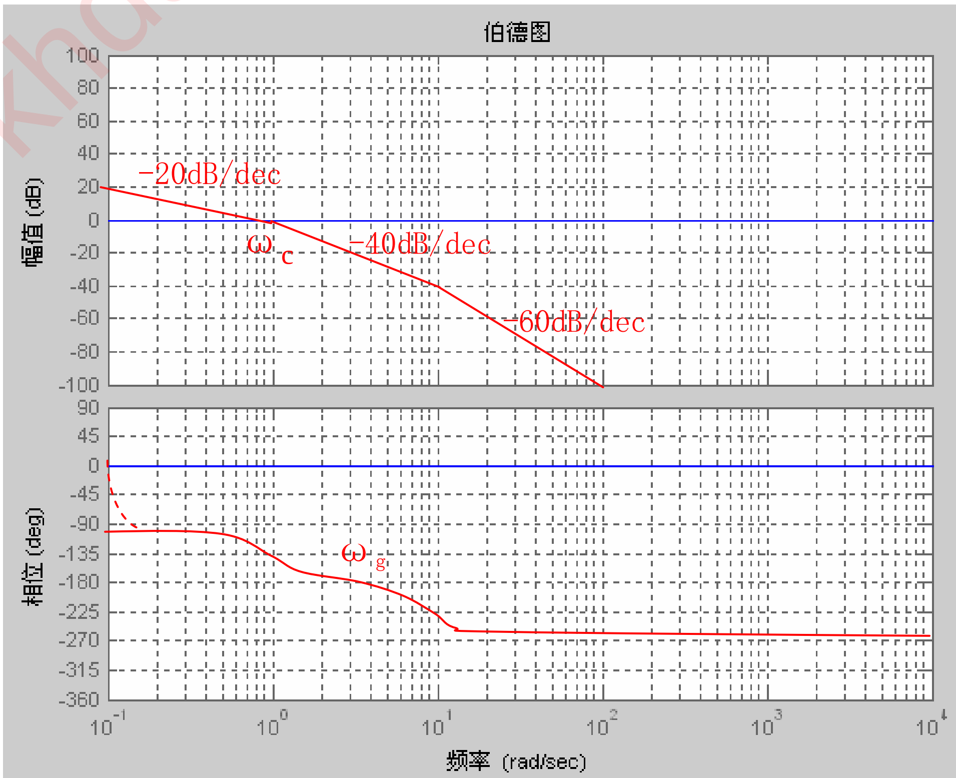
$\omega_2 = \sqrt{200\times1000} = 200\sqrt{5}$，$K_2 = 2\times10^8$。

5-8．设系统的开环传递函数为$G(s)H(s) = \dfrac{10}{s(s+1)(s+10)}$，试画出其伯德图，并确定系统稳定否。

解：$G(s)H(s)=\dfrac{10}{s(s+1)(s+10)}=\dfrac{1}{s(s+1)\left(\dfrac{1}{10}s+1\right)}$

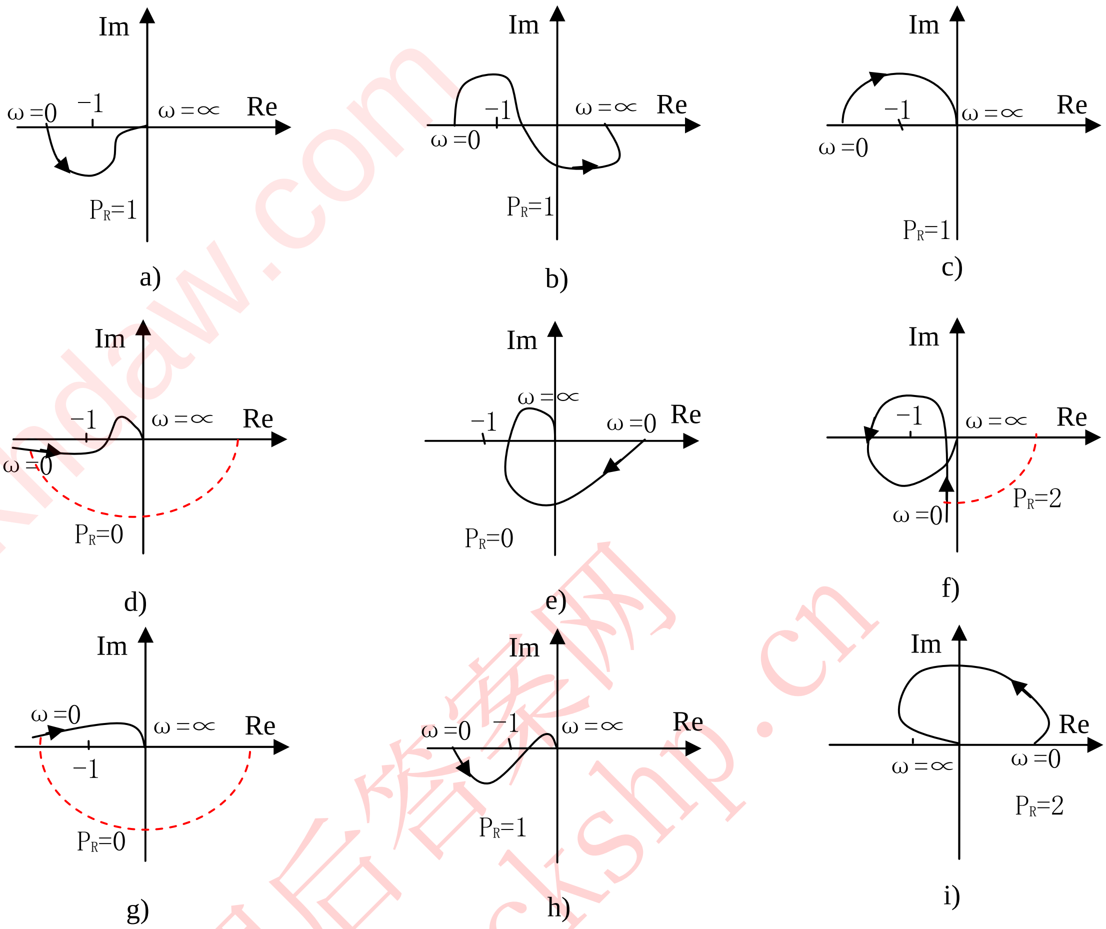
起始段：-20dB/dec,-90º，$\omega=1$，$L(\omega)=0$

