第一章 复数和复变函数

一、单项选择题

A D B C D A

二、填空题

1、(1) $|z| = \underline{5}$， $\underline{\arctan(\frac{4}{3}) - \pi}$。

(2)实部为 $\underline{-\frac{1}{25}}$，虚部为 $\underline{-\frac{32}{25}}$。

提示：本题注意到 $(1-i)^2 = -2i$， $(1+i)^2 = 2i$，则

$$z = \frac{(1-i)^5 - 1}{(1+i)^5 + 1} = \frac{[(1-i)^2]^2(1-i) - 1}{[(1+i)^2]^2(1+i) + 1} = \frac{(-2i)^2(1-i) - 1}{(2i)^2(1+i) + 1} = -\frac{1}{25} - \frac{32}{25}i \text{。}$$

(3)复数为 $\underline{\frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}$。

提示：本题相当于解 $z = e^{-i\frac{2}{3}\pi}(1+i) = (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)(1+i) = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \frac{-1-\sqrt{3}}{2}i$。

(4) $z_1 z_2$ 的指数式 $\underline{2e^{\frac{\pi i}{12}}}$， $\frac{z_1}{z_2}$ 的三角式为 $\underline{\frac{1}{2}[\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}]}$。

(5) $\lim\limits_{z\to 1}\frac{z\bar{z} + 2z - \bar{z} - 2}{z^2 - 1} = \underline{\frac{3}{2}}$。

提示： $\lim\limits_{z\to 1}\frac{z\bar{z} + 2z - \bar{z} - 2}{z^2 - 1} = \lim\limits_{z\to 1}\frac{(\bar{z}+2)(z-1)}{(z-1)(z+1)} = \lim\limits_{z\to 1}\frac{\bar{z}+2}{z+1} = \frac{3}{2}$。

(6) $z = \underline{-1 + \sqrt{3}\mathrm{i}}$。

提示：（利用复数的几何意义）向量 $z-2$ 与向量 $z+2$ 夹角为 $\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$，在复平面上，代表复数 $z-2$、z、$z+2$ 的点在平行于 x 轴的直线上（由于此三点的虚轴没有发生变化）。连接 0，$z+2$，$z-2$ 的三角形为 $Rt\Delta$。因此推出向量 $|z| = 2$， $\arg z = \frac{2\pi}{3}$，即

$z=-1+\sqrt{3}i$。本题也可以利用代数法来做。

三、计算与证明

1、把复数 $z=1-\cos\alpha+i\sin\alpha$, $0\le\alpha\le\pi$ 化为三角表示式与指数表示式，并求 z 的辐角主值。(可参照例题 4)

解：（解法一） $r=\sqrt{(1-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}=\sqrt{4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}=2\sin\dfrac{\alpha}{2}$；因为当 $0<\alpha<\pi$ 时，

$\sin\alpha>0$，$1-\cos\alpha>0$，则 $\arg z=\arctan\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\arctan(\cot\dfrac{\alpha}{2})$

$=\arctan(\tan\dfrac{\pi-\alpha}{2})=\dfrac{\pi-\alpha}{2}$，所以 $1-\cos\alpha+i\sin\alpha=2\sin\dfrac{\alpha}{2}(\cos\dfrac{\pi-\alpha}{2}$

$+i\sin\dfrac{\pi-\alpha}{2})=2\sin\dfrac{\alpha}{2}e^{i\frac{\pi-\alpha}{2}}$。即 $1-\cos\alpha+i\sin\alpha=2\sin\dfrac{\alpha}{2}e^{i\frac{\pi-\alpha}{2}}$。上式对于 $\alpha=0$ 及 $\alpha=\pi$ 时也成立。

（解法二）利用三角公式，有 $1-\cos\alpha+i\sin\alpha=2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+2i\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$

$=2\sin\dfrac{\alpha}{2}(\sin\dfrac{\alpha}{2}+2i\cos\dfrac{\alpha}{2})=2\sin\dfrac{\alpha}{2}(\cos\dfrac{\pi-\alpha}{2}+i\sin\dfrac{\pi-\alpha}{2})$……三角表示式

