工程力学习题答案

第一章　静力学基础知识

思考题：1. ×；2. √；3. √；4. √；5. ×；6. ×；7. √；8. √

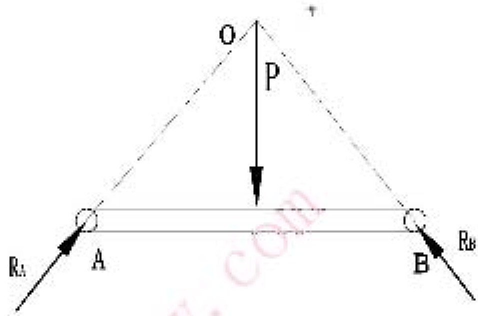
习题一

1．根据三力汇交定理，画出下面各图中 A 点的约束反力方向。

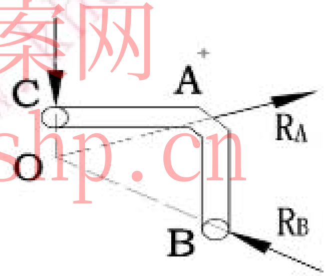
解：（a）杆 AB 在 A、B、C 三处受力作用。

由于力 $\overline{p}$ 和 $\overline{R_B}$ 的作用线交于点 O。

如图（a）所示，根据三力平衡汇交定理，可以判断支座 A 点的约束反力必沿通过 A、O 两点的连线。



（b）同上。由于力 $\overline{p}$ 和 $\overline{R_B}$ 的作用线交于 O 点，根据三力平衡汇交定理，可判断 A 点的约束反力方向如下图（b）所示。

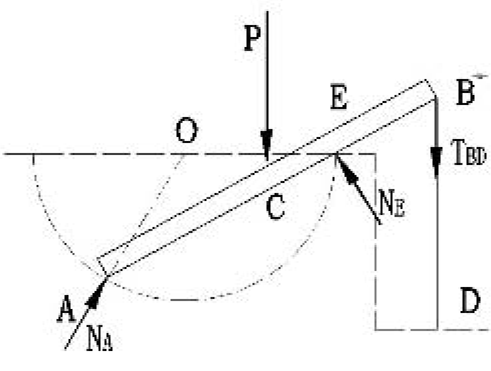


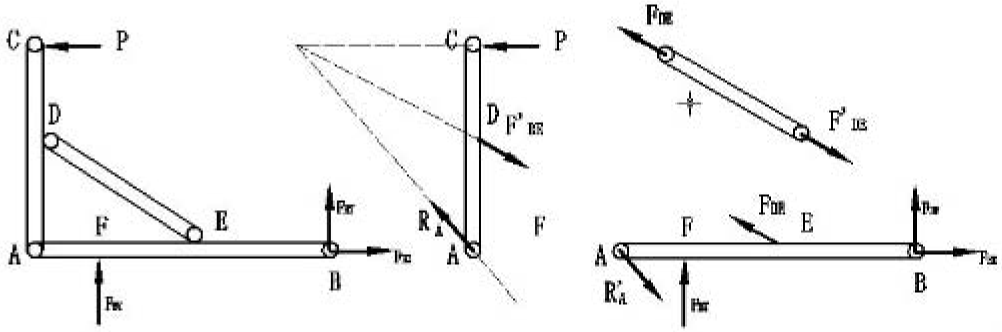
2．不计杆重，画出下列各图中 AB 杆的受力图。

解：（a）取杆 AB 为研究对象，杆除受力 $\overline{p}$ 外，在 B 处受绳索作用的拉力 $\overline{T_B}$，在 A 和 E 两处还受光滑接触面约束。约束力 $\overline{N_A}$ 和 $\overline{N_E}$ 的方向分别沿其接触表面的公法线，并指向杆。其中力 $\overline{N_E}$ 与杆垂直，

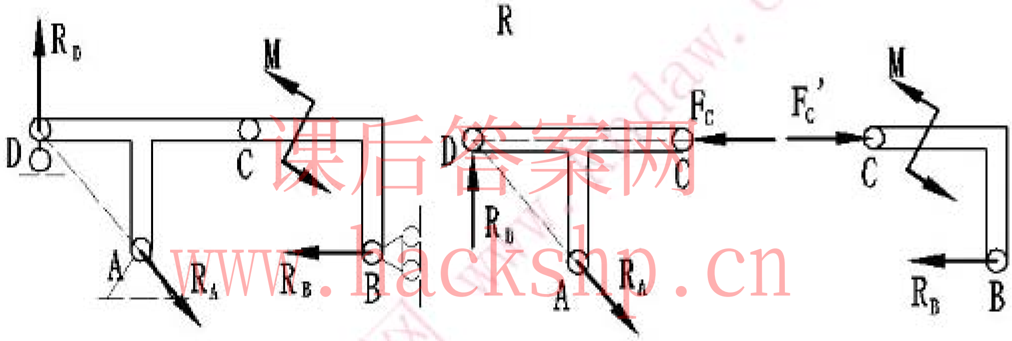
力 $\overline{N_A}$ 通过半圆槽的圆心 O。

AB 杆受力图见下图（a）。

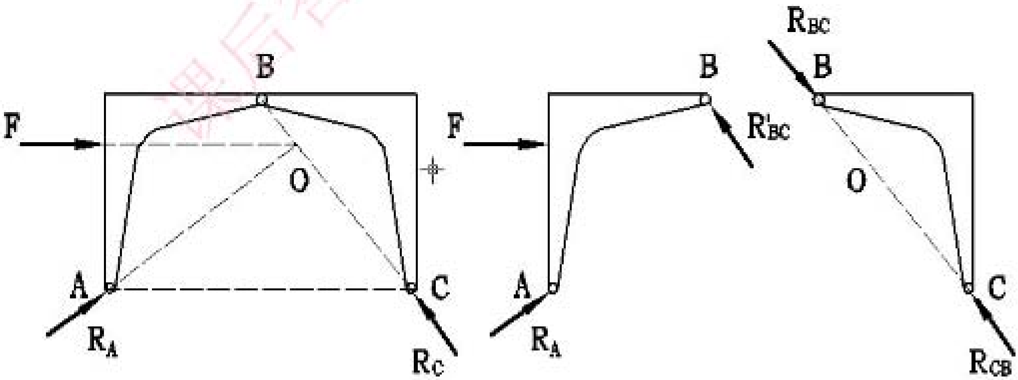




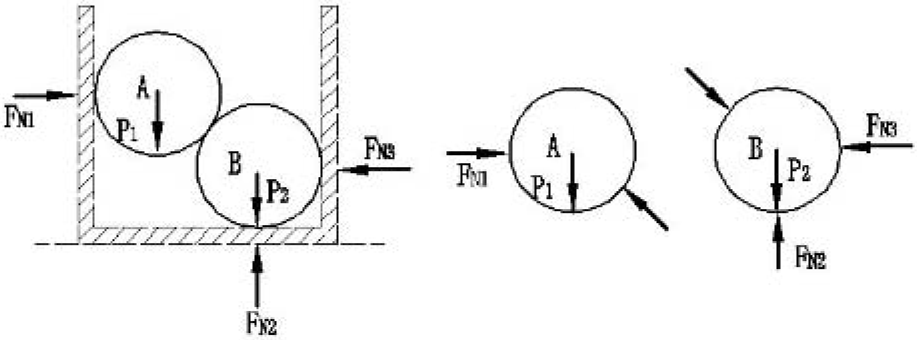
（b）



（c）

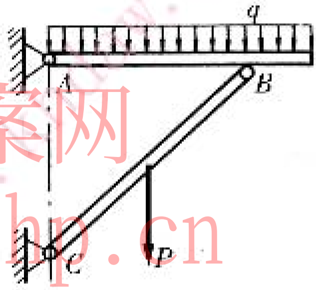


（d）

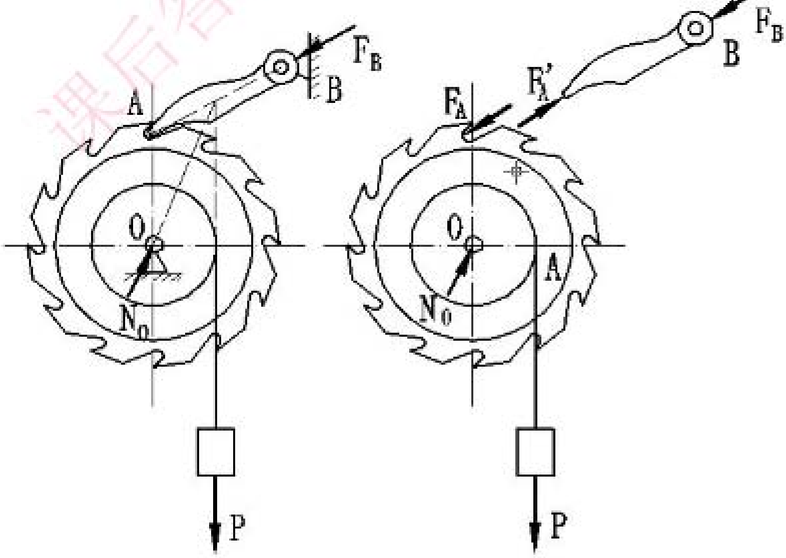

FN1
A
P1
B
P2
FN3
FN2
FN1
A
P1
B
P2
FN3
FN2

(e)

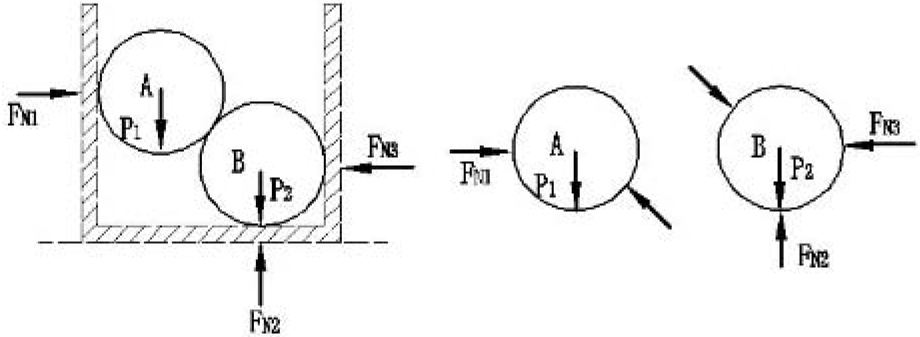

A
P


q
A
B
C
P

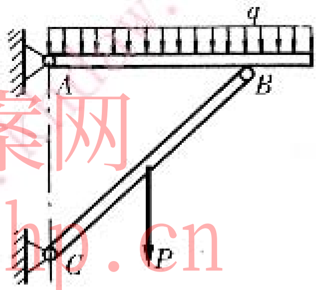
(d)


FB
A
B
O
N0
P
FA
F'A
FB
B
O
A
N0
P

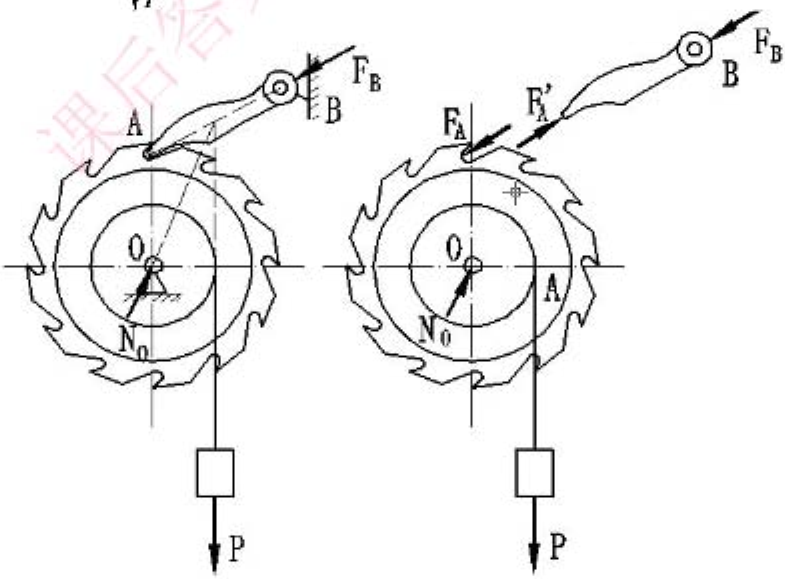
(f)



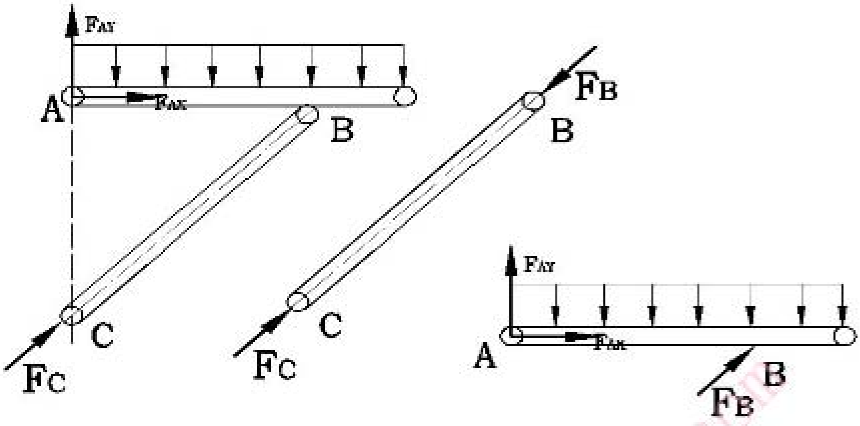
(e)



(d)

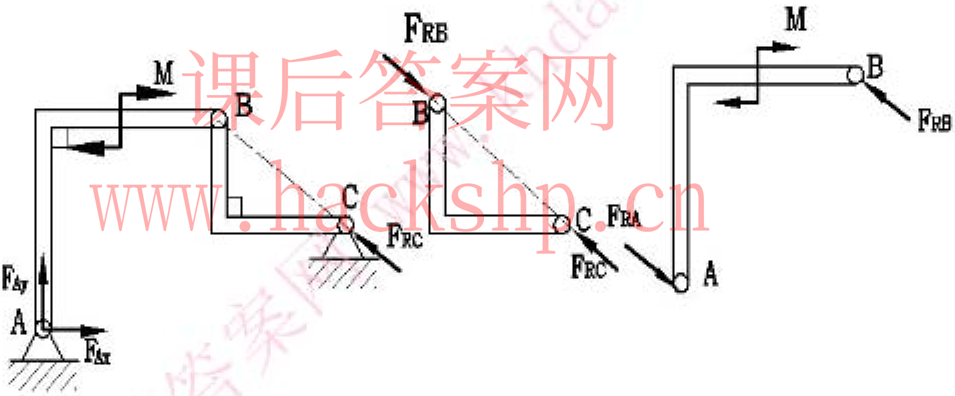


(f)



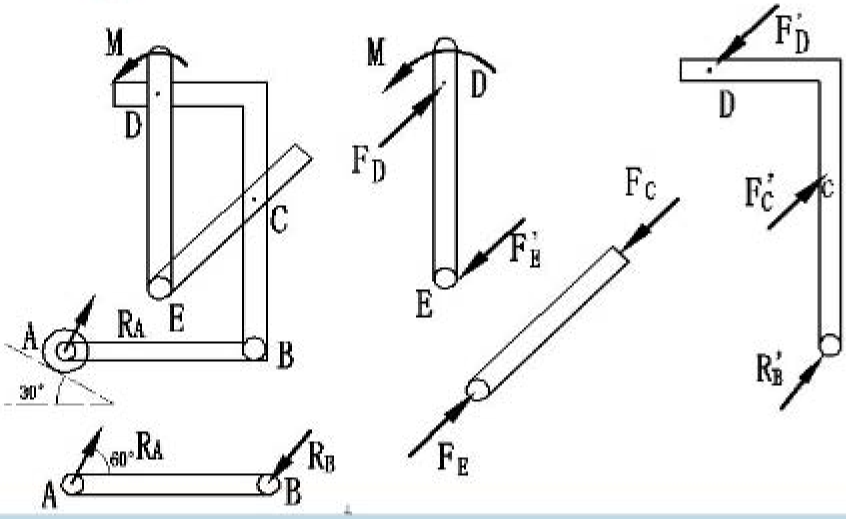
A
B
C
F_C
F_B
F_{Ay}
F_{Ax}

(g)



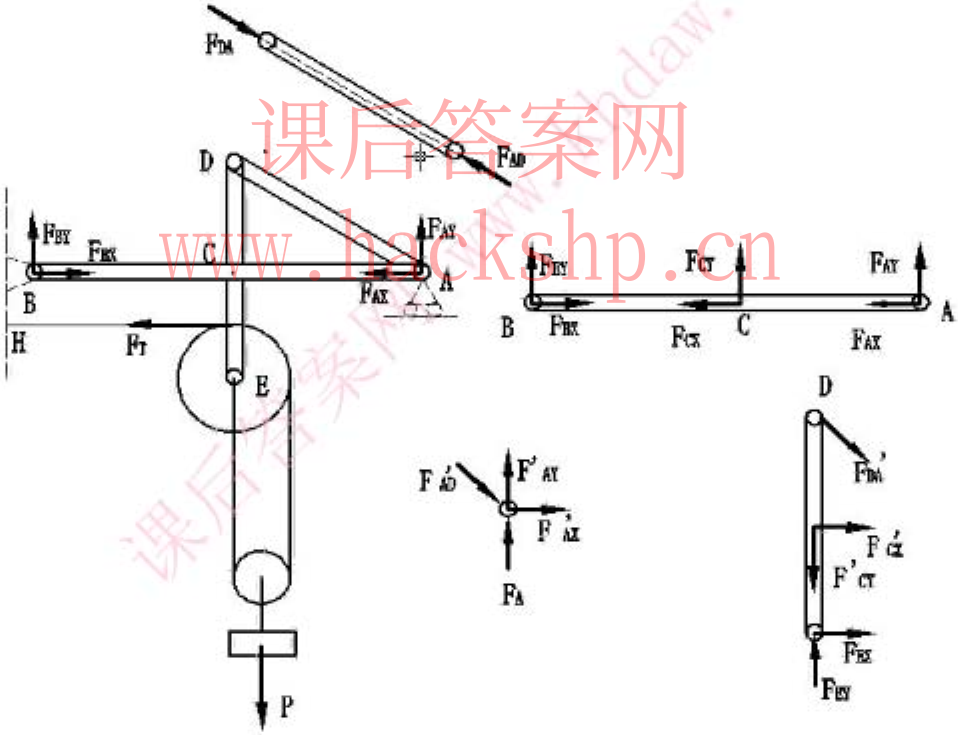
M
B
C
A
F_{Ay}
F_{Ax}
F_{RC}
F_{RB}
F_{RA}