环节	惯性	惯性
转角频率	1	10
斜率（dB/dec）	-20	-20
相位	0º ～-90º	0º ～-90º



开环右极点数目P_R=0，如图伯德图作辅助线，可见在幅值穿越频率前，没有发生相位穿越，故N=0，闭环系统无右极点，系统稳定。

5-10．设系统的开环频率特性如图 5-19 所示，试判别其闭环系统的稳定性。



解：

a）$P_R=1$，$N=1/2$，$Z_R=P_R-2N=0$，稳定。

b）$P_R=1$，$N=-1/2$，$Z_R=P_R-2N=2$，不稳定。

c）$P_R=1$，$N=-1/2$，$Z_R=P_R-2N=2$，不稳定。

d）$P_R=0$，作辅助线，$N=0$，$Z_R=P_{R2}-N=0$，稳定。

e）$P_R=0$，$N=0$，$Z_R=P_R-2N=0$，稳定。

f）$P_R=2$，作辅助线，$N=1$，$Z_R=P_R-2N=0$，稳定。

g）$P_R=0$，作辅助线，$N=-1$，$Z_R=P_R-2N=2$，不稳定。

h）$P_R=1$，$N=1/2$，$Z_R=P_R-2N=0$，稳定。

i）$P_R=2$，$N=0$，$Z_R=P_R-2N=2$，不稳定。

5-11．对于下列系统，试画出其伯德图，求出相角裕量 γ 和增益裕量 K_g，并判断其稳定性。

（1）．
$$G(s)H(s)=\frac{250}{s(0.02s+1)(0.005s+1)}$$

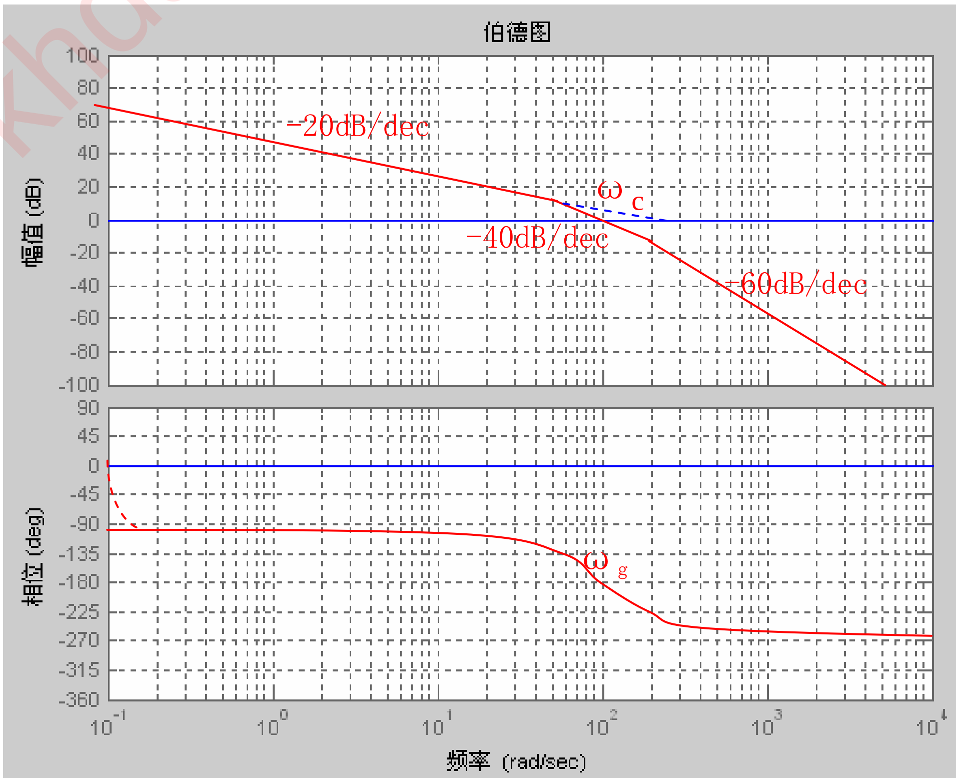
（2）．
$$G(s)H(s)=\frac{250(0.5s+1)}{s(10s+1)(0.02s+1)(0.005s+1)}$$