$=2\sin\dfrac{\alpha}{2}e^{i\frac{\pi-\alpha}{2}}$ ……………………………指数表示式。

2、解下列方程 $(1+z)^5=(1-z)^5$。

分析：显然原方程可化简为一个典型的二项方程。

解：由直接验证可知原方程的根 $z\ne1$。所以原方程可改写为 $\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^5=1$。

令 $\omega=\dfrac{1+z}{1-z}$， ……………(1) 则 $\omega^5=1$， ……………………(2)

方程(2)的根为 $\omega=1,e^{\frac{2\pi}{5}i},e^{\frac{4\pi}{5}i},e^{\frac{6\pi}{5}i},e^{\frac{8\pi}{5}i}$。即 $\omega=e^{i\alpha}$，$\alpha=0,\dfrac{2}{5}\pi,\dfrac{4}{5}\pi,\dfrac{6}{5}\pi,\dfrac{8}{5}\pi$。但

由(1) $z=\dfrac{\omega-1}{\omega+1}=\dfrac{e^{i\alpha}-1}{e^{i\alpha}+1}=\dfrac{\cos\alpha+i\sin\alpha-1}{\cos\alpha+i\sin\alpha+1}=\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}(-\sin\frac{\alpha}{2}+i\cos\frac{\alpha}{2})}{2\cos\frac{\alpha}{2}(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2})}$

$=i\tan\dfrac{\alpha}{2}$。故原方程的根为 $z=i\tan\dfrac{\alpha}{2}$，其中 $\alpha=0,\dfrac{2}{5}\pi,\dfrac{4}{5}\pi,\dfrac{6}{5}\pi,\dfrac{8}{5}\pi$。

3、函数 $\omega=\dfrac{1}{z}$ 把 z 平面上的下列曲线映射成 ω 平面上怎样的曲线?

(1) $x=3$； (2) $(x-1)^2+y^2=1$ 且 $y>0$。

解：(1)令 $z=x+iy$，$\omega=u+iv$，$\omega=\dfrac{1}{z}\Rightarrow z=\dfrac{1}{\omega}$，即 $x+iy=\dfrac{1}{u+iv}=\dfrac{u-iv}{u^2+v^2}$。因此 $x=\dfrac{u}{u^2+v^2}$，$y=\dfrac{-v}{u^2+v^2}$。而已知曲线方程为 $x=3$。故 z 平面上直线 $x=3$ 在 $\omega=\dfrac{1}{z}$ 下的像曲线为 $u^2+v^2-\dfrac{1}{3}u=0$。这是 ω 平面上过原点的圆周。

(2)方程 $(x-1)^2+y^2=1$ 化为 $\dfrac{x}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{2}$，而 $\omega=\dfrac{1}{z}\Leftrightarrow u=\dfrac{x}{x^2+y^2},v=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$。因此所求的像恰为 $u=\dfrac{1}{2}$ 且 $v<0$（$\because y>0$）。

4、证明：$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$，并说明其几何意义。

证明：（利用公式 $|z|^2=z\bar{z}$）左式 $=|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)$ $+(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)=2z_1\bar{z}_1+2z_2\bar{z}_2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$，得证。

几何意义：平行四边形的两条对角线的平方和等于四边的平方和。

5、如果 $z=e^{it}$，证明 $z^n-\dfrac{1}{z^n}=2i\sin nt$ 成立。

证明：$z^n-\dfrac{1}{z^n}=(e^{it})^n-(e^{-it})^n=e^{int}-e^{-int}=2i\sin nt$。得证。

6、设 $f(z)=\dfrac{1}{2i}(\dfrac{z}{\bar{z}}-\dfrac{\bar{z}}{z})(z\neq 0)$，试证：当 $z\to 0$ 时，$f(z)$ 的极限不存在。