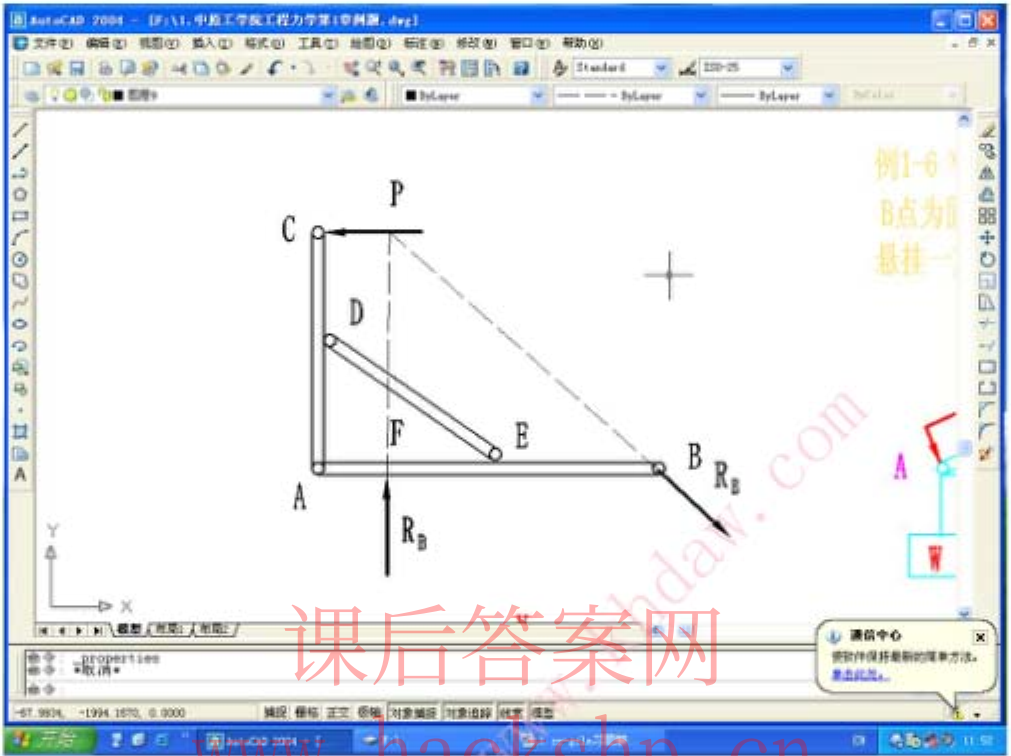
(h)



M
D
C
E
A
B
R_A
30°
60°
R_B
F_D
F'_E
F_C
F_E
F'_D
F'_C
R'_B

(i)




P
C
D
F
E
B
A
R_B
R_B
A
W
例1-6
properties
取消

工程力学习题答案

第二章力系的简化与平衡

思考题：1. √;2. ×;3. ×;4. ×;5. √;6. ×;7. ×;8. ×;9. √.

习题二

1. 平面力系由三个力和两个力偶组成，它们的大小和作用位置如图示，长度单位为 cm，求此力系向 O 点简化的结果，并确定其合力位置。

解：设该力系主矢为 $\overline{R}'$，其在两坐标轴上的投影分别为 R_x、R_y。由合力投影定理有：

角 $R_x = \sum x_i = 1.5 - 3 = -1.5\text{kN}$

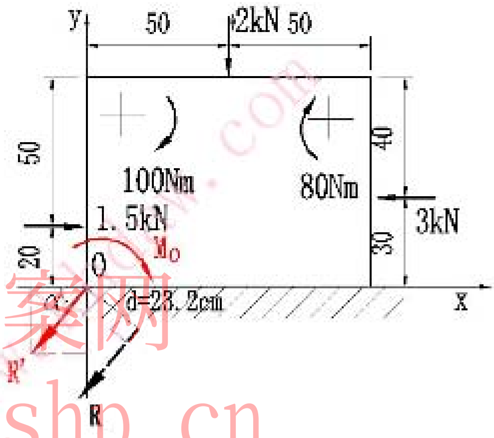
$R_y = \sum y_i = -2\ \text{kN}$

$R' = \sqrt{(\sum x_i)^2 + (\sum y_i)^2} = 2.5\,\text{kN}$

$\sin\alpha = \sum y_i / R' = -0.8$；

$\cos\alpha = \sum x_i / R' = -0.6$

$\alpha \approx 53°$（合力或主矢与 x 轴所夹锐角）



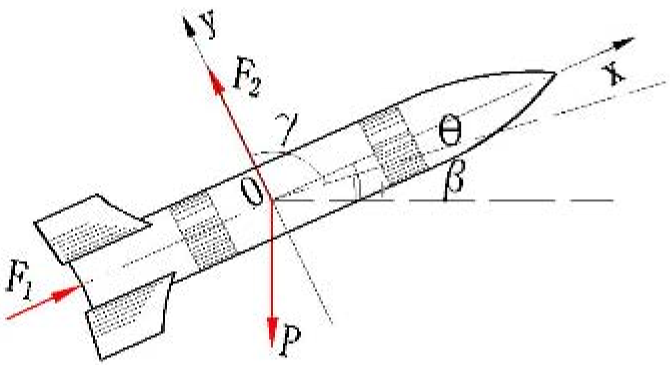
由合力矩定理可求出主矩：

$$M_0 = \sum M_0(\overline{F}_i) = 3\times0.3\times10^3 - 1500\times0.2 - 100 - 80 - 2000\times0.5 = -580\,\text{N.m}$$

合力大小为：$R = R' = 2.5\,\text{kN}$，方向$\alpha \approx 53°$ 如图所示。

位置：$d = M_0' / R = \dfrac{580}{2500} = 0.232\,\text{m} = 23.2\,\text{cm}$，位于 O 点的右侧。

2. 火箭沿与水平面成 $\beta = 25°$ 角的方向作匀速直线运动，如图所示。火箭的推力 $F_1 = 100\,\text{kN}$ 与运动方向成 $\theta = 5°$ 角。如火箭重 $P = 200\,\text{kN}$，求空气动力 F_2 和它与飞行方向的交角 γ。

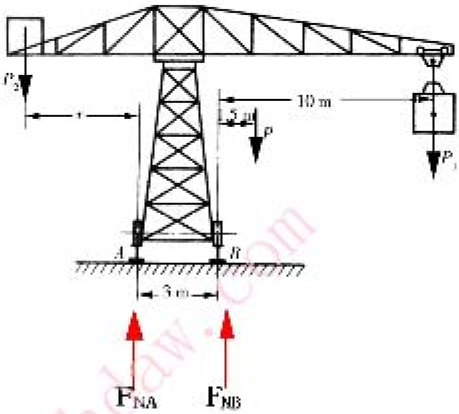


解：火箭在空中飞行时，若只研究它的运行轨道问题，可将火箭作为质点处理。这时画出其受力和坐标轴 x、y 如下图所示，可列出平衡方程。

$\sum y=0$ ； $F_2-G\cos(\theta+\beta)=0$ （G 应为 P ）

故空气动力 $F_2=G\cos 30^\circ=173\,\text{kN}$

由图示关系可得空气动力 F_2 与飞行方向的交角为 $\gamma=90^\circ+\alpha=95^\circ$。 （α 应为 Y ）



3. 如图所示，移动式起重机不计平衡锤的重为 $P=500\,\text{kN}$，其重心在离右轨 1.5m 处。起重机的起重量为 $P_1=250\,\text{kN}$，突臂伸出离右轨 10m。跑车本身重量略去不计，欲使跑车满载或空载时起重机均不致翻倒，求平衡锤的最小重量 P_2 以及平衡锤到左轨的最大距离 x。

解：起重机整体受力如图。满载时要使起重机不发翻倒，需同时满足 $F_{NA}\geq 0$ 和 $\sum M_B(\vec F)=0$，

$P_2(x+3)-3F_{NA}-1.5P-10P_1=0$

解得： $P_2(x+3)\geq 3250$ （1）

空载时，要使起重机不翻倒，需同时满足 $\sum M_A(\vec F)=0$，

$P_2x-3F_{NB}-4.5P=0$ 和 $F_{NB}\geq 0$

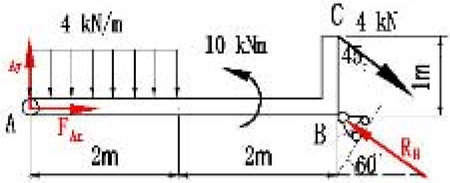
解得： $P_2x\leq 2250$ （2）

由（1）、（2）两式得： $P_2\geq 333.3\,\text{kN}$， $x\leq 6.75\,\text{m}$

即： $P_{2\min}=333.3\,\text{kN}$， $x_{\max}=6.75\,\text{m}$

4. 梁 AB 的支承和荷载如图，$CB\perp AB$，梁的自重不计。则其支座 B 的反力 R_B 大小为多少？

解：梁受力如图所示：



由 $\sum M_A(\vec F)=0$ 得：

$$(-4\times2\times1+10-40\times\frac{\sqrt2}{2}\times1-40\times\frac{\sqrt2}{2}\times4+R_B\sin 30^\circ\times4=0$$ （40 应为 4 ）

$= -8+10-2\sqrt2-8\sqrt2+2R_B$ $R_B=5\sqrt2-1=6.07\ \text{kN}$

$(-4\times2\times1+10-40.\sin45^\circ\times1-40.\cos45^\circ\times4+R_B\sin30^\circ\times4=0)$

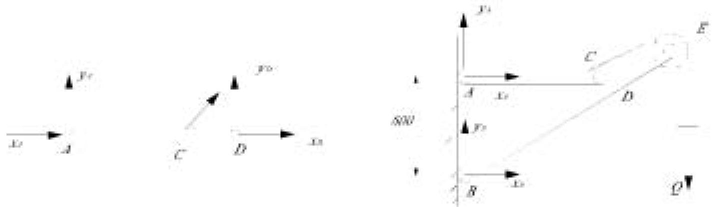
解得：（$R_B=50\sqrt2-1=69.7\,\text{kN}$ ） $R_B=5\sqrt2-1=6.07\ \text{kN}$

5. 起重机构架如图示，尺寸单位为 cm，滑轮直径为 $d=20\,\text{cm}$，钢丝绳的倾斜部分平行于 BE 杆，吊起的荷载 $Q=10\,\text{kN}$，其它重量不计，求固定铰链支座 A、B 的反力。

解：先研究杆 AD 如图(a)

（下面第一种解法是弯路，请看第二种解法）

(a)　　　　　　　　　　　　(b)



（解法 1）由几何关系可知：$\tan\alpha=\frac{3}{4}$，$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$CD=\frac{10}{\sin\alpha}$

由 $\sum M_A(\bar{F})=0$，$Y_D \cdot 800+Q\sin\alpha(800-CD)=0$

$\sum Y=0$，$Y_A+Q\sin\alpha+Y_D=0$

解得：$Y_D=-5.875$ kN，$Y_A=-0.125$ kN

再研究整体，受力如图(b)，由

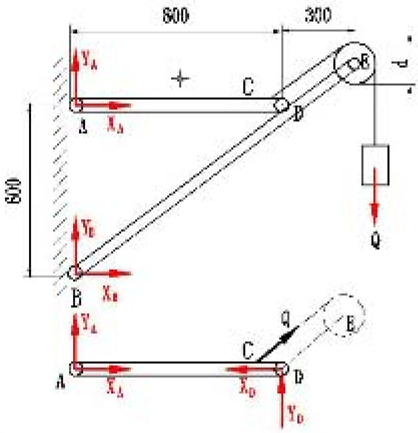
$\sum Y=0$，$Y_A+Y_B-Q=0$

$\sum X=0$，$X_A+X_B=0$

$\sum M_A(\bar{F})=0$，$X_B \cdot 600-Q(800+300+10)=0$

解得：$Y_B=10.125$ kN，$X_A=-18.5$ kN，$X_B=18.5$ kN

（解法 2）



解：（1）取整体为研究对象，画受力图，列平衡方程

$\Sigma Y_i = 0$，　$Y_A + Y_B - Q = 0$

$Y_A + Y_B = Q = 10$ kN　（1）

$\Sigma X_i = 0$，　$X_A + X_B = 0$　（2）

$\Sigma M_D = 0$，$X_B . 6 - Y_A . 8 - Y_B . 8 - Q. 3. 1 = 0$

$X_B = 111/6 = 18.5$ kN

代入(2)式，得　$X_A = -18.5$ kN

取 ACD 杆为研究对象，画受力图

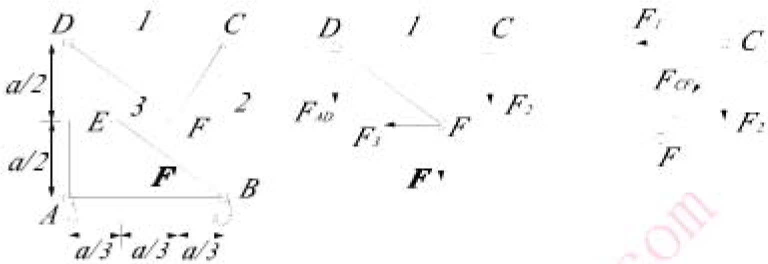
$\Sigma M_D = 0$，　$-Y_A \times 8 - Q \times 0.1 = 0$

$Y_A = -10\times0.1/8 = -0.125$ kN

代入（1），得　$Y = -Y + 10 = 10.125$ kN

6. 平面桁架的支座和荷载如图所示，求杆 1，2 和 3 的内力。

解：用截面法，取 CDF 部分，受力如图(b)。



由 $\sum X=0$，$-F_3=0$

$\sum M_D(\bar{F})=0$，$-\frac{2}{3}aF-aF_2=0$

解得：$F_3=0$，$F_2=-\frac{2}{3}F$ （压）

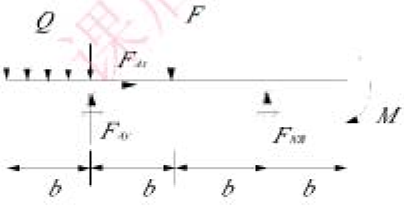
再研究接点 C，受力如图（c）

有 $\sum M_F(\bar{F})=0$，$F_1 \cdot \frac{a}{2}-F_2 \cdot \frac{a}{3}=0$ （g 为×号 $F_1 . a/2 - F_2 . a/3 = 0$）

解得：$F_1=-\frac{4}{9}F$ （压）

7. 梁的支座及荷载如图所示，求支座的约束力。

解：(a) AB 梁受力如图(a)所示。



(a)

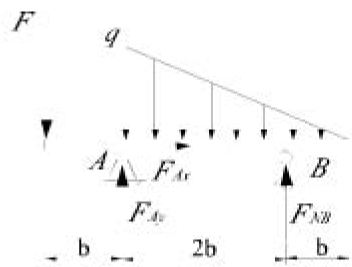
由 $\sum X=0$，$F_{AX}=0$

$\sum Y=0$，$F_{AY}-qb-F+F_{NB}=0$

$\sum M_A(\bar{F})=0$，$F_{NB} \cdot 2b-M-Fb+qb \cdot \frac{b}{2}=0$ （注意:式中的"g"是"×"号，以下同）

解得： $F_{AX}=0$， $F_{AY}=\dfrac{F}{2}-\dfrac{M}{2b}+\dfrac{5}{4}qb$，

$F_{NB}=\dfrac{F}{2}+\dfrac{M}{2b}-\dfrac{1}{4}qb$



（b）AB 梁受力如图(b)所示。

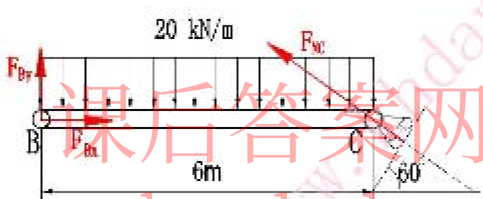
由 $\sum X=0$， $F_{AX}=0$

$\sum Y=0$， $-F+F_{AY}-\dfrac{1}{2}q\cdot 3b+F_{NB}=0$

$\sum M_A(\overline{F})=0$， $Fb-\dfrac{1}{2}q\cdot 3b\cdot b+F_{NB}\cdot 2b=0$

解得： $F_{AY}=\dfrac{3}{2}F+\dfrac{3}{4}qb$， $F_{NB}=-\dfrac{1}{2}F+\dfrac{3}{4}qb$

(c)先研究 BC 梁，如图(c_1)所示。



由 $\sum M_B(\overline{F})=0$， $F_{NC}\cdot 6\cos 30^{\circ}-20\times 6\times 3=0$ （应为 sin30°）

$\sum X=0$， $F_{BX}-F_{NC}\sin 60^{\circ}=0$

$\sum Y=0$， $F_{BY}-20\times 6-F_{NC}\cos 60^{\circ}=0$

解得： $F_{NC}=120\,\text{kN}$， $F_{BX}=60\sqrt{3}\,\text{kN}$， $F_{BY}=60\,\text{kN}$

再研究 AB 梁，受力如图(c_2)所示。

由 $\sum X=0$，$F_{AX}-F_{BX}'=0$

$\sum Y=0$，$F_{AY}-F_{BY}'=0$

$\sum M_A(\overline{F})=0$，$M_A-3F_{BY}'-40=0$

解得：$F_{AX}=104\,\text{kN}$，$F_{AY}=60\,\text{kN}$，$M_A=220\,\text{kN}\cdot\text{m}$

(d)先研究 CD 梁，受力如图(d_1)。

由 $\sum X=0$，$F_{CX}=0$

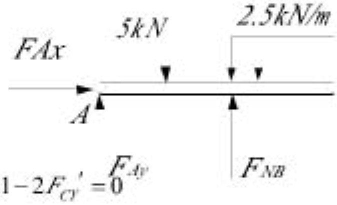
$\sum Y=0$，$F_{ND}+F_{CY}-2.5\times 2=0$