解：

（1）． $G(s)H(s)=\dfrac{250}{s(0.02s+1)(0.005s+1)}$

起始段：-20dB/dec，-90°， $L(\omega)=0$， $\omega=250$

环节	惯性	惯性
转角频率	50	200
斜率（dB/dec）	-20	-20
相位	0° ～-90°	0° ～-90°



$$\phi(\omega_g)=-90^{\circ}-\arctan\frac{\omega_g}{50}-\arctan\frac{\omega_g}{200}=-180^{\circ}$$

$$\arctan\frac{\omega_g}{50}+\arctan\frac{\omega_g}{200}=90^{\circ}$$

$$\arctan\frac{\dfrac{\omega_g}{40}}{1-\dfrac{\omega_g{}^2}{10000}}=90^{\circ}$$

$$\omega_g=\sqrt{10000}=100$$

$$L(\omega_g)=20\left(\lg 250-\lg\omega_g-\lg\sqrt{\left(\frac{\omega_g}{50}\right)^2+1}-\lg\sqrt{\left(\frac{\omega_g}{200}\right)^2+1}\right)$$

$$=20\left(\lg 250-\lg 100-\lg\sqrt{\left(\frac{100}{50}\right)^2+1}-\lg\sqrt{\left(\frac{100}{200}\right)^2+1}\right)$$

$$=20\lg\left(2.5\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=0dB$$

可见 $\omega_g=\omega_c$，系统临界稳定。

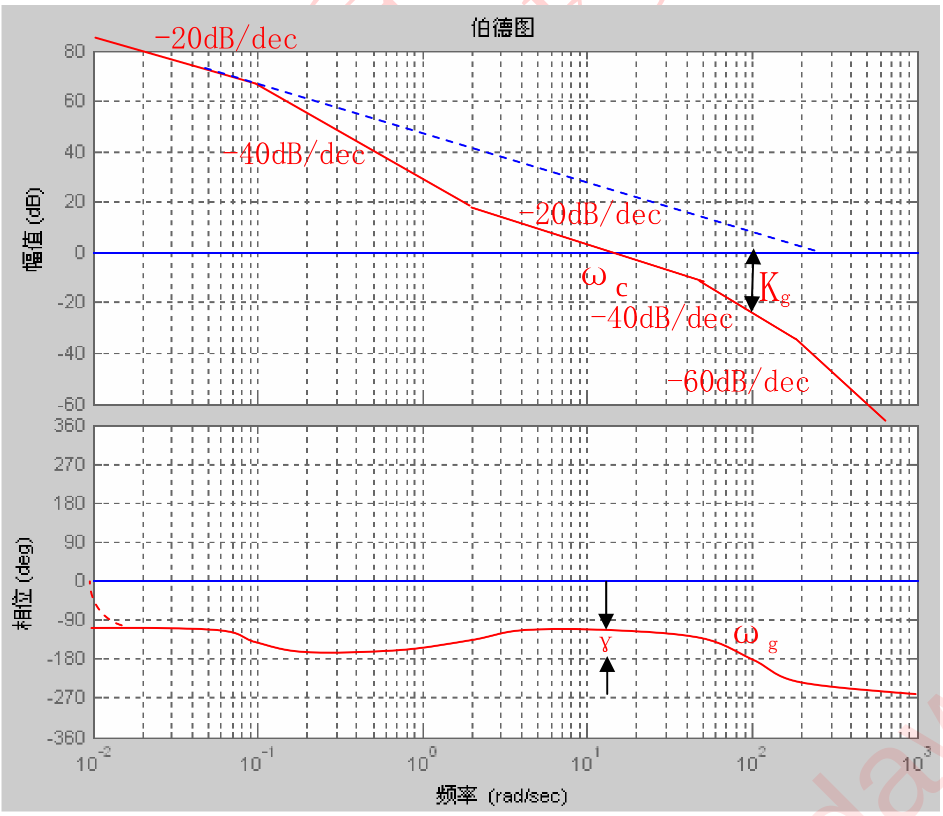
相角裕量 $\gamma=0$

增益裕量$K_g=0$

（2）． $G(s)H(s)=\dfrac{250(0.5s+1)}{s(10s+1)(0.02s+1)(0.005s+1)}$

起始段：-20dB/dec, -90^o， $L(\omega)=0$， $\omega=250$

环节	惯性	一阶微分	惯性	惯性
转角频率	0．1	2	50	200
斜率（dB/dec）	-20	20	-20	-20
相位	$0^o\sim-90^o$	$0^o\sim90^o$	$0^o\sim-90^o$	$0^o\sim-90^o$