证明 1：令 $z=re^{i\theta}$，$\bar{z}=re^{-i\theta}$，则 $f(z)=\dfrac{1}{2i}(\dfrac{re^{i\theta}}{re^{-i\theta}}-\dfrac{re^{-i\theta}}{re^{i\theta}})=\sin 2\theta$。因为

$\lim\limits_{\substack{z\to 0\\ \arg z=0}} f(z)=0$，$\lim\limits_{\substack{z\to 0\\ \arg z=\frac{\pi}{4}}} f(z)=1$。所以，$f(z)$ 在 $z=0$ 无极限。

证明 2：$f(z)=\dfrac{1}{2i}\dfrac{z^2-\bar{z}^2}{z\bar{z}}=\dfrac{2\operatorname{Re}z\cdot 2i\operatorname{Im}z}{2i|z|^2}=\dfrac{2\operatorname{Re}z\operatorname{Im}z}{|z|^2}=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$。令 z 沿直线 $y=kx$

趋向于零，有 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} u(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}=\dfrac{2k}{1+k^2}$，显然，当取不同值时，$u(x,y)$ 趋向于不同的值。所以 $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ 不存在。

7、试确定极限 $\lim\limits_{z\to a}\dfrac{z^2-(a+b)z+ab}{z-a}$ 存在与否。

解：由于 $z^2-(a+b)z+ab=(z-a)(z-b)$，

故 $\lim\limits_{z\to a}\dfrac{z^2-(a+b)z+ab}{z-a}=\lim\limits_{z\to a}\dfrac{(z-a)(z-b)}{z-a}=\lim\limits_{z\to a}(z-b)=a-b$。

8、试确定函数 $f(z)=f(x+iy)=\dfrac{x^2y+ixy^2}{x^3-iy^3}$ 连续与否。

解：当 $x\neq 0$，$y\neq 0$ 时，即 $z\neq 0$ 时，由于 $f(z)$ 的分子、分母皆为连续函数，故 $f(z)$ 为连续函数；

当 $x\to 0$，$y\to 0$ 时，设 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，于是 $x\to 0, y\to 0$ 时，$r\to 0$，

则 $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{r^3\cos\theta\sin\theta(\cos\theta+\sin\theta)}{r^3(\cos^3\theta-i\sin^3\theta)}=\dfrac{\cos\theta\sin\theta}{\cos^2\theta-i\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta}$，此极限依赖于 θ，当 $x\to 0, y\to 0$ 以不同方向，得到的极限值不同，因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(z)$ 不存在。

即 $f(z)$ 在 $z=0$ 不连续。故在除去原点的复平面上 $f(z)$ 连续。

第二章 解析函数

一、单项填空题

D B C C A A

二、填空题

1、u^2-v^2 的共轭调和函数是 $\underline{2uv+C}$。

2、$f'(0)=\underline{\ 0\ }$。

3、$\underline{\operatorname{Re}z=-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)\ \ k=0,\pm1,\pm2,\cdots}$；

4、函数 $f(z)=e^{\frac{z}{5}}$ 的周期是 $\underline{10\pi i}$；

5、$(1+i)^i$ 的辐角主值是 $\underline{\frac{1}{2}\ln 2}$；

6、$(\sqrt{2})^{\sqrt{2}+i}=\underline{e^{\sqrt{2}\ln\sqrt{2}-2k\pi}\{\cos[\ln\sqrt{2}+2\sqrt{2}k\pi i]+i\sin[\ln\sqrt{2}+2\sqrt{2}k\pi i]\}\ \ (k\in Z)}$；

7、方程 $\sinh z=i$ 的解为__________。

三、计算和证明

1、试证函数 $\frac{1}{z}$ 在复平面上任何点都不解析。

利用 C-R 条件，即用解析的充要条件判别，即 $u=\frac{x}{x^2+y^2}$，$v=\frac{-y}{x^2+y^2}$。

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x^4+y^4+2x^2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{-x^4-y^4-2x^2y^2+2x^2}{(x^2+y^2)^2}$。以上四个偏导存在且连续，但由于 $\frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y}$，不满足 C-R 条件，故在复平面上处处不解析。