$\sum M_D(\overline{F})=0$，$-4F_{CY}-5+2.5\times 2\times 3=$

解得：$F_{CY}=2.5\text{kN}$，$F_{CX}=0$，

$F_{ND}=2.5\text{kN}$

再研究 ABC 梁，受力如图（d_2）所示。



由 $\sum X=0$，$F_{AX}-F_{CX}'=0$

$\sum M_B(\bar{F})=0$，$-2F_{AY}+5\times1-2.5\times2\times1-2F_{CY}'=0$

$\sum Y=0$，$F_{AY}+F_{NB}-2.5\times2-5-F_{CY}'=0$

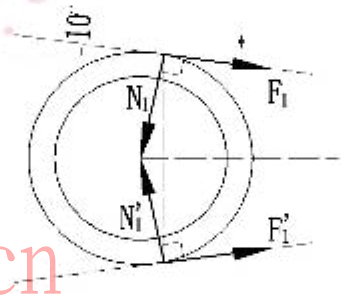
解得：$F_{AX}=0$，$F_{AY}=-2.5\text{kN}$，$F_{NB}=15\text{kN}$

8. 图示夹钳夹住钢管，已知钳口张角为 20°，$F=F_1$。问钢管与夹钳间的静摩擦因数至少应为多少才夹得住而不至滑落？（应为 $F=F'$）

解：取钢管为研究对象，设管、钳摩擦力为 F_1、F_1'，受力如图，列出平衡方程：

$$\sum X=0\quad,\quad F_1\cos10^\circ+F_1'\cos10^\circ-N_1\cos80^\circ-N_1'\cos80^\circ=0$$

①



根据结构的对称性及 $F=F'$ 知：$F_1=F_1'$，$N_1=N_1'$ ②

钢管处于临界状态时：$F_1\le fN_1$，$F_1'\le fN_1'$ ③

联立可解得：$f\ge\dfrac{\cos80^\circ}{\cos10^\circ}=0.176$

既钢管与夹钳的静摩擦因数至少应为 0.176 才夹得住而不至滑落。

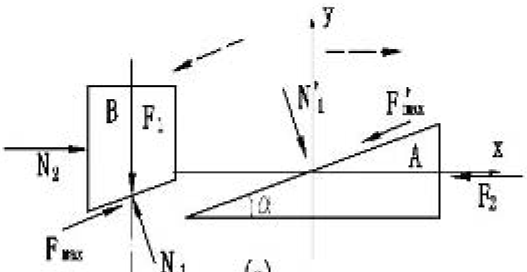
（解法 2）：由考虑摩擦时物体平衡条件与主动力大小无关，而与其方向有关（见课本 P61：(4) 自锁现象），且当物体处于将要滑动的临界状态时

$$F_{max}=f\ N=\tan\ \varphi_m\ N\ ,\quad \varphi_m=10^\circ$$

即 $\quad f=\tan\ \varphi_m=\tan\ 10^\circ=0.176$

9. 尖劈起重装置如图所示。尖劈 A 的顶角为 α，B 块受力 F_1 作用，A 块与 B 块之间的静摩擦因数为 f（有滚珠处摩擦力忽略不计）。如不计 A 块与 B 块的重量，求能保持平衡的力 F_2 范围。

(a)



(a)

解：当 F_2 较小时，B 块有沿尖劈向下滑动趋势，此时 B 块及尖劈 A 受力如图（a）。

对滑块 B 有：$\sum Y=0$，$-F_1+N_1\cos\alpha+F_{max}\sin\alpha=0$ ① 处于临界状态时 $F_{max}=fN_1$ ②

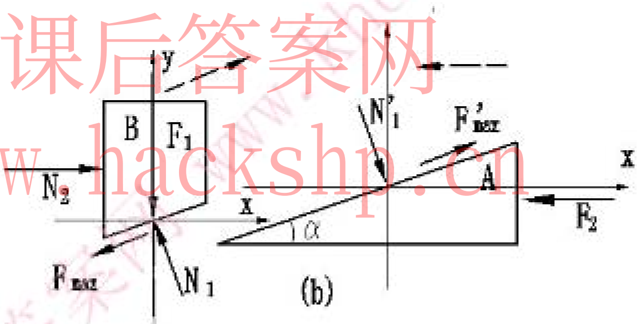
将②代入①可得：$N_1=\dfrac{F_1}{\cos\alpha+f\sin\alpha}$ ③

对于尖劈 A：$\sum X=0$，$-F_2+N_1'\cos\alpha+F_{max}'\cos\alpha=0$

既：$-F_2+N_1\sin\alpha-fN_1\cos\alpha=0$ ④

联立③④可解得：$F_{2min}=\dfrac{\sin\alpha-f\cos\alpha}{\cos\alpha+f\sin\alpha}F_1=\dfrac{\tan\alpha-f}{1+f\tan\alpha}F_1$

再求 F_2 的最大值，此时 B 块有沿尖劈向上滑动趋势，受力如图(b)。用上述同样的办法可求得：

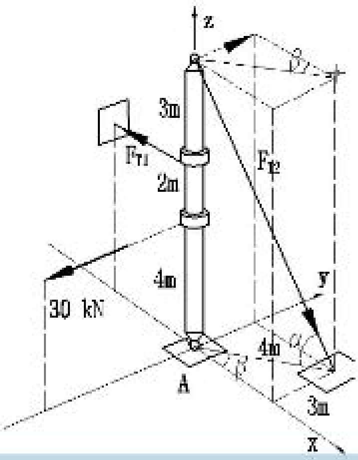


$$F_{2max}=\frac{\tan\alpha+f}{1-f\tan\alpha}F_1$$

因此，使系统保持平衡的力 F_2 范围为：

$$\frac{\tan\alpha-f}{1+f\tan\alpha}F_1\le F_2\le\frac{\tan\alpha+f}{1-f\tan\alpha}F_1$$

10．杆子的一端 A 用球铰链固定在地面上，杆子受到 30kN 的水平力的作用，用两根钢索拉住，使杆保持在铅直位置，求钢索的拉力 F_{T1}、F_{T2} 和 A 点的约束力。



解：研究竖直杆子，受力如图示。

由 $\sum M_X(\bar{F}_i)=0$，$30\times4-9F_{T2}\cos\alpha\sin\beta=0$　　①

$\sum M_Y(\bar{F}_i)=0$，$-6F_{T1}+F_{T2}\cos\alpha\cos\beta=0$　　②

$\sum X=0$，$F_{T2}\cos\alpha\cos\beta+X_A-F_{T1}=0$　　③

$\sum Y=0$，$Y_A+F_{T2}\cos\alpha\sin\beta-30=0$　　④

$\sum Z=0$，$-F_{T2}\sin\alpha+Z_A=0$　　⑤

由三角关系知：$\cos\alpha=\dfrac{5}{\sqrt{106}}=0.486$，$sin\alpha=\dfrac{9}{\sqrt{106}}=0.874$

$sin\beta=0.6$，$\cos\beta=0.8$　　⑥

将⑥代入①得：$F_{T2}=45.8$ kN

将 $F_{T2}=45.8$ kN 代入②可得：$F_{T1}=26.7$ kN

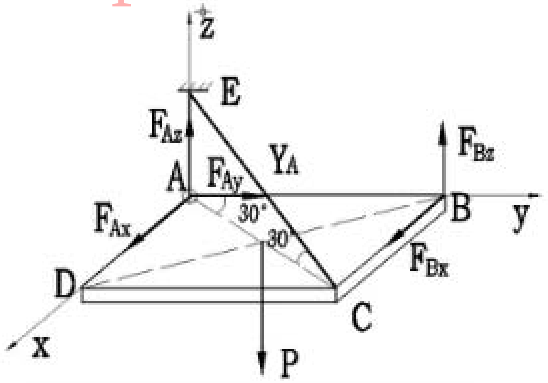
将 F_{T1}，F_{T2} 分别代入③、④、⑤可得：

$X_A=8.90$ kN，$Y_A=16.67$ kN，$Z_A=40.00$ kN

既 $F_{RA}=8.90\bar{i}+16.67\bar{j}+40.00\bar{k}$（kN）

11．图示长方形均质薄板重 $P=200$N，用球铰链 A 和蝶铰链 B 固定在墙上，并用绳子 CE 维持在水平位置。求绳子拉力及支承约束力。（提示：由于间隙，蝶铰链约束相当于轴心为 y 轴的轴承，只有两个约束力分量。）

解：研究板，受力如图，设 $CD=a$，$BC=b$



由 $\sum M_Y(\bar{F})=0$，$p\cdot\dfrac{b}{2}-bF_T\sin30^\circ=0$

$\sum M_X(\bar{F})=0$，

$aF_T\sin30^\circ-p\cdot\dfrac{a}{2}+F_{BZ}a=0$

$\sum M_Z(\bar{F})=0$，$-aF_{BX}=0$

$\sum X=0$，

$F_{AX}+F_{BX}-F_T coa30^\circ\sin30^\circ=0$

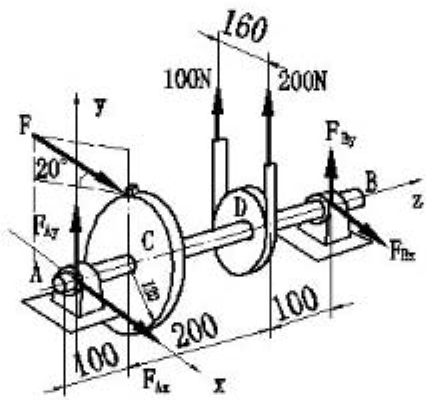
$\sum Y=0$，$F_{AY}-F_T coa30^\circ\cos30^\circ=0$

$\sum Z=0$，$F_{AZ}-P+F_T\sin30^\circ+F_{BZ}=0$

解　得　：　$F_T=200$N　，　$F_{BZ}=F_{BX}=0$　，

$F_{AX}=86.6$N，$F_{AY}=150$N，$F_{AZ}=100$N。

12．作用于齿轮上的齿合力 F 推动胶带轮绕水平轴 AB 作匀速转动。已知胶带紧边的拉力为 200N，松边的拉力为 100N，尺寸如图所示。求力 F 的大小和轴承 A、B 的约束力。



解：整体受力如图所示，由

$$\sum M_Z(\vec{F}_i)=0，\ -F\cos 20^\circ\times 120+200\times 80-100\times 80=0$$

可得：$F=70.9\text{N}$

$$\sum M_Y(\vec{F}_i)=0\ -F\sin 20^\circ\times 100+F_{BX}\times 350+100\times 250+200\times 250=0$$

可得：$F_{BX}=-207\text{N}$

$$\sum M_X(\vec{F}_i)=0，\ -F\cos 20^\circ\times 100-F_{BY}\times 350=0$$

可得：$F_{BY}=-19.1\text{N}$

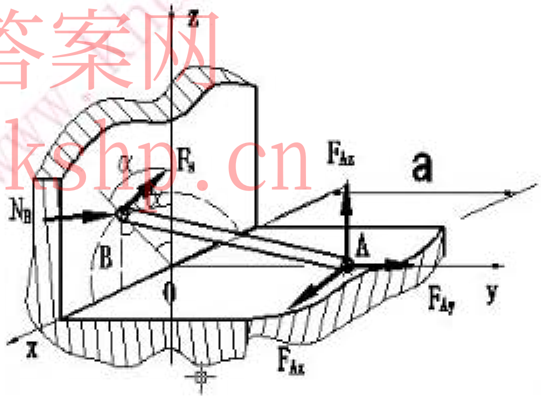
$$\sum X=0，\ F_{AX}+F_{BX}+100+200-F\sin 20^\circ=0$$

可得：$F_{AX}=-68.4\text{N}$

$$\sum Y=0，\ F_{AY}+F_{BY}+F\cos 20^\circ=0$$

可得：$F_{AY}=-47.6\text{N}$

13. 匀质杆 AB 长 L，杆重 P，A 端用球铰固连于水平面上，B 端靠在铅直墙壁上，如图所示。已知 A 点到墙的距离 $OA=a$，杆的 B 端与墙面间的静滑动摩擦因数为 f，试用最简单的方法求杆将要滑下时的临角角度 α。



解：设 AB 杆处于临界状态，受力如图，由

$$\sum X=0，\ F_{AX}-F_S\cos\alpha=0$$

$$\sum M_Z(\vec{F}_i)=0$$

$$-aF_{AX}+F_{NB}\sqrt{l^2-a^2}\sin\alpha=0$$

式中，$F_S=f_sF_{NB}$

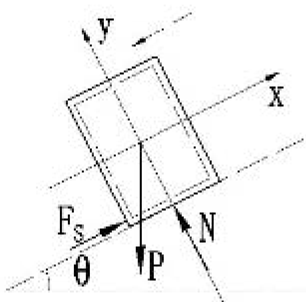
解得：$\tan\alpha=\dfrac{af_s}{\sqrt{l^2-a^2}}$

14. 已知木材与钢的静滑动摩擦因数为 $f_s=0.6$，动滑轮摩擦因数为 $f_d=0.4$，求自卸货车车厢提升多大角度时，才能使重的木箱开始发生滑动？

解：取木材为研究对象，受力如图所示

由 $\sum X=0$，$F_S-p\sin\theta=0$ （1）

$\sum Y=0$，$N-p\cos\theta=0$ （2）

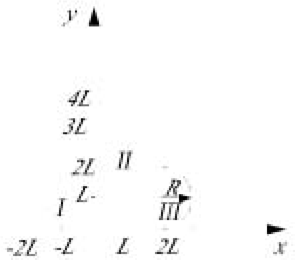


式中 $F_S = f_S N$ （3）

联立（1）、（2）、（3）可得：

$\tan\theta = f_S = 0.6$，$\theta = \arctan 0.6 = 31^{\circ}$

15. 在图示匀质板中，已知：$L=5$ cm，$R=5$ cm。试求图示平面图形的形心。（提示：半圆形的形心到圆心的距离 $h_c = 4R/3\pi$ ）



解：如图，匀质板可以看作是由三角形板，矩形板和半圆形板拼接而成

Ⅰ：$\Delta A_1 = \frac{1}{2} \times 2L \times 3L = 3L^2$，$x_1 = -\frac{2}{3}L$，$y_1 = L$

Ⅱ. $\Delta A_2 = 2L \times 4L = 8L^2$，$x_2 = L$，$y_2 = 2L$

Ⅲ. $\Delta A_3 = \frac{\pi}{2} R^2$，$x_3 = 2L + \frac{4R}{3\pi}$，$y_3 = L$

$A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \Delta A_3 = 3L^2 + 8L^2 + \frac{\pi}{2} R^2$

由形心公式（2-33）得：

$$x_c = \frac{\sum \Delta A_i x_i}{A} = \frac{3L^2(-\frac{2}{3}L) + 8L^2 \cdot L + \frac{\pi}{2} L^2 \cdot (2L + \frac{4L}{3\pi})}{3L^2 + 8L^2 + \frac{\pi}{2} R^2} = 3.9 \text{ cm} \quad (L = R)$$ （g 应为×号）

$$y_c = \frac{\sum \Delta A_i y_i}{A} = \frac{3L^2 \cdot L + 8L^2 \cdot 2L + \frac{\pi}{2} L^2 \cdot (2L + \frac{4L}{3\pi})}{3L^2 + 8L^2 + \frac{\pi}{2} R^2} = 8.18 \text{ cm}$$

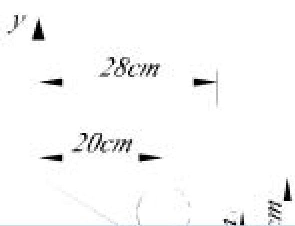
16. 房屋建筑中，为隔壁而采用的空心三角形楼梯踏步如图所示，求其横截面的形心位置。

解：用负面积法

三角形：$\Delta A_1 = \frac{1}{2} \times 28 \times 20 = 280$，$x_1 = \frac{2}{3} \times 28$，$y_1 = \frac{2}{3} \times 20$

圆形：$\Delta A_2 = -16\pi$，$x_2 = 20$，$y_2 = 14$

$A = A_1 + A_2 = 280 - 16p$



形心：$x_c=\dfrac{280\times\dfrac{2}{3}\times28-16\pi\times20}{280-16\pi}$=18.4cm

$y_c=\dfrac{280\times\dfrac{2}{3}\times20-16\pi\times14}{280-16\pi}$=13.2cm

工程力学习题答案

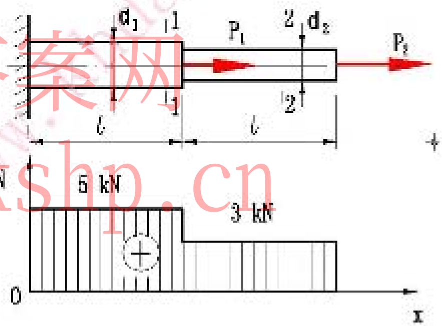
第七章

思考题

1. 内力是由于构件受到外力后，其内部各部分之间相对位置发生改变而产生的。(对)
2. 若杆件截面性状及尺寸一定，则载荷越大，横截面上的应力越大。(对)
3. 在相同载荷作用下，杆件材料越软，则横截面上的应力越低。 (错)
4. 对于各向同性材料，同一点在不同方向上的应力相等。 (错)
5. 若杆件的总变形为零，则杆内的应力必须等于零。(错)
6. 若杆件在某个方向的应力等于零，则该方向的应变也必定为零。(错)
7. 在轴向拉伸杆中，若一横截面的位移大于另一横截面的位移，则其应力也必是前者大于后者。(错)
8. 对于静不定结构，各杆内力的大小与材料的弹性模量 E 杆的横截面面积 A 有关，而静定结构，各杆内力的大小与 EA 无关。(对)

习题七

1. 图示阶梯杆，$P_1=2\,\mathrm{kN}$ 、$P_2=3\,\mathrm{kN}$，$d_1=12\,\mathrm{mm}$、$d_2=8\,\mathrm{mm}$，$l=500$ mm。试求：(1) 绘轴力图；(2) 最大正应力。