$$\phi(\omega_g)=-90^\circ-\arctan 10\omega_g+\arctan\frac{\omega_g}{2}-\arctan\frac{\omega_g}{50}-\arctan\frac{\omega_g}{200}=-180^\circ$$

$$\arctan\frac{\omega_g}{50}+\arctan\frac{\omega_g}{200}\approx 90^\circ$$

$$\arctan\frac{\dfrac{\omega_g}{40}}{1-\dfrac{\omega_g^{\,2}}{10000}}=90^\circ$$

$$\omega_g=\sqrt{10000}=100$$

$$L(\omega_g)=20\left(\lg 250-\lg\omega_g-\lg\sqrt{(10\omega_g)^2+1}+\lg\sqrt{\left(\frac{\omega_g}{2}\right)^2+1}-\lg\sqrt{\left(\frac{\omega_g}{50}\right)^2+1}-\lg\sqrt{\left(\frac{\omega_g}{200}\right)^2+1}\right)$$

$$=20\left(\lg 250-\lg 100-\lg\sqrt{(10\times 100)^2+1}+\lg\sqrt{\left(\frac{100}{2}\right)^2+1}-\lg\sqrt{\left(\frac{100}{50}\right)^2+1}-\lg\sqrt{\left(\frac{100}{200}\right)^2+1}\right)$$

$$=20\lg\left(2.5\frac{1}{\sqrt{1000001}}\frac{\sqrt{10004}}{2}\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=-26dB$$

$$K_g(dB)=-L(\omega_g)=26dB$$

$$L(\omega_c)=20\left(\lg 250-\lg\omega_c-\lg\sqrt{(10\omega_c)^2+1}+\lg\sqrt{\left(\frac{\omega_c}{2}\right)^2+1}-\lg\sqrt{\left(\frac{\omega_c}{50}\right)^2+1}-\lg\sqrt{\left(\frac{\omega_c}{200}\right)^2+1}\right)=0$$

$$20\left(\lg 250-\lg\omega_c-\lg\sqrt{(10\omega_c)^2+1}+\lg\sqrt{\left(\frac{\omega_c}{2}\right)^2+1}-\lg\sqrt{\left(\frac{\omega_c}{50}\right)^2+1}\right)\approx 0$$

$$250\frac{1}{\omega_c}\frac{1}{10\omega_c}\frac{\omega_c}{2}\approx 1$$

$$\omega_c=12.5$$

$$\phi(\omega_c)=-90^\circ-\arctan 10\omega_c+\arctan\frac{\omega_c}{2}-\arctan\frac{\omega_c}{50}-\arctan\frac{\omega_c}{200}$$

$$\approx -90^\circ-\arctan 10\omega_c+\arctan\frac{\omega_c}{2}-\arctan\frac{\omega_c}{50}$$

$$=-90^\circ-\arctan 10\times 12.5+\arctan\frac{12.5}{2}-\arctan\frac{12.5}{50}$$

$$=-112.6^\circ$$

$$\gamma=180^\circ+\phi(\omega_c)=67.4^\circ$$

相角裕量 $\gamma=67.4^\circ$

增益裕量 K_g=26dB

5-12．试求系统稳定时的最大 K 值。已知闭环系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{Ke^{-0.6s}}{s+1}$$