[注]判断一个函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 解析，须满足一下两个条件：① $f(z)$ 的实部 $u(x,y)$ 与虚部 $v(x,y)$ 关于变量 x,y 的偏导存在且连续，即可微；② C-R 条件。

2、设 $my^3+nx^2y+i(x^3+lxy^2)$ 为解析函数，试确定 l,m,n 的值。

解：令 $f(z)=my^3+nx^2y+i(x^3+lxy^2)$，因为 $f(z)$ 解析，所以满足 C-R 条件，由

$u(x,y)=my^3+nx^2y$，$v(x,y)=x^3+lxy^2$，得 $\frac{\partial u}{\partial x}=2xyn$，$\frac{\partial u}{\partial y}=3y^2m+x^2n$；

$\frac{\partial v}{\partial x}=3x^2+ly^2$，$\frac{\partial v}{\partial y}=2xyl$。由 C-R 条件，有 $2xyn=2xyl$，$3y^2m+x^2n=3x^2+ly^2$；

比较系数得 $l=n$，$m=-\frac{1}{3}l$，$n=-3$，故 $n=-3$，$l=-3$，$m=1$。

3、函数 $z^2\cdot\bar{z}$ 在何处可导？何处解析？

解：设 $z=x+iy$，则

$f(z)=z^2\bar{z}=(x+iy)^2(x-iy)=(x+iy)(x^2+y^2)=(x^3+xy^2)$

$+i(x^2y+y^3)$，令 $u=x^3+xy^2$，$v=x^2y+y^3$，则 u,v 在 z 平面上处处可微且

$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+y^2$，$\frac{\partial u}{\partial y}=2xy$，$\frac{\partial v}{\partial x}=2xy$，$\frac{\partial v}{\partial y}=x^2+3y^2$，若使 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$。

须使 $3x^2+y^2=x^2+3y^2$，$2xy=-2xy$，解得 $x=y=0$，故函数 $f(z)=z^2\cdot\bar{z}$ 仅在点 $z=0$ 处可导，在复平面上处处不解析。

4、写出下列函数的解析区域，并求其导数。

(1) $f(z)=(z+2)^2$；

解：由于 $f'(z)=[(z+2)^2]'=2(z+2)$，故 $f(z)$ 在复平面内处处解析。

(2) $f(z)=\frac{z-2}{z^2+z+1}$；

解：当 $z\neq-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，$f'(z)=(\frac{z-2}{z^2+z+1})'=\frac{-z^2+4z+3}{(z^2+z+1)^2}$，$f(z)$ 在复平面内除 $z=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 外处处解析。

(3) $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$（c,d 中至少有一个不为零）；

解：若 $c=0$，则 $(\dfrac{az+b}{cz+d})'=\dfrac{1}{d}(az+b)'=\dfrac{a}{d}$，在全平面成立。

若 $c\neq 0$，且 $z\neq -\dfrac{d}{c}$，则 $(\dfrac{az+b}{cz+d})'=\dfrac{a(az+b)-(az+b)c}{(cz+d)^2}=\dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2}$，在全平面内除

点 $z=-\dfrac{d}{c}$ 外处处解析。

5、设 u 及 v 是解析函数 $f(z)$ 的实部及虚部，且 $u-v=(x+y)(x^2-4xy+y^2)$，

$z=x+iy$，求 $f(z)$。

解 1：将 u，v 分别对 x 和 y 求导，得

$\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial x}=x^2-4xy+y^2+(x+y)(2x-4y)$，

$\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial y}=x^2-4xy+y^2+(x+y)(-4x+2y)$。

利用 C-R 条件，并对上述两式右边化简得：$\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=3x^2-6xy-3y^2$，

$\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial x}=-3x^2-6xy+3y^2$，于是得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-6xy$，