解：(1) 取 1-1 截面右段：$N_1=P_1+P_2=5\,\mathrm{kN}$

取 2-2 截面右段：$N_2=P_2=3\,\mathrm{kN}$

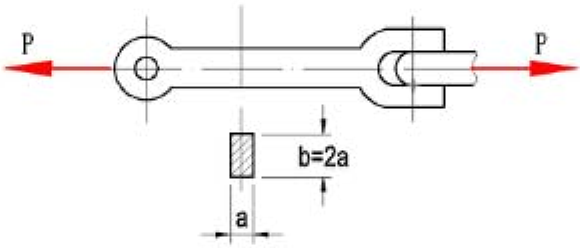
(2) $\sigma_1=\dfrac{N_1}{A_1}=\dfrac{N_1\bullet 4}{\pi d_1^2}$

$=\dfrac{5\times10^3\times4}{\pi\times12^2}=44.2\,\mathrm{MPa}$

$$\sigma_2=\frac{N_2}{A_2}=\frac{N_2\bullet 4}{\pi d_2^2}=\frac{3\times10^3\times4}{\pi\times8^2}=59.7\ \mathrm{MPa}$$

$\therefore\ \sigma_{max}=59.7\,\mathrm{MPa}$

2. 钢杆受力 P=400 kN，已知拉杆材料的许用应力 $[s]$= 100 MPa，横截面为矩形，如 b=2a,试确定 a、b 的尺寸。



解：根据强度条件，应有

$$\sigma=\frac{P}{A}=\frac{P}{a\bullet b}\le[\sigma]$$

将 $b=2a$ 代入上式，解得

$$a\ge\sqrt{\frac{P}{2\bullet[\sigma]}}=\sqrt{\frac{400\times10^3}{2\times100\times10^6}}\,\mathrm{m}=44.72\,\mathrm{mm}$$

由 $b=2a$，得 $b\ge89.44\,\mathrm{mm}$

所以，截面尺寸为 $b \geq 89.44$ mm，$a \geq 44.72$ mm。

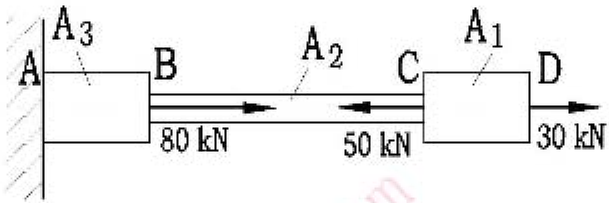
3.图示为钢制阶梯形直杆，材料比例极限 $s_p = 200$ MPa，许用应力 $[s] = 160$ MPa，各段截面面积分别为：$A_1 = A_3 = 400 mm^2$，$A_2 = 200 mm^2$，$E = 200 GN/m^2$。（1）求直杆的总变形；（2）校核该杆的强度。

解：首先根据已知条件，求各段内力

$$N_3 = 80 + 30 - 50 = 60 \text{ kN}$$

$$N_2 = 30 - 50 = -20 \text{ kN}$$

$$N_1 = 30 \text{ kN}$$



根据内力求各段应力

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{60\times10^3}{400\times10^{-6}} \text{ Pa} = 150 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-20\times10^3}{200\times10^{-6}} \text{ Pa} = -100 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{30\times10^3}{400\times10^{-6}} \text{ Pa} = 75 \text{ MPa}$$

（1）因为 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 均小于材料比利极限 σ_p，所以用虎克定律求总变形

$$\Delta L = \sum_{i=1}^{3} \frac{\sigma_i L_i}{E} = \frac{1}{E}[\sigma_1 L_1 + \sigma_2 L_2 + \sigma_3 L_3]$$

$$= \frac{1}{200\times10^9}\left[75\times10^6\times1 - 100\times10^6\times2 - 150\times10^6\times1\right] \text{m} = 0.125 \text{ mm}$$

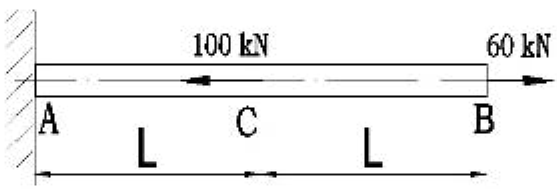
（2）因为 $\sigma_1 < [\sigma]$，$\sigma_2 < [\sigma]$，$\sigma_3 < [\sigma]$ 所以杆件满足强度要求。

4. 图示 AB 杆在 B、C 两点分别受集中力作用，已知杆长 $2l$=20cm,横截面积 A=2 cm^2，材料的比例极限 $s_p = 210$ MPa，屈服极限 $s_p = 260$ MPa，弹性模量 E=200GPa,受力后 AB 杆的总伸长为 0.9mm，求 AC, BC 段的应变。

解：首先求各段内力

$$N_{BC} = 60 \text{ kN} \qquad N_{AC} = -40 \text{ kN}$$

根据内力求各段应力



$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{A} = \frac{60\times10^3}{2\times10^{-4}} = 300 \text{ MPa} > \sigma_p$$

$$\sigma_{AC} = \frac{N_{AC}}{A} = \frac{-40\times10^3}{2\times10^{-4}} = -200 \text{ MPa} < \sigma_p$$ （这里 σ_{AC} 应取绝对值，去掉 - 号）

因为 AC 段在弹性变形范围内，可用虎克定律求应变

$$\varepsilon_{AC}=\frac{\sigma_{AC}}{E}=\frac{-200\times10^{6}}{200\times10^{9}}=-0.001$$

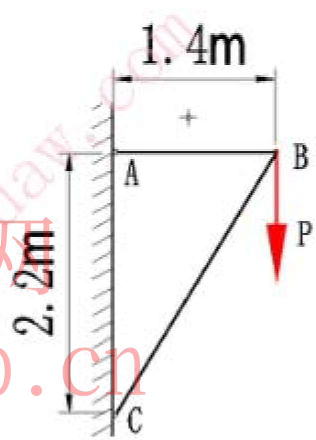
因为 BC 段超过弹性范围，应该用定义求应变

$$\varepsilon_{BC}=\frac{\Delta L_{BC}}{L_{BC}}=\frac{\Delta L-\varepsilon_{AC}\cdot L_{AC}}{L_{BC}}\quad(e_{AC}=DL_{AC}/L_{AC})$$

$$=\frac{0.9\times10^{-3}+0.001\times10\times10^{-2}}{10\times10^{-2}}=0.01$$

5. 图示为二杆所组成的杆系，AB 为钢杆，其截面面积为 $A_1=600mm^2$，钢的许用应力 $s_p=140$ MPa；BC 为木杆，截面面积 $A_2=30?\ 10^3mm^2$，其许用拉应力 $[s_t]=8$ MPa，许用压应力 $[s_c]=3.5$ MPa，求最大许可载荷 P。

解：B 铰链的受力如图所示



$$\sum X=0\quad -N_{AB}+N_{BC}\cos\theta=0$$

$$\sum Y=0\quad -P+N_{BC}\sin\theta=0$$

解上式得 $N_{AB}=P\cdot ctg\theta$ $\quad N_{BC}=P/\sin\theta$

根据强度条件，求许用荷载

AB 杆：$\dfrac{N_{AB}}{A_1}\le[\sigma]$ $\quad\dfrac{P_1\cdot ctg\theta}{A_1}\le[\sigma]$

得

$$P_1\le A_1\cdot[\sigma]\cdot tg\theta=600\times10^{-6}\times140\times10^{6}\times\frac{2.2}{1.4}=132\text{ kN}$$

BC 杆受压，用 $[\sigma_C]$ 校核强度

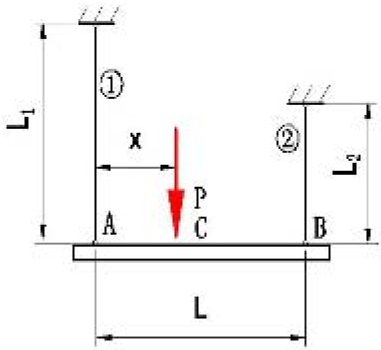
$$\frac{N_{BC}}{A_2}=\frac{P_2}{\sin\theta\cdot A_2}\le[\sigma_C]$$

得 $\quad P_2\le[\sigma_C]\cdot A_2\cdot\sin\theta=3.5\times10^{6}\times30\times10^{3}\times10^{-6}\times\dfrac{2.2}{\sqrt{2.2^2+1.4^2}}$

$=88.6$ kN3

所以系统最大许可载荷 $\quad P=88.6$ kN

6. 图示结构中，梁 AB 的变形及重量可忽略不计。杆①、②的横截面积均为 $400mm^2$，材料的弹性模量均为 $200GN/m^2$。已知：L=2m，l_1=1.5m，l_2=1m，为使梁 AB 在加载后仍保持水平，载荷 P 的作用点 C 与点 A 的距离 x 应为多少？



解：对 AB 杆进行受力分析

$$\sum M_B=0\quad -N_1\cdot L+P\cdot(L-x)=0$$

$$\sum M_A=0\quad -Px+N_2\cdot L=0$$

解上二式得：$\quad N_1=\dfrac{P(L-x)}{L}\quad N_2=\dfrac{Px}{L}$

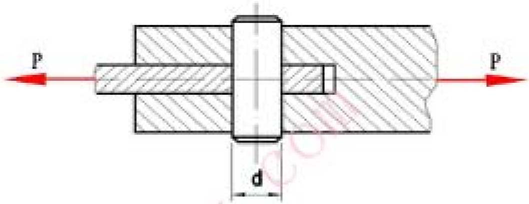
欲使加载后 AB 保持水平，应有 $\Delta l_1 = \Delta l_2$

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA} = \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA}$$

得：$$\frac{P(L-x)\cdot l_1}{L} = \frac{P(2-x)\cdot 1.5}{2} = \frac{P\cdot x\cdot 1}{2}$$

解得：$x = 1.2$ m

7. 试校核图示联接销钉的剪切强度。已知 P=100 kN，销钉直径 d=30mm，材料的许用剪应力 $[\tau]$= 60 MPa。若强度不够，应改用多大直径的销钉？



解：（1）剪切面上的剪力。 $Q = \dfrac{P}{2}$

校核销钉剪切强度

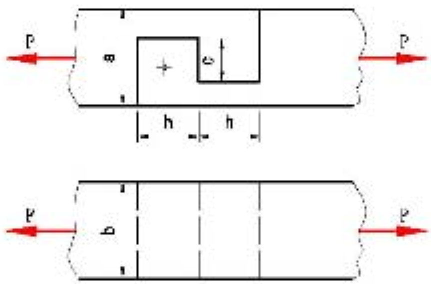
$$\tau = \frac{Q}{A} = \frac{P\cdot 4}{2\pi d^2} = \frac{100\times 10^3\times 4}{2\times\pi\times 30^2\times 10^{-6}} = 70.7\text{ MPa} > [\tau]$$

所以销钉强度不合格。

（2）根据强度条件 $\tau = \dfrac{Q}{A} = \dfrac{P\cdot 4}{2\pi d^2} \le [\tau]$

所以 $$d \ge \sqrt{\frac{4\cdot P}{2\pi\cdot[\tau]}} = \sqrt{\frac{4\times 100\times 10^3}{2\times\pi\times 60\times 10^6}} = 32.57\text{ mm}$$

8. 木榫接头如图所示，$a=b$=12cm，h=35cm，h=4.5cm。p=40kN。试求接头的剪应力和挤压应力。



解：作用在接头上的剪力 $Q = P$，剪切面积为 bh

接头的剪切应力为 $$\tau = \frac{P}{bh} = \frac{40\times 10^3}{12\times 35\times 10^{-4}}Pa = 0.952\text{ MPa}$$

作用在接头上的挤压力和挤压面积分别为 P 和 bc ，

接头的挤压应力为 $$\sigma_j = \frac{P}{bc} = \frac{40\times 10^{-3}}{12\times 4.5\times 10^{-4}}\text{Pa} = 7.41\text{ MPa}$$

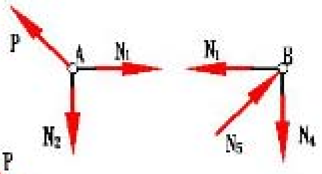
9. 由五根钢杆组成的杆系如图所示。各杆横截面积均为 500 mm^2，E=200 GPa。设沿对角线 AC 方向作用一对 20 kN 的力，试求 A、C 两点的距离改变。

解：A 铰链受力如图所示，

由平衡条件

$$\sum \quad 0 \qquad N_1 - P\cos 45^\circ = 0$$

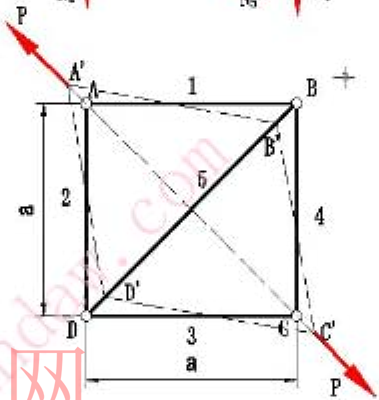
$$\sum Y = 0 \qquad P\sin 45^\circ - N_2 = 0$$



解上式得 $N_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}P$，$N_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}P$=10√2kN 由于

结构对称，故有 $N_3 = N_4$=10√2kN

$= N_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}P$=10√2 kN



B 铰链受力如图，由平衡条件

$$\sum X = 0 \qquad N_5\cos 45^\circ - N_1 = 0$$

解得 $N_5 = P$=20kN

$DL_1=N_1.a/EA=10\sqrt{2}\times 10^3.a/200\times 10^3\times 500=\sqrt{2}\times 10^{-4}.a$

$\varDelta L_5=20\times 10^3\times \sqrt{2}.a/200\times 10^3\times 500$

$=2\sqrt{2}.\times 10^{-4}.a$

$\varDelta L_{AC}=2\sqrt{(a+\varDelta L_1)^2-(\sqrt{2}.a/2-\varDelta L5/2)^2}-\sqrt{2}\,a = 6.83\times 10^{-4}.a$

$=2\sqrt{(a+\sqrt{2}\times 10^{-4}a)^2-(\sqrt{2}a/2-\sqrt{2}\times 10^{-4}a)^2}-\sqrt{2}.a$

$=(2\sqrt{1+2\sqrt{2}\times 10^{-4}+2\times 10^{-8}-1/2+2\times 10^{-4}-2\times 10^{-8}}-\sqrt{2})a$

$=(2\sqrt{0.5+2\times(\sqrt{2}+1)\times 10^{-4}}-\sqrt{2})a$

$=(2\sqrt{0.5+0.0004828}-\sqrt{2})a$

$=(2\times 0.70744809-1.414213562).a$

$=(1.41489618-1.414213562).a$

$=0.0006826.a$

$=6.83\times 10^{-4}a$

杆系的总变形能为 $U = 4\times\frac{N_1^2\cdot a}{2EA}+\frac{N_5^2\sqrt{2}a}{2EA}$

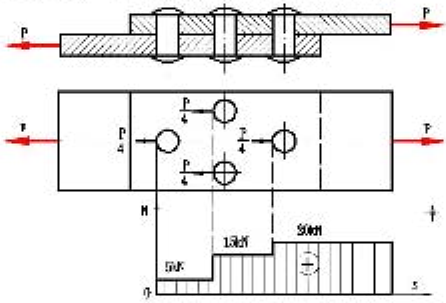
$$=\frac{P^2a(2+\sqrt{2})}{2EA}$$

应用卡氏定理，A、C 两点的距离改变为

$$\delta_A=\frac{\partial U}{\partial P}=\frac{Pa}{EA}(2+\sqrt{2})=(2+\sqrt{2})\cdot\frac{20\times 10^3 a}{200\times 10^9\times 500\times 10^{-6}}$$

$$=0.683\times 10^{-3}a$$

10. 厚度为 10mm 的两块钢板，用四个直径为 12mm 的铆钉搭接，若在上、下各作用拉力 P=20kN ，如图示，试求：（1）铆钉的剪应力；（2）钢板的挤压应力；（3）绘出上板的轴力图。



解：（1）铆钉的剪应力

由题分析可得，每个铆钉剪切面上的剪力为$\dfrac{P}{4}$

所以 $\tau=\dfrac{Q}{A}=\dfrac{P\cdot 4}{4\cdot\pi d^2}=\dfrac{20\times10^3}{\pi\times12^2\times10^{-6}}=44.23\,\text{MPa}$

（2）钢板的挤压应力

$$\sigma_j=\frac{P_j}{A_j}=\frac{P}{4\cdot td}$$

$$=\frac{20\times10^3}{4\times10\times12\times10^{-6}}=41.67\,\text{MPa}$$

（3）上板的轴力图

11、求图示结构中杆 1、2 的轴力。已知 EA、P、h，且两杆的 EA 相同。

解：物块 A 受力如图

$\sum X=0$

$P-N_1-N_2\cdot\cos30°=0$ ①

由图可知系统变形协调关系为

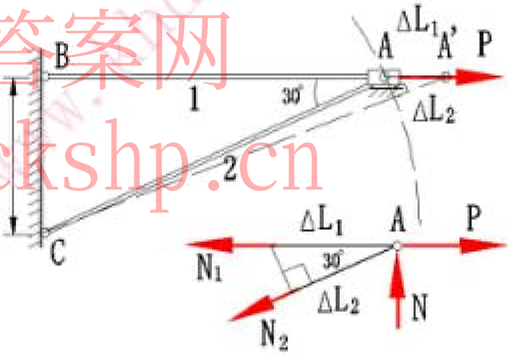
$\Delta L_2=\Delta L_1\cos30°$

即 $\dfrac{N_2\cdot L_2}{EA}=\dfrac{N_1\cdot L_1}{EA}\cos30°$

将 $L_2=2h$，$L_1=\sqrt{3}h$ 代入上式

得：$N_2=\dfrac{3}{4}N_1$ ②

将②式代入①式，解得 $N_1=0.606\text{P}$ $N_2=0.455\text{P}$



工程力学习题答案

第八章　　轴的扭转

判断题：

1. 传动轴的转速越高，则轴横截面上的扭矩也越大。(错)

2. 扭矩是指杆件受扭时横截面上的内力偶矩，扭矩仅与杆件所收的外力偶矩有关，而与杆件的材料和横截面的形状大小无关。(对)

3 圆截面杆扭转时的平面假设，仅在线弹性范围内成立。(错)

4. 一钢轴和一橡皮轴，两轴直径相同，受力相同，若两轴均处于弹性范围，则其横截面上的剪应力也相同。(对)