解： $G(s)=\dfrac{Ke^{-0.6s}}{s+1}$

$$L(\omega_c)=20\left(\lg K-\lg\sqrt{(\omega_c)^2+1}\right)=0$$

$$\omega_c{}^2+1=K^2$$

$$\omega_c=\sqrt{K^2-1}$$

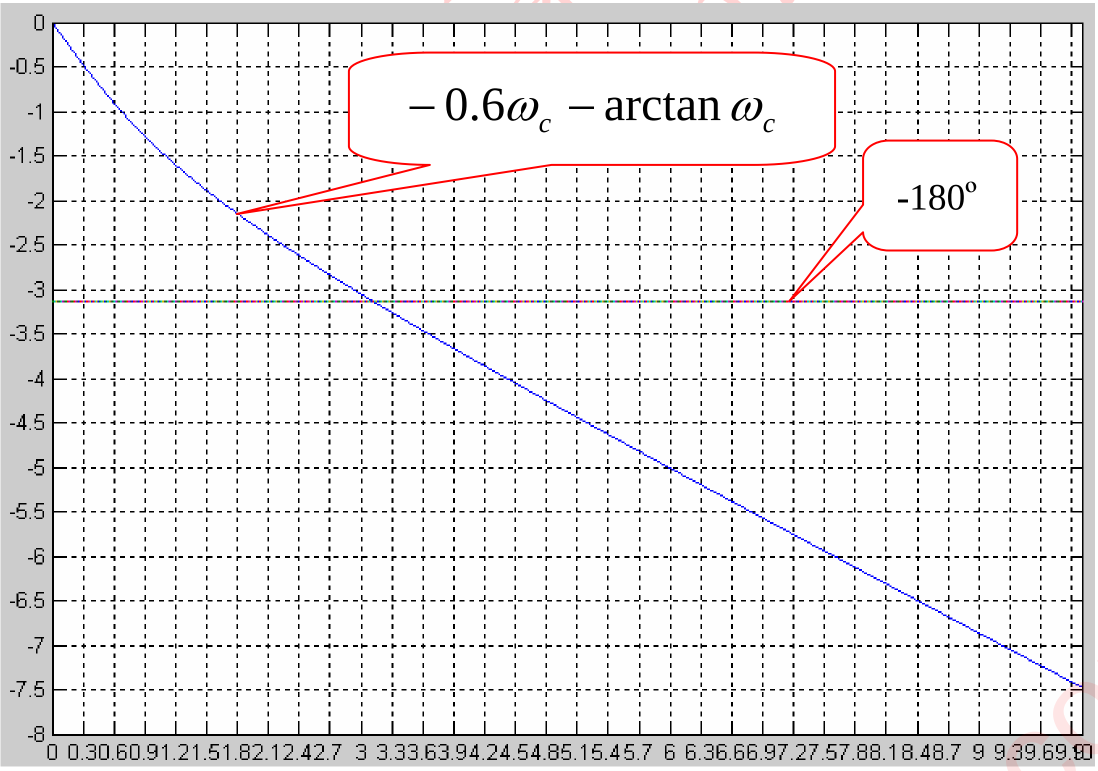
$$\omega_c=\omega_g$$

$$\phi(\omega_g)=\phi(\omega_c)=-0.6\omega_c-\arctan\omega_c=-180^\circ$$

$$\omega_c=3.1$$

$$K=\sqrt{\omega_c{}^2+1}=3.3$$

$$K_{\max}=3.3$$



5-13．已知闭环系统的开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{Ke^{-0.8s}}{s(s+1)}$，试确定系统稳定的临界 K 值。

解： $G(s)=\dfrac{Ke^{-0.8s}}{s(s+1)}$

$$L(\omega_c)=20\left(\lg K-\lg\omega_c-\lg\sqrt{(\omega_c)^2+1}\right)=0$$

$$K=\omega_c\sqrt{(\omega_c)^2+1}$$

$$\omega_c=\omega_g$$

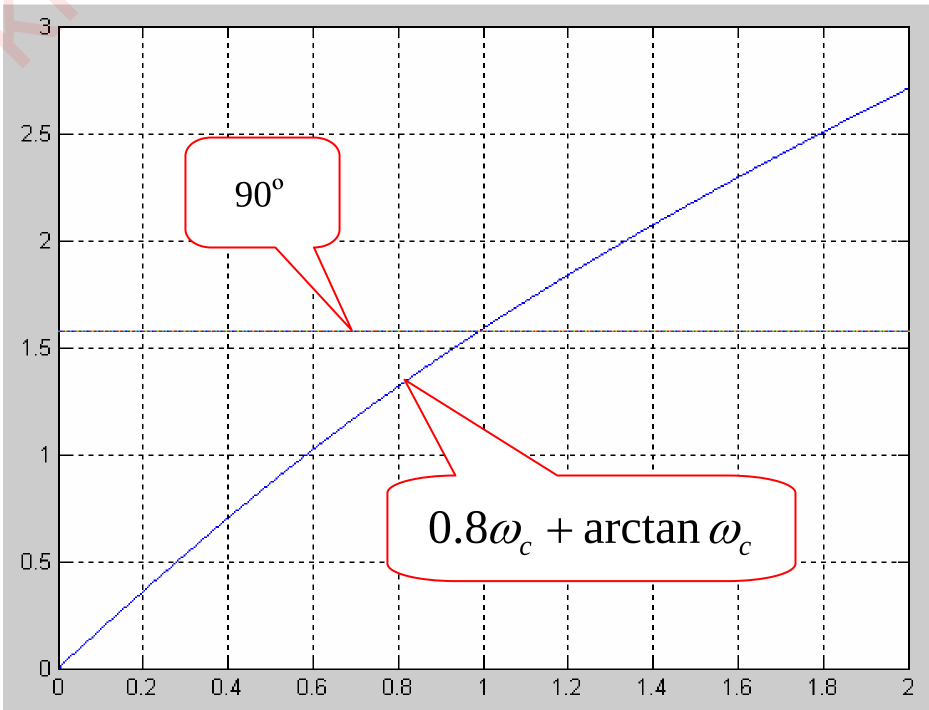
$$\phi(\omega_g)=\phi(\omega_c)=-90^\circ-0.8\omega_c-\arctan\omega_c=-180^\circ$$