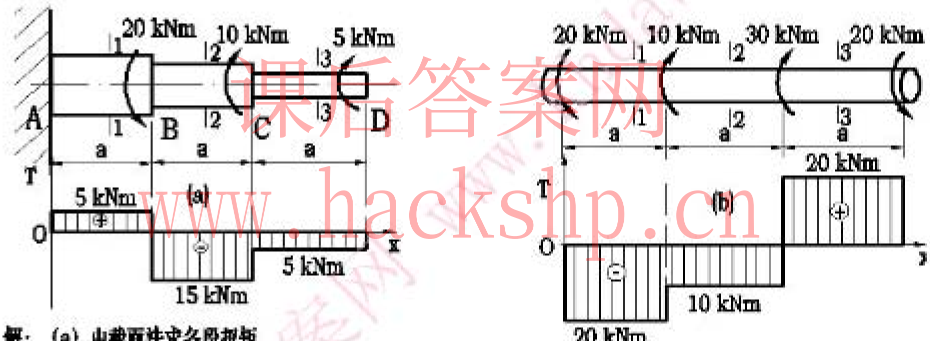
5. 铸铁圆杆在扭转和轴向拉伸时，都将在最大拉应力作用面发生断裂。(错)

6. 木纹平行于杆轴的木质圆杆，扭转时沿横截面与沿纵截面剪断的可能性是相同的。(错)

7. 受扭圆轴横截面之间绕杆轴转动的相对位移，其值等于圆轴表面各点的剪应变。(错)

习题八

1. 直杆受扭转力偶作用如图所示，作扭矩图并写出 $|T|_{max}$



解：(a) 由截面法求各段扭矩

在 AB 段取 1 - 1 截面右侧　$T_1 = 20 - 10 - 5 = 5$ kNm

在 BC 段取 2 - 2 截面右侧　$T_2 = -10 - 5 = -15$ kNm

在 CD 段取 3 - 3 截面右侧　$T_3 = -5$ kNm

扭矩图如图。$|T|_{max} = 15$ kNm

(b) 由截面法求各段扭矩

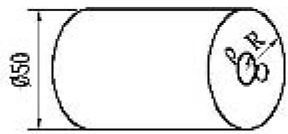
取 1 - 1 截面左侧　$T_1 = -20$ kNm

取 2 - 2 截面右侧　$T_2 = -30 + 20 = -10$ kNm

取 3 - 3 截面右侧　$T_3 = 20$ kNm

扭矩图如图。$|T|_{max} = 20$ kNm

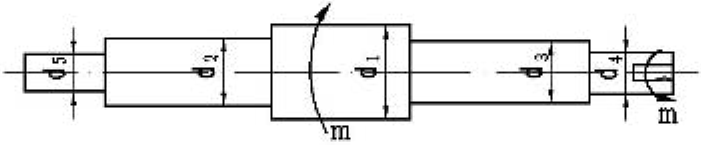
2. 直径 D=50mm 的圆轴，受到扭矩 T=2.15kN.m 的作用。试求在距离轴心 10mm 处的剪应力，并求轴横截面上的最大剪应力。



解：$\tau_\rho = \dfrac{T\bullet\rho}{I_p} = \dfrac{T\bullet\rho\bullet 32}{\pi\bullet D^4} = \dfrac{2.15\times10^3\times10\times10^{-3}\times32}{\pi\times50^4\times10^{-12}} = 35$ MPa （单位：Nm, m/m^4）

截面上的最大剪应力为：$\tau_{max} = \dfrac{T}{W_p} = \dfrac{2.15\times10^3\times16}{\pi\times0.05^3} = 87.6$ MPa（单位：Nm /m^3）

3．功率为 150kw，转速为 15.4r/s 的电动机轴如图所示，轴外伸端装有带轮，试对轴进行强度校核。已知：$[\tau]$=30MPa ， d_1 =135mm ， d_2 =90mm ， d_3 =75mm， d_4 =70mm， d_5 =65mm 。



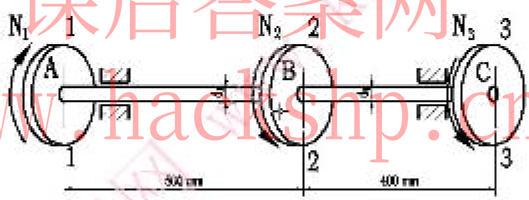
解：外力偶矩 $m = 9550\dfrac{N}{n} = 9550\dfrac{150}{15.4\times 60} = 1550$ N. m

由题可知，d_4 为危险截面。

所以 $\tau_{\max} = \dfrac{T}{W_p} = \dfrac{1550\bullet 16}{\pi\bullet d_4^3} = \dfrac{1550\times 16}{\pi\times 70^3\times 10^{-9}} = 23$ MPa $< [\tau]$

所以满足强度要求。

4.传动轴的转速 n=8.3r/s，主动轮 1 的输入功率 N_1=368kw，从动轮 2、3 分别输出功率 N_2=147kw、N_3=221kw。已知 $[t]$= 70 MPa，$[q]$= $1^{\circ}/m$，G=80GN/m^2 。（1）试按强度条件与刚度条件求 AB 段的直径 d_1，（2）如 AB 段与 BC 段选用同一直径 d，试确定 d 的大小。（3）按经济观点，各轮应如何安排更为合理？



解：首先计算外力偶矩

$m_1 = 9550\dfrac{N_1}{n} = 9550\dfrac{368}{8.3\times 60} = 7057$ N. m

$m_2 = 9550\dfrac{N_2}{n} = 9550\dfrac{147}{8.3\times 60} = 2819$ N. m

$m_3 = 4238$ N. m

所以 AB 段扭矩 $T_{AB} = m_1 = 7057$ N. m

BC 段扭矩 $T_{BC} = m_3 = 4238$ N. m

(1) 根据强度条件 $\tau_{AB} = \dfrac{T_{AB}}{W_p} = \dfrac{16\bullet T_{AB}}{\pi d_1^3} \le [\tau]$

可确定轴 AB 段的直径 $d_1 \ge \sqrt[3]{\dfrac{16T_{AB}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\dfrac{16\times 7057}{\pi\times 70\times 10^6}} = 80$ mm

由刚度条件 $\theta_{AB} = \dfrac{T_{AB}}{GI_p}\times\dfrac{180}{\pi} = \dfrac{32T_{AB}}{G\pi d^4}\times\dfrac{180}{\pi} \le [\theta]$

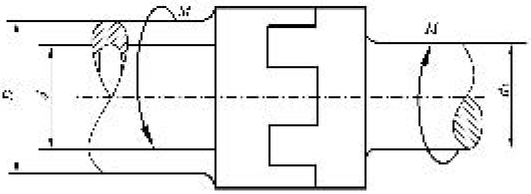
可确定轴 AB 的直径：

$$d_1 \geq \sqrt[4]{\frac{180T_{AB} \cdot 32}{G \cdot \pi^2 [\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{180 \times 7057 \times 32}{80 \times 10^9 \times \pi^2 \times 1}} = 84.7\text{ mm}$$ （单位：°Nm/（N/m^2 °））

(2) 因为 $T_{AB} > T_{BC}$，所以若 AB 和 BC 选用同一直径，轴的直径取 $d = 85$ mm

（3）主动轮放在两从动轮之间，可减小最大扭矩值，减小轴的横截面积，经济合理。

5．实心轴与空心轴通过牙嵌式离合器连在一起，已知轴的转速 n=1.67r/s，传递功率 N=7.4kW，材料的 $[t]$= 40 MPa，试选择实心轴的直径 d_1 和内外径比值为 1/2 的空心轴的外径 D_2。



解：轴所传递的扭矩为

$$T = 9550\frac{N}{n} = 9550 \times \frac{7.4}{1.67 \times 60} = 705\text{ N.m}$$

由实心轴强度条件：

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_p} = \frac{16T}{\pi \cdot d_1^3} \leq [\tau]$$

可得实心圆轴的直径为

$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 705}{\pi \times 40 \times 10^6}} = 44.8\text{ mm}$$

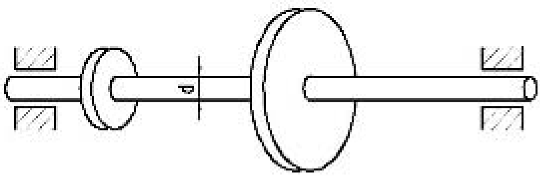
空心圆轴的外径为：

$$D_2 \geq \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi[\tau](1-\alpha^4)}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 705}{\pi \times 40 \times 10^6 \times (1-0.5^4)}} = 45.7\text{ mm}$$（参考例 8-2，用 $W_p=\pi D^3(1-\alpha^4)/16$）

6．机床变速箱第 II 轴如图所示，轴所传递的功率为 N=5.5 kW,转速 n=200r/min，材料为 45 钢，$[t]$= 40 MPa，试按强度条件设计轴的直径。

解：轴所传递的扭矩为

$$T = 9549\frac{N}{n} = 9549\frac{5.5}{200} = 263\text{ N.m}$$



由圆轴扭转的强度条件

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_p} = \frac{16 \cdot T}{\pi \cdot d^3} \leq [\tau]$$

可得轴的直径为

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 263}{40 \times 10^6 \times \pi}} = 32.2\text{ mm}$$

取轴径为 $d = 33$ mm

7．某机床主轴箱的一传动轴，传递外力偶矩 T=5.4N.m，若材料的许用剪应力 $[t]$= 30 MPa，G=80GN/m^2，

$[\theta] = 0.5^{\circ}/m$，试计算轴的直径。

解：由圆轴扭转的强度条件

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_\rho} = \frac{16 \cdot T}{\pi \cdot d_1^3} \le [\tau]$$

可得轴的直径为

$$d_1 \ge \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16\times 5.4}{\pi\times 30\times 10^6}} = 9.7 \text{ mm}$$

由圆轴刚度条件

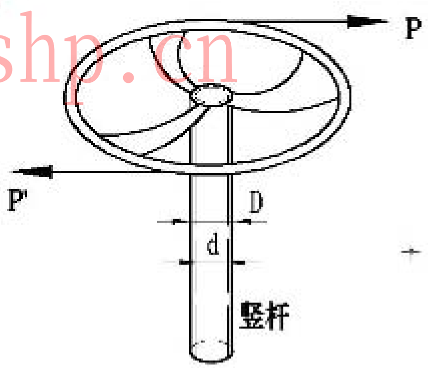
$$\boxed{\theta = Q = \frac{T}{GI_\rho}\cdot\frac{180}{\pi} \le [\theta]} \qquad = \frac{32T}{G\pi d_2^4}\cdot\frac{180}{\pi} \le [\theta]$$

可确定圆轴直径

$$d_2 \ge \sqrt[4]{\frac{180\times T\cdot 32}{G\cdot\pi^2\cdot[\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{180\times 5.4\times 32}{80\times 10^9\times\pi^2\times 0.5}} = 16.7 \text{ mm}$$

所以取直径 $d \ge 16.7$ mm

8．驾驶盘的直径$\varnothing = 520$mm，加在盘上的力 P=300N，盘下面竖轴的材料许用应力$[t] = 60$MPa。（1）当竖轴为实心轴时，试设计轴的直径；（2）如采用空心轴，且$\alpha = \frac{d}{D} = 0.8$，试设计轴的内外直径；（3）比较实心轴和竖心轴的重量。



解：方向盘传递的力偶矩

$m = P\varnothing = 300\times 520\times 10^{-3} = 156$ N.m

（1）由实心轴强度条件

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_\rho} = \frac{16T}{\pi d^3} \le [\tau]$$

得轴的直径：

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16\times 156}{\pi\times 60\times 10^6}} = 23.6 \text{ mm}$$

(2) 空心轴的外径为：

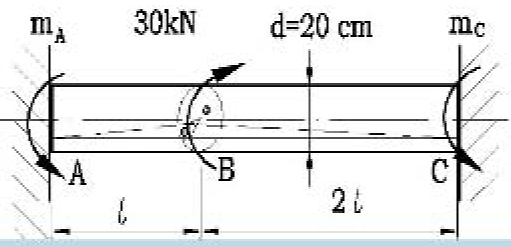
（公式：$\tau_{max} = T/W_P \le [\tau]$，$W_\rho = \pi D^3(1-\alpha^4)/16$）

$$D \ge \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi[\tau](1-\alpha^4)}} = \sqrt[3]{\frac{16\times 156}{\pi\times 60\times 10^6\times(1-0.8^4)}} = 28.2 \text{ mm}$$

$$d = D\cdot\alpha = 28.2\times 0.8 = 22.6 \text{ mm}$$

（3）$$\frac{W_{实}}{W_{空}} = \frac{A_{实}}{A_{空}} = \frac{d^2_{实}}{D^2_{空} - d^2_{空}} = 1.96$$

9．图示圆杆两端固定，试求 AB、BC 段的扭矩与杆内最大切应力。



解：由外力偶的作用，A、C两点对圆杆作用的外力偶分别为m_A，m_C。

所以$T_{AB}=-m_A$　　$T_{BC}=m_C$

由平衡条件有：　　$m_A+m_C=m$　　①

由变形协调关系，　　$\varphi_{AB}=\varphi_{BC}$

根据 $\theta=\varphi/L$ ，$\varphi=TL/GI_p$

得　$\dfrac{-m_A \cdot L}{G/\rho}+\dfrac{m_C \cdot 2L}{G/\rho}=0$　　得到　　$m_A=2m_C$　　②（由

将②代入①得：$T_{AB}=m_A=\dfrac{2}{3}m=\dfrac{2}{3}\times 30=20$ kN.m

$T_{BC}=\dfrac{m}{3}=\dfrac{1}{3}\times 30=10$ kN.m

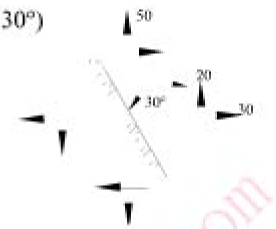
杆内最大切应力位于 AB 段取

$\tau_{max}=\dfrac{T_{AB}}{W_p}=\dfrac{20\times 10^3\times 16}{\pi\times 0.2^3}=\dfrac{40}{\pi}=12.73$ MPa

工程力学习题答案

第十章 组合变形

1. 已知单元体应力状态如图示（应力单位为MPα），试求：（1）指定斜截面上的正应力和剪应力；（2）主应力的大小、主平面位置；（3）在单元体上画出平面位置和主应力方向；（4）最大剪应力。



解：（1）$\alpha=30^{\circ}$ 斜截面上的应力：

$$\sigma_{\alpha}=\frac{30+50}{2}+\frac{30-50}{2}\cos(2\times30^{o})-(-20)\sin(2\times30^{o})$$

$=52.3\text{MP}\alpha$

$$\tau_{\alpha}=\frac{30-50}{2}\sin(2\times30^{o})-20\cos(2\times30^{o})$$

$=-18.7\text{MP}\alpha$

（2）主应力和主平面

$$\sigma_{max}=\frac{30+50}{2}+\sqrt{(\frac{30+50}{2})^{2}+20^{2}}$$

$=62.36\text{MP}\alpha$

$$\sigma_{min}=\frac{30+50}{2}-\sqrt{(\frac{30-50}{2})^{2}+20^{2}}$$

$=17.64\text{MP}\alpha$

$$\text{tg}2\alpha_{o}=-\frac{2\times(-20)}{30-50}=-2$$

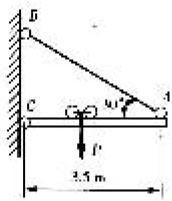
$\alpha_{o}=-31.72^{o}$

（3）图 $\sigma_{1}=62.36\text{MP}\alpha$

$\sigma_{2}=17.64\text{MP}\alpha$

（4）$\tau_{max}=\sqrt{(\frac{30-50}{2})^{2}+20^{2}}=22.36$ Mpa

2. 图示起重机的最大起重吊重量为 P=40 kN，横梁 AC 由两根 18 号槽钢组成，材料为 Q235，许用应力[σ]=120Mpa，试校核横梁的强度。



解：（1）外力分析：取 AC 为研究对象，受力如图，小车位于 AC 中点（此时梁的弯矩最大），平衡条件

$\sum M_{C}(F)=0$：

$N_{AB}\sin30^{o}\times3.5-P\times1.75=0$

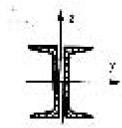
$N_{AB}=P=40$ kN

$\sum F_{y}=0$：

$Y_{C}+N_{AB}\sin30^{\circ}-P=0$

$Y_{C}=\frac{P}{2}=20$ kN

$\sum F_{X}=0$：

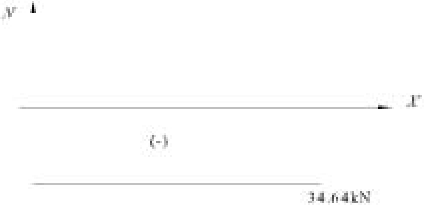


$X_C = N_{AB}\cos 30° = 34.64\,\text{kN}$

（2）内力分析：见轴力图，弯矩图。AC 梁为压，弯组合变形，危险截面位于 AC 中点。

$M_{max} = 20\times 1.75$（$=Y_C \times 3.5/2$）

$= 35\,\text{kN.m}$



（3） 应力分析

18 号槽钢（P388）

$W_Z = 2\times 152.2\text{cm}^3$

$A = 29.29\times 2\text{cm}^2$

$$\sigma_{max} = \sigma' + \sigma''_{max} = 34.64\times 10^3/(29.29\times 2\times 100) + 35\times 10^6/(2\times 152.2\times 10^3) = 121\text{MP}\alpha$$

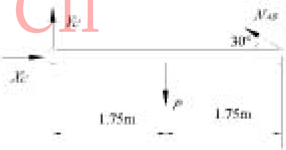
（$\sigma_{tl} + \alpha_{rmax} = N/A + M_{max}/W_z$，二应力均为拉应力）

（4）强度分析：

$$\frac{\Delta\sigma}{[\Delta]} = \frac{121-120}{120} = 8.3\times 10^{-3} = 0.83\% < 5\%$$ 满足要求（分母应为［σ］）

为什么小车位于 AC 的中点时 AC 杆的弯矩最大：

（1）由截面法可知：小车左侧剪力为 $Y_c>0$，右侧为 $Y_c-P<0$，故小车 P 的作用点为弯矩图直线升、降区间的转折点，该截面弯矩最大。求小车位于距 C 端为 x 截面上的弯矩：

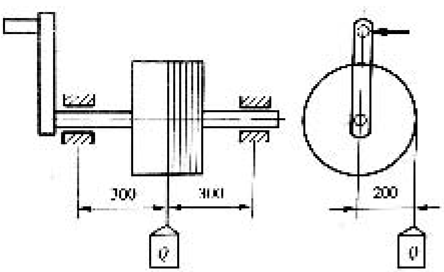


由 $\Sigma M_i=0$，$P\times(L-x)-Y_C L=0$，得 $Y_C=(L-x)P/L$

由 Y_c 对小车作用点之矩：$M= Y_c\bullet x=(L-x)P/L\bullet x=-Px^2/L+Px$，当 $M' =-2Px/L+P=0$ 时，

即 $x=L/2$ 时，弯矩 M 值最大。

3. 手摇式提升机如图示，已知轴的直径 d=30mm，材料为 Q235 钢，$[\sigma] = 80\text{Mpa}$，试按第三强度理论求最大起重载荷 Q。



解：（1）轴的外力

Q 向轴简化为 Q—弯曲

力偶 $M_n = 200\text{Q} = T$ —扭转

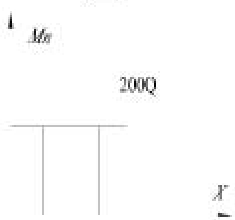
（2）内力—见图

危险截面位中点：

$M_n = 200\text{Q}$ （$T = 200Q$）

$$M_{max} = \frac{\text{QL}}{4}$$

$$= \frac{\text{Q}\times 600}{4} = 150\text{Q}\ (Nmm)$$



轴发生弯曲与扭转组合变形

（3）强度计算：

$$\sigma_{xd3}=\frac{\sqrt{M^2{}_n+M^2{}_{max}}}{W_Z}\qquad (M_n\text{ 应为 }T)$$

$$=\frac{(\sqrt{200^2+150^2})\times Q}{0.1\times 30^3}\le[\sigma]$$

$$Q\le\frac{0.1\times 30^3\times 80}{\sqrt{150^2+200^2}}$$

$=860$ N

∴最大起重载为 860N.

4. 图示的钢制圆轴上有两个齿轮，齿轮 C 直径为 d_c=300mm，其上作用着铅直切向力 P_1=5 kN，齿轮 D 的直径为 d_D=150mm，其上作用着水平切向力 P_2=10kN。若［σ］=100Mpa，试用第四强度理论求轴的直径。

解：（1）外力分析，

将 P_1，P_2 向 AB 轴简化，如图

$$m=P_1\bullet\frac{d_c}{2}=5\times\frac{300}{2}$$

$=750$ KN. mm

（2）内力分析：

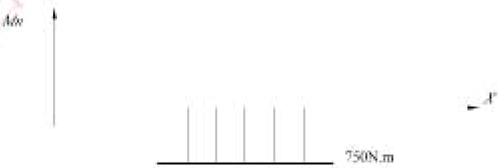
在 m 作用下轴发生扭转，在 P_1、P_2 作用下轴发生弯曲变形，所以 AB 轴为弯曲组合变形。

$$M_Z:\quad M_{C1}=\frac{3}{4}P_1\times 150$$

$=562.5$ KN. mm

$$M_{D2}=\frac{1}{3}\times 562.5$$

$=187.5$ KN. mm



$$M_y:\quad M_{D1}=\frac{3}{4}P_2$$

$=1125$ KN. mm

$$M_{C2}=\frac{1}{3}\times 1125$$

$=375$ KN. mm

$$M:\quad M_C=\sqrt{562.5^2+375^2}$$

$=676.1$ KN. mm

$$M_D=\sqrt{1125^2+187.5^2}$$

$=1140.5$ KN. mm

(3) 强度运算：

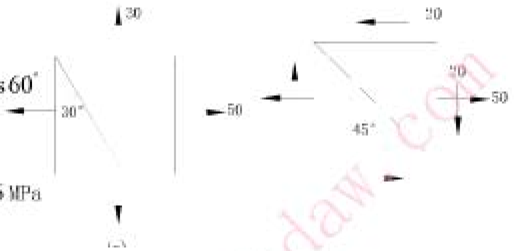
$$\sigma_{xd4}=\frac{\sqrt{M_D^2+M_n^2}}{W_Z}\le[\sigma]$$

$$d\ge\sqrt[3]{\frac{(\sqrt{1140.5^2+750^2}\times10^3)\times32}{\pi\times100}}=51.8\ \mathrm{mm}$$

5. 已知应力状态如图所示（应力单位为：MPa）。

（1）分别用图解法和解析法求（a）、(b) 中指定斜截面上的应力；

（2）用图解法求（c）、(d)、(e)、(f) 上主应力的大小与方向，在单元体上画出主平面的位置，求最大剪应力。



（1）（a）解析法解：

$$\sigma_\alpha=\frac{50+30}{2}+\frac{50-30}{2}\cos60^\circ$$

$=45\ \mathrm{MPa}$

$$\tau_\alpha=\frac{50-30}{2}\sin60^\circ=8.66\ \mathrm{MPa}$$

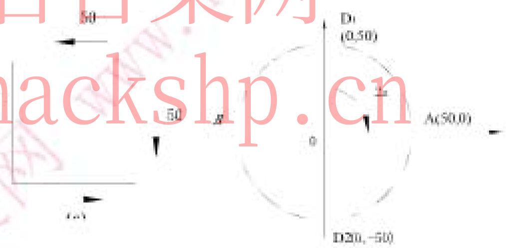
解析法求解：

$$\sigma_{45^\circ}=\frac{50}{2}+\frac{50}{2}\cos90^\circ-20\sin90^\circ$$

$=5\ \mathrm{MPa}$

$$\tau_{45^\circ}=\frac{50}{2}\sin90^\circ+20\cos90^\circ$$

$=25\ \mathrm{MPa}$

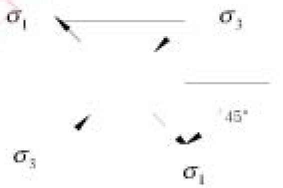


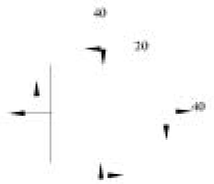
（2）图解法：

$$\begin{cases}\sigma_1=\overline{OA}=50\mathrm{MPa}\\ \sigma_3=\overline{OB}=-50\mathrm{MPa}\end{cases}$$

$\tau_{\max}=OD_1=50\ \mathrm{MPa}$

主平面位置





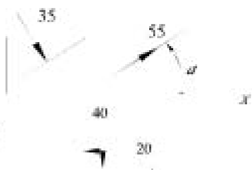
（d）解：作应力图

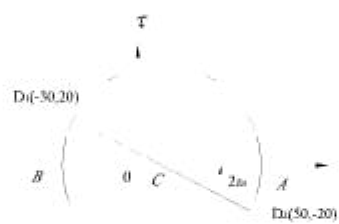
$\sigma_1=\overline{OA}=55\ \mathrm{MPa}$

$\sigma_3=\overline{OB}=-35\ \mathrm{MPa}$

$\tau_{\max}=\overline{CD_1}=45\ \mathrm{MPa}$

$2\alpha_0=27^\circ$



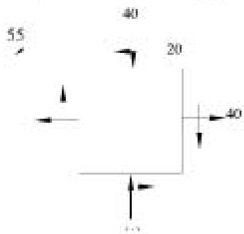


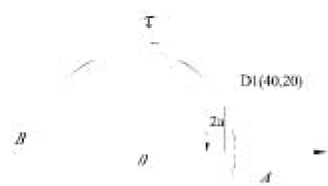
（e）解：作应力图

$\sigma_1=\overline{OA}=45\ \mathrm{MPa}$

$\sigma_3=\overline{OB}=-45\ \mathrm{MPa}$

$\tau_{\max}=\overline{OD}=45\ \mathrm{MPa}$





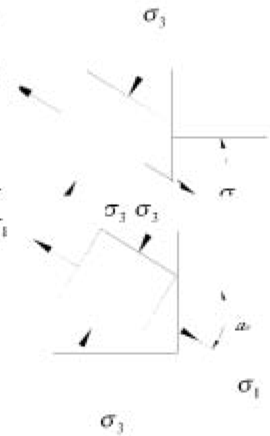
$2\alpha_0=27^\circ$

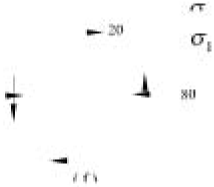
（f） $\sigma_1=\overline{OA}=5$ MPa

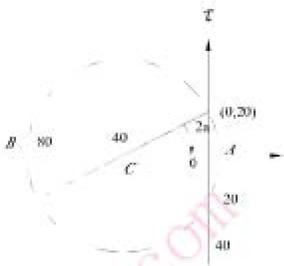
$\sigma_3=\overline{OB}=-85$ MPa

$\tau_{max}=\overline{CD_1}=45$ MPa

$2\alpha_0=27^\circ$







6. 图示一钢质圆杆，直径 D=200mm，已知 A 点在与水平线 60° 方向上的正应变 $\varepsilon_{60^\circ}=4.1\times10^{-4}$，试求载荷 P。已知 $E=210GN/m^2$，$\mu=0.28$。

解：（1）绕 A 点取一单元体，

应力状态如图：

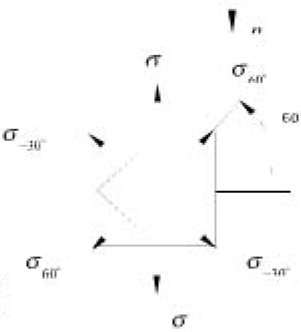
$$\sigma_{60^\circ}=\frac{\sigma}{2}-\frac{\sigma}{2}\cos120^\circ=\frac{3}{4}\sigma$$

$$\sigma_{-30^\circ}=\frac{\sigma}{2}-\frac{\sigma}{2}\cos(-60^\circ)=\frac{1}{4}\sigma$$

（2）由广义虎克定律得：

$$\varepsilon_{60^\circ}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{60^\circ}-\mu\sigma_{-30^\circ}\right]$$

$$=\frac{\sigma}{4E}[3-\mu]=\frac{2.72}{4E}\sigma$$



$$\sigma=\frac{4\times210\times10^3\times4.1\times10^{-4}}{2.72}$$

$=126.6$ MPα

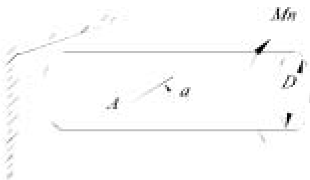
（3）载荷 P：

$$P=\sigma\cdot A=126.6\times\frac{\pi D^2}{4}=\frac{126.6\times}{}$$

7. 扭矩 $M_n=2.5\times10^3\mathrm{N}\cdot m$ 作用在直径 D=60mm 的钢轴上，若 $E=210GN/m^2$，$\mu=0.28$，试求圆轴表面上任一点在与母线成 $\alpha=30^\circ$ 方向上的正应变。

解：（1）绕 A 点取一单元体，

应力状态如图：



$\sigma_{60^\circ}\ \tau=-\dfrac{2.5\times10^{3}\times10^{3}}{\pi\times60^{3}}$

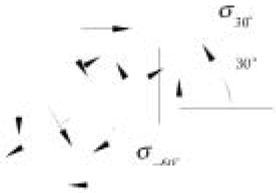
$=-58.9\ \text{MP}\alpha$

（2）$\sigma_{30^\circ}=-\tau\sin2\times30^\circ$

$=58.9\sin60^\circ=51\ \text{MP}\alpha$

$\sigma_{-60^\circ}=-\tau\sin\left[2\times(-60^\circ)\right]$

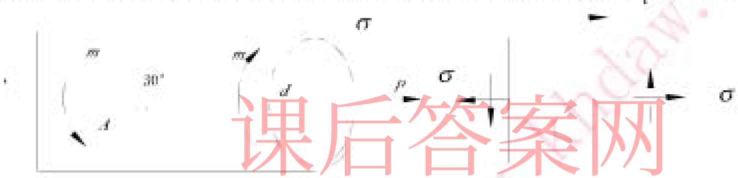
$=-51\ \text{MP}\alpha$



（3）$\varepsilon_{30^\circ}=\dfrac{1}{E}\left[\sigma_{30}-\mu\sigma_{-60}\right]$

$=\dfrac{51-0.28\times(-51)}{210\times10^{3}}=0.311\times10^{-3}$

8．薄壁圆筒扭转—拉伸试验的示意图如图所示。若 P=20k N，m=600N.m，且 d=50mm，$\delta=2$ mm，试求：（1）A 点在指定斜截面上的应力；（2）A 点的主应力的大小及方向（用单元体表示）。

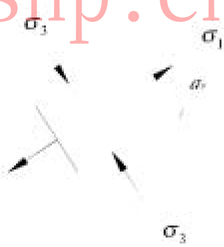


解：（1）绕 A 点取单元体，应力为：

$\sigma=\dfrac{P}{A}=\dfrac{20\times10^{3}}{\pi d\delta}=\dfrac{20\times10^{3}}{\pi\times50\times2}=63.66\text{MP}\alpha$

$\tau=\dfrac{Mn}{2\pi\gamma^{2}\delta}=\dfrac{600\times10^{3}}{2\times\pi\times26^{2}\times2}=70.63\text{MP}\alpha$

（2）$\sigma_{-60^\circ}=\dfrac{\sigma}{2}+\dfrac{\sigma}{2}\cos(-120^\circ)+\tau\sin(-12$



$=\dfrac{1}{4}\times63.66+70.63\sin(-120^\circ)$

$=-45.5\text{MP}\alpha$

$\tau_{-60^\circ}=\dfrac{\sigma}{2}\sin(-120^\circ)-70.63\cos(-120^\circ)$

$=8.1\text{MP}\alpha$

（3）

$\sigma_{max}=\dfrac{\sigma}{2}+\sqrt{(\dfrac{\sigma}{2})^{2}+\tau^{2}}=\dfrac{63.66}{2}+\sqrt{(\dfrac{63.66}{2})^{2}+70.63^{2}}=109.3\ \text{MP}\alpha$

$\sigma_{min}=\dfrac{\sigma}{2}-\sqrt{(\dfrac{\sigma}{2})^{2}+\tau^{2}}=\dfrac{63.66}{2}-\sqrt{(\dfrac{63.66}{2})^{2}+70.63^{2}}=-45.6\ \text{MP}\alpha$

σ_1=109.3MPα　　σ_3=-45.6MPα

$$tg2\alpha_0 = -\frac{2\tau}{\sigma} = -\frac{2\times(-70.63)}{63.66} = 2.22$$

$$2\alpha_0 = 65.74^\circ \qquad \alpha_0 = 32.87^\circ$$

Zy-第十章　组合变形补充习题解答

图 10-12

10-1 若在正方形横截面短柱的中间开一槽，使横截面面积减少为原横截面面积的一半，如图 10-13 所示。试问开槽后的最大正应力为不开槽时最大正应力的几倍？

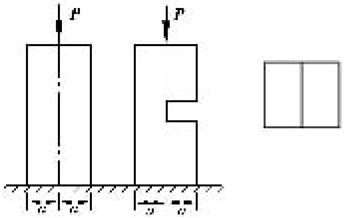


图 10-13

解：（1）开槽前为单向压缩状态则 $\sigma_{\max 1}=\left|\frac{-N}{A}\right|=\left|\frac{-P}{(2a)^2}\right|=\frac{P}{4a^2}$

（2）开槽后中间段受力与轴线平行为压缩与弯曲的组合变形则

$$\sigma_{\max 2}=\left|\frac{-N}{A}-\frac{M}{W_z}\right|=\left|\frac{-P}{(2a)^2}-\frac{P\frac{a}{2}}{\frac{1}{6}2aa^2}\right|=\frac{8P}{4a^2}$$

$(=- P/2a.a - p.0.5a/2a.a/6 = 2p/a^2)$

（3）最大应力比值为 $\frac{\sigma_{\max 2}}{\sigma_{\max 1}}=\frac{\frac{8P}{4a^2}}{\frac{P}{4a^2}}=8$ 倍。

10-2 小型铆钉机座如图 10-14 所示，材料为铸铁，许用拉应力 $[\sigma_t]=30MPa$，许用压应力 $[\sigma_c]=80MPa$，I—I 截面的惯性矩 $I=3789cm^4$，在冲打铆钉时，受力 $P=20kN$ 作用。试校核 I—I 截面的强度。

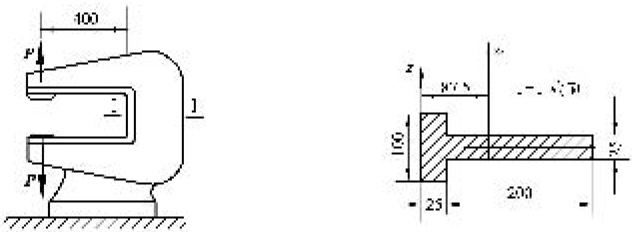


图 10-14

解：（1）分析铆钉机座受力，由于外力与立柱轴线平行，故其发生拉弯组合变形

（2）由于材料抗拉压性能不同，需校核拉压强度

$$\sigma_t=\frac{N}{A}+\frac{My_t}{I_z}=\frac{20\times10^3}{(100+200)\times25}+\frac{20\times10^3\times(400+87.5)}{3789\times10^4}=22.5+2.67=25.2MPa<[\sigma]=30MPa$$

（第 2 个分子应×87.5）

$$\sigma_c=\frac{My_c}{I_z}-\frac{N}{A}=\frac{200\times10^3\times(400+87.5)\times(225-87.5)}{3789\times10^4}-\frac{20\times10^3}{(100+200)\times25}$$

$$=22.5+2.67=32.7MPa<[\sigma_c]=80MPa$$

（第一个分子应为 20×10⁴， 结果|-35.38+2.67|=32.7MPa）

所以强度足够。

10-3 如图 10-15 所示电动机带动皮带轮转动。已知电动机功率 P=12kW，转速 n=900r/min，带轮直径 D=200mm，重量 G=600N，皮带紧边拉力与松边拉力之比为 T：t=2，AB 轴为直径 d=45mm，材料为 45 号钢，许用应力［σ］=120MPa。试按第四强度理论校核该轴的强度。