$$0.8\omega_c+\arctan\omega_c=90^\circ$$

$$\omega_c=0.99$$

$$K=\omega_c\sqrt{\omega_c{}^2+1}=1.4$$

$$K_{\max}=1.4$$



控制工程基础习题解答

第六章

6-1．已知单位反馈系统的开环传递函数为$G(s)=\dfrac{K}{s(0.3s+1)(0.6s+1)}$。

试求：

（1）． 静态误差系数K_p、K_v、K_a。

（2）． 系统对阶跃输入的稳态误差。

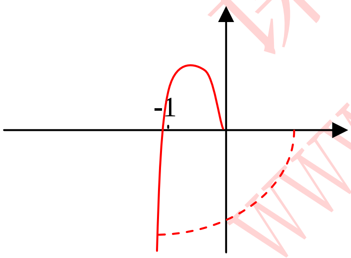
（3）． 系统对输入为 r(t)=2t 时的稳态误差。

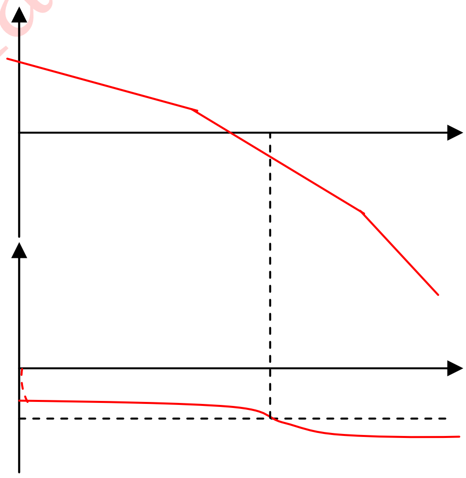
解：稳定性验算：

特征方程：$0.18s^3+0.9s^2+s+K=0$

$$\begin{array}{l|ll} s^3 & 0.18 & 1 \\ s^2 & 0.9 & K \\ s^1 & 1-0.2K & \\ s^0 & K & \end{array}$$

当$0<K<5$时，系统稳定，求解误差有意义。





（1）． Ⅰ型系统。

$K_p=\infty$

$K_v=K$

$K_a=0$

（2）． $e_{ssp}=\dfrac{1}{1+K_p}=0$

（3）． 输入为 r(t)=2t 时，

$$e_{ssv}=2\frac{1}{K_v}=\frac{2}{K}$$

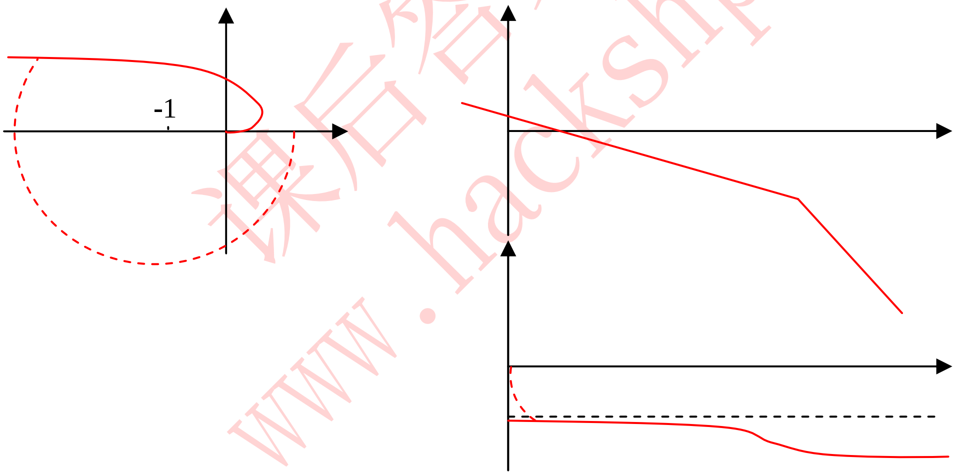
6-2． 已知开环传递函数 $G(s)=\dfrac{20}{s^2(s^2+3s+400)}$，试求单位反馈系统对输入信号为 $r(t)=\dfrac{1}{2}t^2$ 时的稳态误差。

解：稳定性验算：

特征方程：$s^4+3s^3+400s^2+20=0$

$$\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 400 & 20 \\
s^3 & 3 & 0 & \\
s^2 & 400 & 20 & \\
s^1 & -0.15 & & \\
s^0 & 20 & &
\end{array}$$