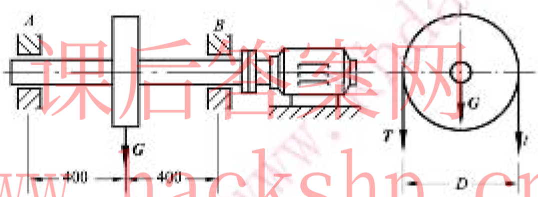


图10-15

解：（1）计算拉力 T，t，由轴的平衡条件知

$$9549\times\frac{P}{n}=(T-t)\frac{D}{2}$$

$$9549\times\frac{12}{900}=t\frac{D}{2}$$

$$t=1273N$$

$$T=2t=2546N$$

（2） 计算轴危险截面的扭矩和弯矩

$$T=(T-t)\frac{D}{2}=127Nm$$

$$M=\frac{1}{4}FL=\frac{1}{4}(T+t+G)\times0.8$$

$$=\frac{1}{4}(1273+2546+600)\times0.8$$

$$=884Nm$$

（3） 由第四强度理论

$$\sigma_{xd}=\frac{\sqrt{M^2+0.75T^2}}{W_Z}=\frac{\sqrt{884^2+0.75\times127^2}}{0.1\times45^3}$$
$$=100MPa<[\sigma]=120MPa$$

所以该轴强度足够。

10-4 如图 10-16 所示圆截面杆受载荷 P 和 m 的作用。已知:P=0.5kN，m=1.2kN·m，圆杆材料为 45 号钢，[σ]=120MPa。力 P 的剪切作用略去不计，试按第三强度理论确定圆杆直径 d。

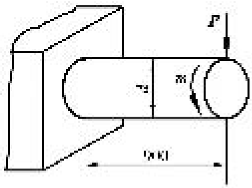


图 10-16

解：（1）计算危险截面的扭矩和弯矩

$$T=m=1.2KNm$$
$$M_{max}=pl=0.5\times10^3\times0.9=450Nm$$

(2) 由第三强度理论

$$W_Z\geq\frac{\sqrt{M^2+T^2}}{[\sigma]}=\frac{\sqrt{450^2+1200^2}\times10^3}{120}$$
$$d^3\geq\frac{\sqrt{1440000+202500}\times10^3}{\frac{1}{32}\pi\times120}$$
$$d\geq47.5mm$$

取 $d=48mm$

10-5 如图 10-17 所示拐轴在 C 处受铅垂力 P 作用。已知，P=3.2kN。轴的材料为 45 号钢，许用应力 [σ]=160MPa。试用第三强度理论校核 AB 轴的强度。

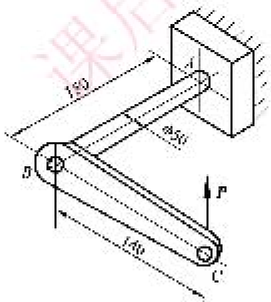


图 10-17

(1) 计算危险截面的扭矩和弯矩

$$M=p\times140=3.2\times140\times10^3$$

$$T = p\times150 = 3.2\times150\times10^3$$

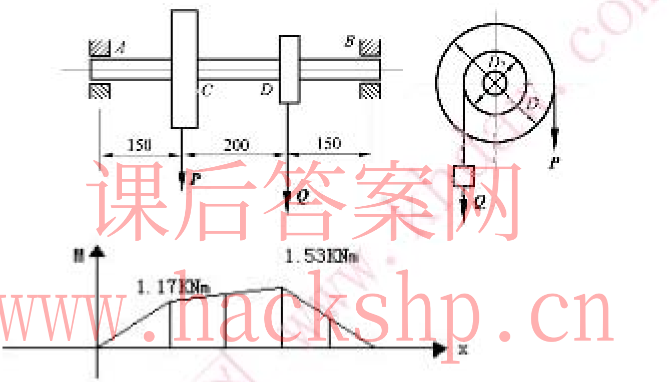
(2) 由第三强度理论

$$\sigma_{xd3} = \frac{\sqrt{M^2+T^2}}{W_Z} = \frac{\sqrt{(3.2\times140)^2+(3.2\times150)^2}\times10^3}{0.1\times50^3}$$

$$= 52.5MPa < [\sigma] = 120MPa$$

轴的强度足够

10-6 如图 10-18 所示，在 AB 轴上装有两个轮子，轮上分别作用力 P 和 Q 而处于平衡状态，已知:Q=12kN，D1 =200mm，D2 =100mm，轴的材料为碳钢，许用应力［σ］=120MPa。试按第四强度理论确定 AB 轴的直径。



(1) 计算外力 P，由轮的平衡条件知

$$P\frac{D_1}{2} = Q\frac{D_2}{2}$$

$$P = \frac{QD_2}{D_1} = \frac{12\times100}{200} = 6KN$$

(2) 计算扭矩

$$T = P\frac{D_1}{2} = 6\times\frac{200}{2} = 6\times10^5\ Nmm$$

(3) 计算 AB 支座反力

$$\sum m_A(\bar{F}) = 0$$

$$N_B\times500 = 150P = 350Q$$ （应为 =150P+350Q）

$$N_B = 10.2KN$$

$$N_A = 7.8KN$$

(4)画弯矩图，经分析知 D 截面为危险截面

(5) 由第四强度理论确定 AB 轴的直径

$$\sigma_{xd}=\frac{\sqrt{M^2+T^2 0.75}}{W_Z}\le[\sigma]$$

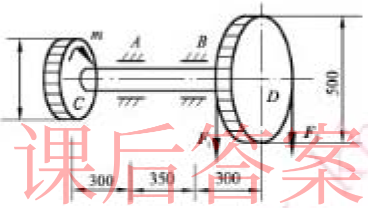
$$\frac{\sqrt{150^2+600^2 0.75}}{0.1d^3}\le 120$$ （根号内应为 $1530^2+600^2\times0.75$

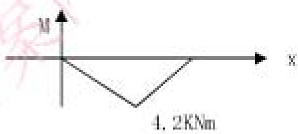
$$d\ge\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2610900\times10^3}}{120\times0.1}}=51.3mm$$

（根号内 10^3 应在 2 次根号外面）

取 $d=22mm$

10-7 两端装有传动轮的钢轴如图 10-20 所示，轮 C 输入功率 NP =14.7kW，转速 n=120r/min，D 轮上的皮带拉力 F1 =2F2 ，材料的许用应力 [σ] =160MPa。按第四强度理论设计轴的直径。





(1) 计算扭矩和皮带拉力 F_1, F_2

$$m=9549\times\frac{P}{n}=9549\times\frac{14.7}{120}=1170NM$$

$$(F_1-F_2)\times\frac{D}{2}=m$$ （T=m）

$$F_2=\frac{1170}{0.25}N=4679N$$

$$F_1=2F_2=9358N$$

(2) 画轴的受力图，计算 A、B 支座约束力。

$$\sum m_B(\bar{F}) = 0$$

$$N_A \times 350 = (F_1 + F_2) \times 300, N_A = 12KN$$

（3）画弯矩图，经分析知 B 截面为危险截面

（4）由第四强度理论设计轴的直径

$$\sigma_{xd4} = \frac{\sqrt{M_D^2 + 0.75T^2}}{W_Z} \le [\sigma]$$

$$W_Z \ge \frac{\sqrt{4210^2 + 0.75 \times 1170^2}}{[\sigma]}$$

$$0.1d \ge \frac{4331 \times 10^3}{160}, d \ge 64.6mm$$

$(0.1d^3)$

取　$d = 65mm$

工程力学习题答案

第九章　　梁的弯曲

判断题：

1. 梁发生平面弯曲时，梁的轴线必为载荷作用面内的平面曲线。（对）

2. 最大弯矩必定发生在剪力为零的横截面上。（错）

3 梁上某一横截面上的剪力值等于截面一侧横向力的代数和。而与外力偶无关；其弯矩值等于截面一侧外力对截面形心力矩的代数和。（对）

4. 两梁的跨度、承受载荷及支承相同，但材料和横截面面积不同，因而两梁的剪力图和弯矩图也不一定相同。（错）

5. 纯弯曲时，梁变形后横截面保持为平面，且其形状、大小均保持不变。（错，P201 图 9-15）

6. 平面弯曲时，中性轴垂至于载荷作用面。（对）

7. 若梁上某一横截面上弯矩为零，则该截面的转角和挠度必也为零。（错）

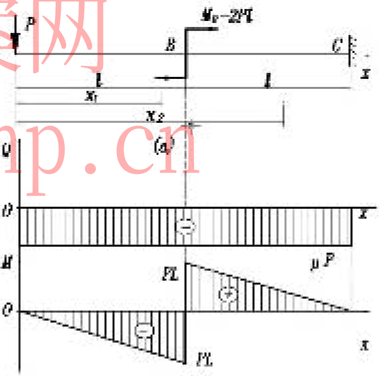
8. 若梁上某一段内各截面上的弯矩均等于零，则该段梁的挠曲线必定是一直线段。（对）

9. 两梁的横截面、支承条件以及承受载荷均相同，而材料不同，则两梁的挠曲线方程相同。（错 E 不同）

10. 不论载荷怎样变化，简支梁的最大挠度可以用梁的中点挠度来代表。（错）

习题九

1. 设 P、q、M_0、L、a 均为已知，如图所示试列出各题的剪力方程和弯矩方程式，绘出 Q、M 图并出 $|Q|_{\max}$ 值和 $|M|_{\max}$ 值。



（a）解：AB 段：

$$Q(x)=-P \qquad (0\le x\le L)$$

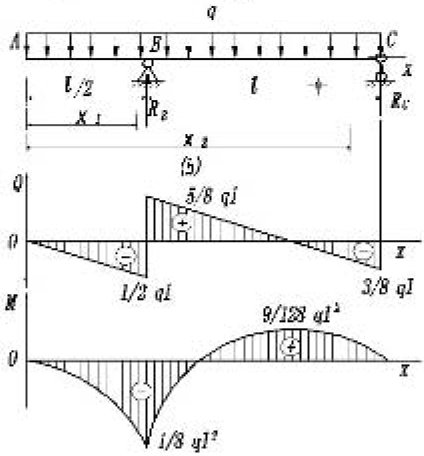
$$M(x)=-Px \qquad (0\le x\le L)$$

BC 段：$Q(x)=-P$

$$(L\le x\le 2L)$$

$$M(x)=2PL-Px \qquad (L\le x\le 2L)$$

$$|Q|_{\max}=P \qquad |M|_{\max}=PL$$



（b）解：AB 段　$Q(x)=-qx$

$$(0\le x\le \frac{L}{2})$$

$$M(x)=-\frac{1}{2}qx^2$$

$$(0\le x\le \frac{L}{2})$$

BC 段　$Q(x)=-qx+\frac{9}{8}qL$

$$(\frac{L}{2}\le x\le \frac{3L}{2})$$

$$M(x)=-\frac{1}{2}qx^2+\frac{9}{8}qLx-\frac{9}{16}qL^2$$

$$\left(\frac{L}{2}\le x\le\frac{3L}{2}\right)$$

$$|Q|_{max}=\frac{5qL}{8}\qquad |M|_{max}=\frac{1}{8}qL^2$$

2．绘出图示各梁的剪力图和弯矩图，求出$|Q|_{max}$和$|M|_{max}$，并用微分关系对图形进行校核。

（a）解：根据平衡方程求支反力

$$R_A=\frac{16}{3}\ \text{kN},$$

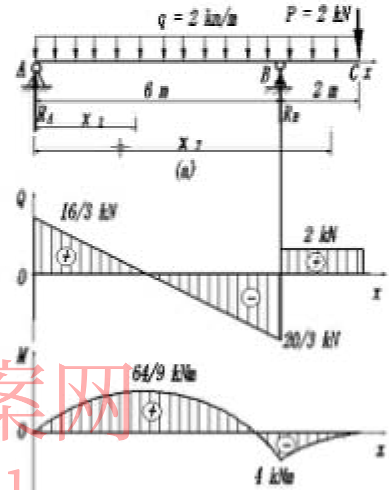
$$R_B=\frac{26}{3}\ \text{kN}$$

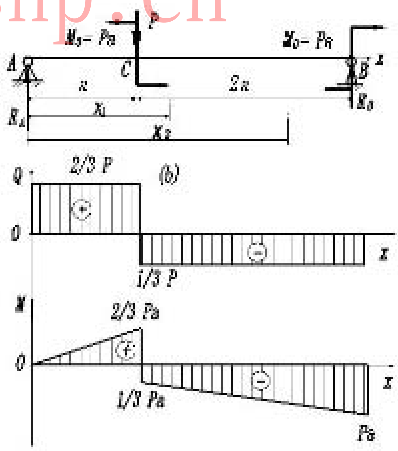
做剪力图，

弯矩图

$$|Q|_{max}=\frac{20}{3}\ \text{kN},$$

$$|M|_{max}=\frac{64}{9}\ \text{kN.m}$$





（b）解：根据平衡条件球求支反力

$$R_A=\frac{2p}{3}$$

$$R_B=\frac{p}{3}$$

做剪力图、弯矩图

$$|Q|\max=\frac{2p}{3}$$

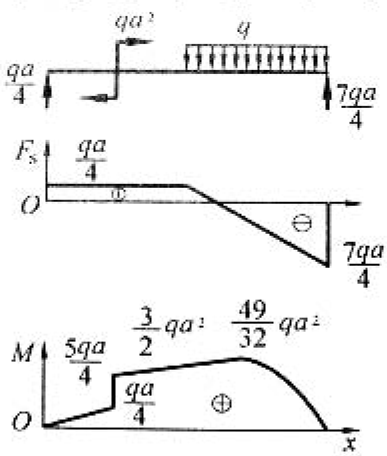
$$|M|\max=pa$$

3.（a）$\Sigma M_B=0$, $-R_A.4a-qa^2+q.2a.a=0$, $R_A=qa/4$ $R_B=7qa/4$

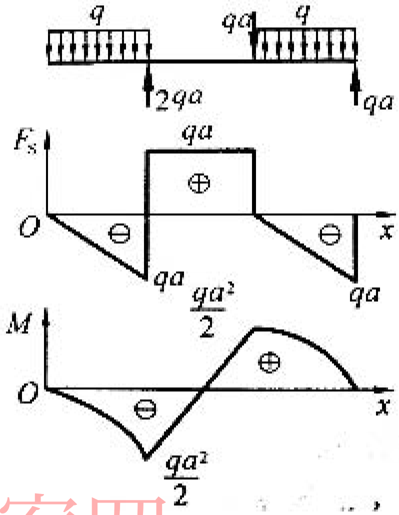
$Q_A=qa/4$, $Q_B=Q_C-q.2a=qa/4-2qa=-7qa/4$

(b) $\Sigma M_B=0$，$qa\times5a/2-R_A.2a+qa.a+qa.a/2=0$

$R_A=2qa$, $R_B=qa$



（a₁）



(a)$M_A=0$, $M_D=0+qa/4\times a=qa^2/4$

$M_E=M_D+qa^2=5qa^2/4$

$M_C=M_E+qa/4\times a=3qa^2/2$

顶点 $M_F=M_C+0.5(qa/4+0)\times(2a\times1/8)=49qa^2/32$

(b) $M_A=0$, $M_B=M_A+0.5(0-qa).a=-qa^2/2$,

$M_C=M_B+qa.a=-qa^2/2+qa^2=qa^2/2$

$M_D=M_C+0.5(0-qa).a=qa^2/2-qa^2/2=0$

4．已知图示各梁的载荷 P、q、M 和尺寸。（1）作剪力图和弯矩图；（2）确定 $|Q|_{max}$ 值和 $|M|_{max}$ 值。

解 （a）

解：(1) 在 AC 、CB 段内分别取距 A 点为 x_1 、x_2 的截面，列剪力、弯矩方程：

$Q_{(x_1)}=-qx_1$ （$0<x_1<a$）

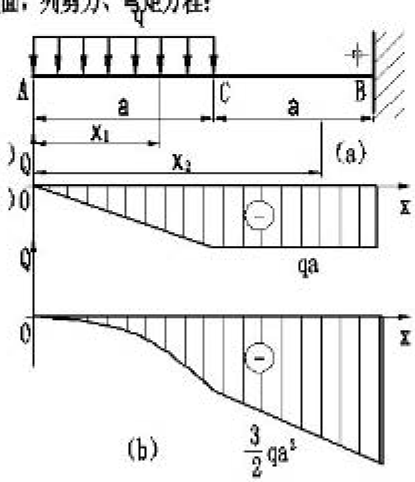
$Q_{(x_2)}=-qa$ （$a\leqslant x_2\leqslant 2a$）

$M_{(x_1)}=-qx_1.\frac{1}{2}x_1=-\frac{1}{2}qx_1^2$ （$0<x_1<a$）

$M_{(x_2)}=-qa(x_2-\frac{a}{2})=-qax_2+\frac{1}{2}qa^2$ （$a\leqslant x_2\leqslant 2a$）

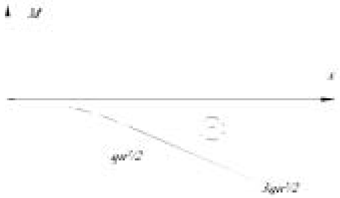
(2) 根据剪力、弯矩方程画剪力图、弯矩图如图 （b）

(3) $|Q|_{max}=qa$ $|M|_{max}=\frac{3}{2}qa^2$



（a）

(b) $R_A=4Pa/3$ $R_B=5Pa/3$



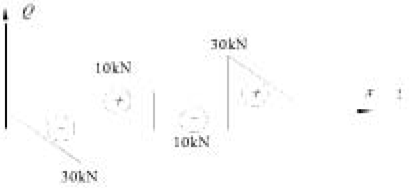
(d) $\sum M_B=0$, $-R_A\, a+qa/2\times 3a/4=0$, $R_A=3qa/8$, $R_B=qa/8$, $Q_A=3qa/8$,

$Q_C=3qa/8-q.a/2=-qa/8$, $M_A=0$, $M_F=0+0.5(3qa/8+0).3a/8=9qa^2/128$

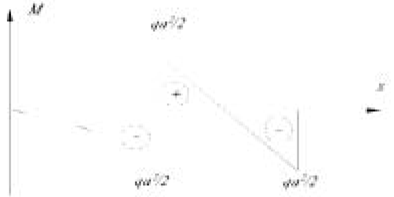
$M_C=M_F-0.5.q.a/8.a/8=qa^2/16$ $M_B=M_C-qa/8\times a/2=0$