第一列有小于零的数，符号变化了两次，故存在两个闭环右极点。系统不稳定，求解误差无意义。



6-3． 设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{300}{s(0.2s+1)}$$

输入信号为 $r(t)=5+2t+t^2$ 试求系统的稳态误差。

解：稳定性验算：为两阶系统，系统稳定。

Ⅰ型系统。

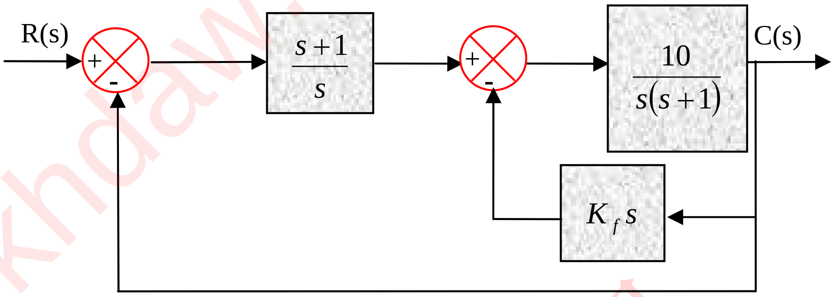
$K_p=\infty$

$K_v=K=300$

$K_a=0$

$$e_{ss}=5e_{ssp}+2e_{ssv}+2e_{ssa}=\frac{5}{1+K_p}+\frac{2}{300}+\frac{2}{0}=\infty$$

6-4．某系统框图如图 6-8 所示。试求该系统的位置、速度和加速度误差系数并说明速度内反馈的存在对稳态误差的影响。



解：开环传递函数为：

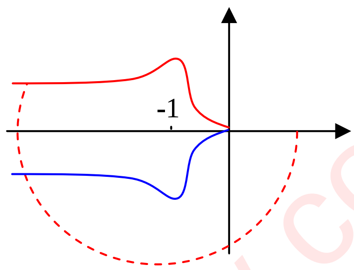
$$G(s)=\frac{s+1}{s}\frac{10}{s(s+1)+K_f s}=\frac{10(s+1)}{s^2(s+1+K_f)}=\frac{\frac{10}{1+K_f}(s+1)}{s^2\left(\frac{1}{1+K_f}s+1\right)}$$

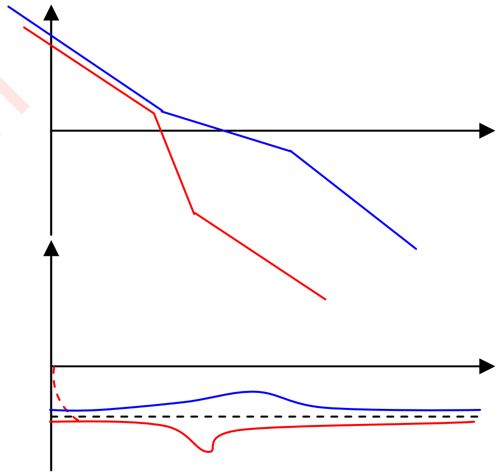
稳定性验算：

特征方程：$\frac{1}{1+K_f}s^3+s^2+\frac{10}{1+K_f}s+\frac{10}{1+K_f}=0$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & \frac{1}{1+K_f} & \frac{10}{1+K_f} \\ s^2 & 1 & \frac{10}{1+K_f} \\ s^1 & & \\ s^0 & & \end{array} = \begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 10 \\ s^2 & 1 & \frac{10}{1+K_f} \\ s^1 & \frac{10K_f}{1+K_f} & \\ s^0 & \frac{10}{1+K_f} & \end{array}$$

当$K_f>0$时，系统稳定，求解误差有意义。





II 型系统。

$K_p=\infty$

$K_v=\infty$

$K_a=K$

I 型系统。

$K_p=\infty$

$K_v=\infty$

$$K_a=\frac{1}{K}=\frac{1+K_f}{10}$$

可见 $K_f\uparrow$，$K_a=\dfrac{1}{K}=\dfrac{1+K_f}{10}\uparrow$，可提高系统的稳态精度

6-5．已知某系统的闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{a_1s+a_0}{a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}$$

试求该系统对等速输入和等加速输入的稳态误差。

解：闭环传递函数：$\phi(s)=\dfrac{C(s)}{R(s)}=\dfrac{a_1s+a_0}{a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}$

开环传递函数为：

$$G(s)=\frac{\phi(s)}{1-\phi(s)}=\frac{a_1s+a_0}{a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_2s^2}=\frac{\dfrac{a_0}{a_2}\left(\dfrac{a_1}{a_0}s+1\right)}{s^2\left(\dfrac{a_n}{a_2}s^{n-2}+\dfrac{a_{n-1}}{a_2}s^{n-3}+\cdots+1\right)}$$