(e) $|Q|\max=\dfrac{7}{2}p$ $|M|\max=\dfrac{5}{2}p_a$

(f) $|Q|\max = 30kn$ $|M|\max = 15kn?m$



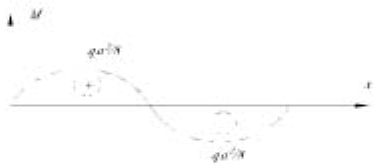
(g) $|Q|_{\max} = qa$ $|M|_{\max} = qa^2/2$



(h) $|Q|\max = \dfrac{qa}{2}$ $|M|\max = \dfrac{1}{8}qa^2$

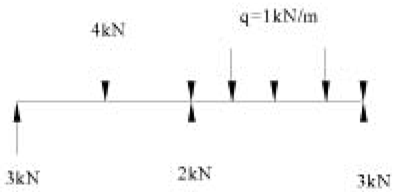
$Q_A=R_A=qa/2,\ Q_B=qa/2,\ Q_C=Q_A-q.a=-qa/2;\ M_A=0,\ M_C=M_A+0.5(qa/2-qa/2)=0$

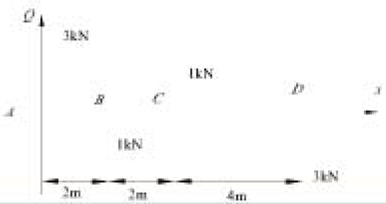
$M_F=M_A+0.5\times(qa/2+0)\times a/2=qa^2/8;$



5. 设梁的剪力图如图所示，试作弯矩图及载荷图。已知梁上设有作用集中力偶。

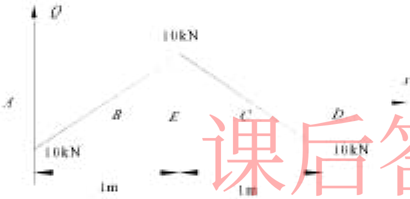
(a)

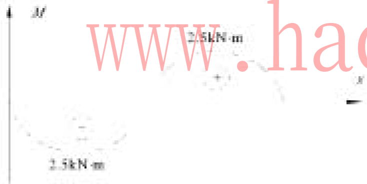




$M_A=0,\ M_B=0+3\times2=6, M_C=6-1\times2=4,\ M_F=4+0.5\times(1+0)=4.5,\ M_D=4.5+0.5\times(0-3)\times3=0$

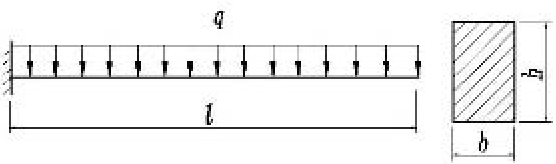
(b)





$M_B=0+0.5\times(-10+0)=-2.5 \qquad M_C=0+0.5\times(10+0)=2.5$

6. 矩形截面悬臂梁如图所示，已知 l=4m, $\dfrac{b}{h}=\dfrac{2}{3}$, q =10kN/m, $[\sigma]=10$ MPa,试确定此梁横截面尺寸。



解：梁的最大弯矩发生在固定端截面上，

$$M\max = \frac{1}{2}ql^2 = (\frac{1}{2}\ \ 10\ \ 4^2) = 80knm$$

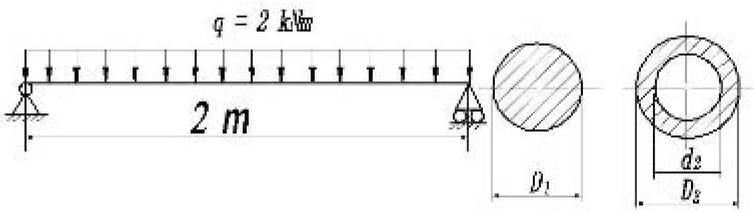
梁的强度条件 $s = \dfrac{m}{w} = \dfrac{80'\ 10^3}{\frac{1}{6}bh^2}\ ?\ [s]$

将 $b=\dfrac{2}{3}h$ 代入上式得 $\dfrac{6\quad 80\quad 10^{6}}{\dfrac{2}{3}h\times h^{2}}$ £ [s] h^{3} ³ $(\dfrac{3\quad 6\quad 80?\ 10^{3}}{2\quad 10\quad 10^{6}})m^{3}$

所以 $h=416\text{mm}$，$b=\dfrac{2}{3}h=277\text{mm}$

7．简支梁承受布载荷如图所示。若分别采用截面面积相等的实心和空心圆截面，且 $D_1=40\text{mm}$，$\dfrac{d_2}{D_2}=\dfrac{3}{5}$，试分别计算它们的最大正压力。并问空心圆截面比实心截面的最大正应力减小了百分之几？

解：因空心圆与实心圆面积相等，所以



$$\frac{\pi}{4}D_1^2=\frac{\pi}{4}(D_2^2-d_2^2)$$

$$D_1^2=D_2^2-d_2^2=D_2^2-(\frac{3}{5}D_2)^2=(\frac{4}{5}D_2)^2$$

将 $D_1=40$ mm 代入上式，得：

$D_2=50$ mm，$d_2=30$ mm

均布荷载作用下的简支梁，最大弯矩产生在梁跨度中间截面上

$$M_{\max}=\frac{ql^2}{8}=\frac{2\times10^3\times2^2}{8}=1\ \text{kN.m}$$

实心圆截面梁的最大应力

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{w_1}=\frac{32M_{\max}}{\pi D_1^3}=\frac{32\times10^3}{\pi(0.04)^3}=159\ \text{MPa}$$

空心圆截面最大应力

$$\sigma'_{\max}=\frac{M_{\max}}{w_2}=\frac{M_{\max}}{\dfrac{\pi D_2^3}{32}\left[1-(\dfrac{d_2}{D_2})^4\right]}=\frac{32\times10^3}{\pi(0.05)^3\left[1-(\dfrac{3}{5})^4\right]}=93.6\ \text{MPa}$$

空心圆截面梁比实心圆截面梁的最大正应力减少了

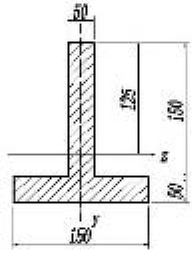
$$\frac{\sigma_{\max}-\sigma'_{\max}}{\sigma_{\max}}=\frac{159-93.6}{159}=41.1\%$$

8．T 字形截面梁的截面尺寸如图所示，若梁危险截面承受在铅垂对称平面的正弯矩 $M=30\text{kNm}$，试求：（1）截面上的最大拉应力和压应力；（2）证明截面上拉应力和等于压应力之和，而其组成的合力矩等于截面的弯矩。

解：（1）计算 T 字形截面对形心轴的惯性矩

$$I_Z=\frac{50\times150^3}{12}+50\times150\times50^2+\frac{150\times50^3}{12}+50\times150\times50^2$$

$=5312.5\times10^4\ mm^4$



最大拉应力发生在截面最下边缘

$$\sigma_{t\max}=\frac{M\bullet y_1}{I_z}=\frac{30\times10^3\times75\times10^{-3}}{5312.5\times10^4\times10^{-12}}=42.35\text{MPa}$$

最大压应力发生在截面最上边缘

$$\sigma_{c\max}=\frac{M\bullet y_2}{I_z}=\frac{30\times10^3\times125\times10^{-3}}{5312.5\times10^4\times10^{-12}}=70.59\text{MPa}$$

（2）证明：①中性轴上侧压力之和为（拉、压力公式：$F_c=\int_0^{y_1}My/I_z\times b_1\,dy$）

$$F_C=\int_0^{0.125}\frac{M\bullet y}{I_Z}\bullet0.05\bullet dy=\frac{M\bullet0.05}{I_Z}\int_0^{0.125}ydy=\frac{M}{I_Z}\bullet3.90625\times10^{-4}$$

$=M/I_z$ [（1/2）$\times0.125^2-0$]$=M/I_z\,0.05\times0.5\times0.015625=M/I_z\times3.91\times10^{-4}$ Nm

中性轴下侧拉力之和为

$$F_t=\int_0^{0.025}\frac{M\bullet y}{I_Z}\bullet0.05dy+\int_{0.025}^{0.075}\frac{M\bullet y}{I_Z}\bullet0.15\bullet dy$$

$$=\frac{M}{I_Z}\left[\int_0^{0.025}0.05ydy+\int_{0.025}^{0.075}0.15ydy\right]$$

$$=\frac{M}{I_Z}\bullet3.90625\bullet10^{-4}$$

$\therefore F_c=F_t$　所以截面上拉力之和等于压力之和。

②截面上合力矩为

$$\int_0^{0.125}\frac{My^2}{I_z}\bullet0.05\bullet dy+\int_0^{0.125}\frac{My^2}{I_z}0.05dy+\int_{0.025}^{0.075}\frac{My^2}{I_z}0.15dy$$

$$=\frac{M}{I_z}\bullet0.05\bullet10^{-9}\bullet1062500$$

$$=M\bullet\frac{0.05\bullet10^{-9}\bullet1062500}{5312.5\bullet10^4\bullet10^{-12}}=M$$

所以合力矩等于截面上的弯矩。

9. T形截面的铸铁悬臂梁及其承载情况如图示，材料的许用拉应力$[\sigma_t]=40MPa$，许用压应力$[\sigma_c]=80MPa$，试求梁的许可载荷$[p]$

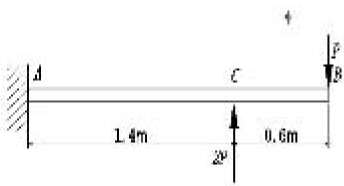
解：梁的弯矩图如图，

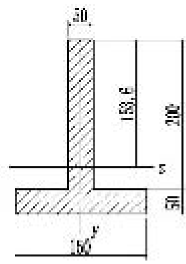
弯矩的两个极值分别为

$\mu_1=0.8P$，$M_1=2P\times1.4-P\times2=0.8P$

$\mu_2=0.6P$，$M_c=-0.6P$

截面对形心轴的惯性矩为





（$I_z=bh^3/12+Ah_i^2$，$h_{i上}=153.6-100=53.6mm$，$h_{i下}=200-153.6+25=71.4mm$ ）

$$I_z=\left[\frac{50\times200^3}{12}+50\times200\times53.6^2+\frac{150\times50^3}{12}+50\times150\times71.4^2\right]mm^4$$

$=10180\ cm^4$

根据弯曲正应力强度条件

$\sigma_{\max}=\frac{M}{I_z}y_{\max}\le[\sigma]$，$M\leqslant[\sigma].I_z/y_{\max}$

由 A 截面的强度要求确定许可荷载。

由抗拉强度要求得（A 截面下缘拉应力最大）

$P\le\frac{1}{0.8}\times\frac{[\sigma_t]I_z}{y_1}=\frac{1}{0.8}\times\frac{40\times10^6\times10180\times10^{-8}}{9.64\times10^{-2}}N=52.8\ KN$ （$y_1=200-153.6+50=96.4mm$

$=9.64\times10^{-2}m$ ）

由抗压强度要求得（A 截面上缘压应力最大）

$P\le\frac{1}{0.8}\times\frac{[\sigma_c]I_z}{y_2}=\frac{1}{0.8}\times\frac{80\times10^6\times10180\times10^{-8}}{15.36\times10^{-2}}N=66\ KN$（$y_2=153.6\ mm=1.536\times10^{-1}$.）

由 C 截面的强度要求确定许可载荷：

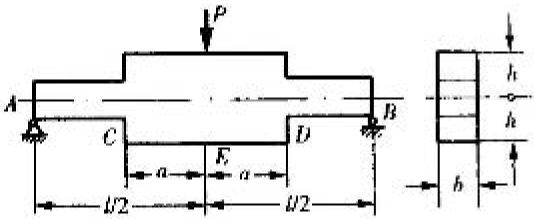
由抗拉强度得：（C 截面上缘拉应力最大）

$P\le\frac{1}{0.6}\times\frac{[\sigma_t]I_z}{y_2}=\frac{1}{0.6}\times\frac{40\times10^6\times10180\times10^{-8}}{15.36\times10^{-2}}N=44.1KN$

显然 C 截面的压应力大于拉应力，不必进行计算。

许用载荷为　$P\le44.1\ KN$

10．矩形截面的变截面梁 AB 如图示，梁的宽度为 b,高度为 $2h$（CD 段）和 h(AC、DB 段许用应力为$[\sigma]$，为使截面 C、E、D 上的最大应力均等于$[\sigma]$，加强部分的长度 $2a$ 应取多少？



解：由题意可得 C,D,E 截面的弯矩值

$R_A=R_B=P/2$

$$M_C=M_D=\frac{P}{2}\bullet(\frac{L}{2}-a)$$

$$M_E=\frac{P}{2}\bullet\frac{L}{2}$$

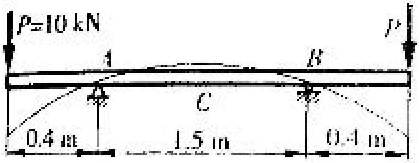
截面上最大应力值为　$\sigma_{\max}=\frac{M}{W_Z}$

欲使截面 C,D,E 上最大应力相等，则有 $\frac{M_C}{W_{Z_1}}=\frac{M_E}{W_{Z_2}}$

即　$$\frac{\frac{P}{2}(\frac{L}{2}-a)}{\frac{1}{6}bh^2}=\frac{\frac{P}{2}\bullet\frac{L}{2}}{\frac{b}{6}(2h)^2}$$

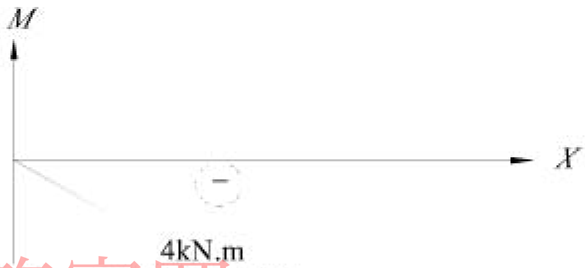
解得　$2a=\dfrac{3L}{4}$

11．直径 d=7.5 cm 圆截面钢梁承受载荷如图示，钢的弹性摸量 E=200GPa，试求梁内最大正应力，AB 段变形后的曲率半径和跨度中点 C 的挠度。



解：梁弯矩图如图所示

$R_A=R_B=P$，$M_{max}=10\times0.4=4\ \text{kNm}$



梁内最大正应力

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{W_z}=\frac{4\times10^3\times32}{\pi\times7.5^3\times10^{-6}}$$

$=96.58$ MPa

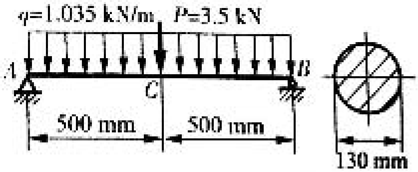
AB 段为线弯曲，变形后曲率半径

$$\rho=\frac{EI_z}{M}=\frac{200\times10^9\times\pi\times7.5^4\times10^{-8}}{4\times10^3\times64}=77.4\,\text{m}$$ （由 P203 公式 9-8）

跨度中点 C 的挠度。

$$y_C=\rho-\sqrt{\rho^2-L_{AC}^2}=77.4-\sqrt{77.4^2-0.75^2}=3.6\,\text{mm}$$

12．简化后的电动机轴受载及尺寸如图所示，E=200GN/m^2，定子与转子间的间隙 δ=0.35mm，试校核刚度。



解：电动机轴惯性矩

$$I_Z=\frac{\pi d^4}{64}=\frac{\pi\times130^4\times10^{-12}}{64}=1.4\times10^7\ mm^4$$

C 点的挠度

$$y_c=y_c(p)+y_c(q)=-\frac{pl^3}{48EI}-\frac{5ql^4}{384EI}$$

（查表 9-11 ⑤ 、⑦中 y_{max} ）

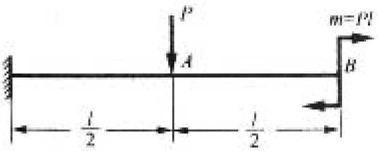
$$=\frac{-n}{200\times10^9\times1.4\times10^7\times10^{-12}}\left[\frac{3.5\times10^3\times1^3}{48}-\frac{5\times1.035\times10^3\times1^4}{384}\right]$$

$=-0.0308$ mm

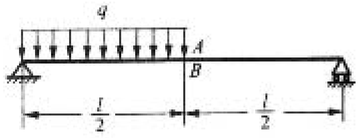
因为 $|y_c|=0.0308<0.35$

所以电动机轴满足刚度要求。

13．用叠加法求图示各梁截面 A 的挠度和截面 B 的转角。EI 为已知常数。



(a)



(b)

解：（a）查表 9-1 ②、④

查表 9-1②挠度方程，将 x=c= $l/2$ 代入 $y=-Px^2(3c-x)/6EI$，得：$y_{A1}=-Pl^3/24EI$，

查表 9-1④将 x= $l/2$ 代入挠度方程，得：$y_{A2}=-m(l/2)^2/2EI=-Pl^3/8EI$

将 c= $l/2$ 代入②，得 $\theta_B=-P(l/2)^2/2EI=-Pl^2/8EI$

$$Q_{B1}=Q_A=-\frac{pl^2}{8EI},\quad Q_{B2}=-\frac{ml}{EI}=-\frac{pl^2}{EI}$$

由叠加原理有 $y_A=y_{A1}+y_{A2}=-Pl^3/24EI-Pl^3/8EI=-\frac{pl^3}{6EI}$

$$Q_B=Q_{B1}+Q_{B2}=-\frac{9pl^2}{8EI}$$

（b）由图查表 9-1⑦，将 $x=l/2$ 代入挠度方程和转角方程，得：

当 q 满布整梁时 $x=l/2$ 处的挠度（当 q 不满布时，应乘以长度比值）。

$$y_{A1}=f_{A1}=\frac{5ql^4}{384EI}$$

所以，$y_A=1/2\cdot y_{A1}=\frac{5ql^4}{768EI}(\downarrow)$

由表 9-1⑦，用 $l/2$ 代换转角公式中的 l，得当 q 满布时 $l/2$ 处的转角，

$$Q_{B1}=\frac{2ql^3}{384EI}，所以\quad Q_B=\frac{1}{2}Q_{B1}=\frac{ql^3}{384EI}(\nearrow)\quad (Q 应为\theta)$$