II 型系统。

当系统稳定时则：

$K_p = \infty$

$K_v = \infty$

$K_a = K = \dfrac{a_0}{a_2}$

等速输入时：$e_{ssv} = \dfrac{1}{K_v} = 0$

等加速输入 $e_{ssa} = \dfrac{1}{K_a} = \dfrac{a_2}{a_0}$

5-6．试证明在单位阶跃输入下，系统的误差信号的积分等于同一系统对单位斜坡输入的稳态误差，即

$$\int_0^\infty e(t)dt = e_{ssv}$$

式中：$e(t)$——单位阶跃输入下的系统误差

e_{ssv}——单位斜坡输入下的系统稳态误差

解：

方法 1

由于系统的初态为零，应用拉氏变换的积分定理可得：

$$L\left[\int_0^t e(t)dt\right] = \frac{1}{s}E(s)$$

式中：E（s）为单位阶跃输入下的系统误差的拉氏变换。

设误差的传递函数为G_e（S）

$$E(s) = G_e(s)R_p(s) = \frac{1}{s}G_e(s)$$

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t e(t)dt = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}E(s) = \lim_{s\to 0}E(s) = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}G_e(s)$$

$$e_{ssv} = \lim_{t\to\infty} e_v(t)$$

$$= \lim_{s\to 0} sE_v(s)$$

$$= \lim_{s\to 0} sG_e(s)R_v(s)$$

$$= \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s^2}G_e(s)$$

$$= \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}G_e(s)$$

$$= \lim_{t\to\infty}\int_0^t e(t)dt$$

$$= \int_0^\infty e(t)dt$$

得证

方法 2

设单位斜坡输入下的系统误差为 $e_v(t)$

则根据定常线性系统的重要性质：对于线性定常系统，对输入信号积分的响应就等于系统对输入信号响应的积分，积分常数由零输出初始条件确定。

由于单位斜坡输入是单位阶跃输入的积分，可得：

$$e_v(t) = \int_0^t e(t)dt + C$$

$$\lim_{t\to 0} e_v(t) = \lim_{t\to 0}\int_0^t e(t)dt + C = 0$$

$$C = -\lim_{t\to 0^+}\int_0^t e(t)dt$$

$$e_{ssv} = \lim_{t\to\infty} e_v(t) = \lim_{t\to\infty}\int_0^t e(t)dt - \lim_{t\to 0^+}\int_0^t e(t)dt$$

$$= \int_0^\infty e(t)dt - \lim_{t\to 0^+}\int_0^t e(t)dt$$

对于阶跃或斜坡信号输入时 $\lim_{t\to 0^+}\int_0^t e(t)dt = 0$，即可得证 $\int_0^\infty e(t)dt = e_{ssv}$

6-7. 设开环传递函数为 $G(s)$ 的单位反馈系统，如果其闭环传递函数可以写成

$$\frac{C(s)}{R(S)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots(T_m s+1)}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_n s+1)}$$

试证明 $\int_0^\infty e(t)dt = (T_1 + T_2 + \cdots T_n) - (T_a + T_b + \cdots T_m)$

式中，e(t)为单位阶跃作用下系统的误差。

解：

开环传递函数为

$$G(s) = \frac{\phi(s)}{1-\phi(s)} = \frac{(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots(T_m s+1)}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_n s+1) - (T_a s+1)(T_b s+1)\cdots(T_m s+1)}$$

$$\begin{aligned}
&(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_n s+1) - (T_a s+1)(T_b s+1)\cdots(T_m s+1)\\
&= \left[a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_2 s^2 + (T_1 + T_2 + \cdots T_n)s + 1\right]\\
&- \left[b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_2 s^2 + (T_a + T_b + \cdots T_m)s + 1\right]\\
&= a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_2 s^2 - \left(b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_2 s^2\right)\\
&+ \left[(T_1 + T_2 + \cdots T_n) - (T_a + T_b + \cdots T_m)\right]s
\end{aligned}$$

式中 a_i 和 b_j 为多项式展开时相应项的系数

由上式可知：

$$\int_0^\infty e(t)dt = e_{ssv}$$

$$= \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1+G(s)} R_v(s)$$

$$= \lim_{s\to 0} s \frac{(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_n s+1)-(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots(T_m s+1)}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_n s+1)} \frac{1}{s^2}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \frac{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_2 s^2 - \left(b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_2 s^2\right) + \left[(T_1 + T_2 + \cdots T_n) - (T_a + T_b + \cdots T_m)\right]s}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_n s+1)}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{a_n s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2} + \cdots + a_2 s - \left(b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_2 s^2\right) + \left[(T_1 + T_2 + \cdots T_n) - (T_a + T_b + \cdots T_m)\right]}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_n s+1)}$$

$$= (T_1 + T_2 + \cdots T_n) - (T_a + T_b + \cdots T_m)$$

证毕