$u=\int\dfrac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y=-3xy^2+C(x)$，再对上式关于 x 求偏导并进行比较，得

$-3y^2+C'(x)=\dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2$，$C'(x)=3x^2$，于是，$C(x)=x^3+C$。

$u=-3xy^2+x^3+C$，$v=u-(x+y)(x^2-4xy+y^2)=-3xy^2+x^3+C$

$-(x+y)(x^2-4xy+y^2)=-3y^3+3x^2y+C$。故

$f(z)=-3xy^2+x^3+i(-3y^3+3x^2y)+C=z^3+C$。

解 2：将 u，v 分别对 x 和 y 求导，得

$\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial x}=x^2-4xy+y^2+(x+y)(2x-4y)=3x^2-6xy-3y^2$ ………①

$$\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}=x^2-4xy+y^2+(x+y)(2y-4x)=3y^2-3x^2-6xy \quad \cdots\cdots②$$

对①、②两式利用 C-R 条件有 $\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial x}=3x^2-6xy-3y^2$；

$$-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}=3y^2-3x^2-6xy；$$

解上述两方程有：$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2$，$\frac{\partial v}{\partial x}=6xy$。

而 $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=(3x^2-3y^2)+6ixy=3z^2$，积分得 $f(z)=z^3+C$。

6、已知调和函数 $u=2(x-1)y$，$f(2)=-i$，求解析函数 $f(z)=u+iv$。

解 1：由 C-R 条件的一个等式：$\frac{\partial u}{\partial x}=2y=\frac{\partial v}{\partial y}$，从而

$v(x,y)=-\int 2y\mathrm{d}y+F(x)=-y^2+F(x)$。而 $\frac{\partial v}{\partial x}=F'(x)$，$\frac{\partial u}{\partial y}=2(x-1)$。

再由 C-R 条件，得 $F'(x)=-2(x-1)$，从而 $F(x)=-(x-1)^2+C$。因此，

$v(x,y)=-y^2-(x-1)^2+C$。于是，

$f(z)=2(x-1)y+C+i[-y^2-(x-1)^2]$。又

$f(2)=-i$，解之得 $C=0$。故 $f(z)=u+iv=-i(z-1)^2$。

解 2：由题意及 C-R 条件有 $\frac{\partial u}{\partial x}=2y$，$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-2(x-1)$，所以

$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=2y-2i(x-1)=-2i(z-1)$，积分得

$f(z)=-i(z-1)^2+C$（C 为复常数）。又由于 $f(2)=-i$，解之得 $C=0$。故

$f(z)=u+iv=-i(z-1)^2$。

7、求下列函数的值：

(1) $(1+i)^{1-i}$；

$$=e^{(1-i)Ln(1+i)}=e^{(1-i)\{\ln|1+i|+i[\arg(1+i)+2k\pi]\}}=e^{(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}+2k\pi)-i(\ln\sqrt{2}-(\frac{\pi}{4}+2k\pi))}$$

$$=\sqrt{2}e^{(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}[\cos(\frac{\pi}{4}-\ln 2)+i\sin(\frac{\pi}{4}-\ln 2)]，\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots。$$

(2) $Ln(3-\sqrt{3}i)$；

$$=\ln\left|3-\sqrt{3}\mathrm{i}\right|+i(\arg(3-\sqrt{3}\mathrm{i})+2k\pi)=\ln 2\sqrt{3}+i(-\frac{\pi}{6}+2k\pi)\quad，\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots\quad。$$

(3) $\mathrm{Re}[i^{\ln(1-i)}]$；

$$=\mathrm{Re}\{e^{\ln(1-\mathrm{i})Ln\,\mathrm{i}}\}=\mathrm{Re}\{e^{[\ln|1-\mathrm{i}|+\mathrm{i}\arg(1-\mathrm{i})][\ln|\mathrm{i}|+\mathrm{i}(\arg\mathrm{i}+2k\pi)]}\}$$

$$=\mathrm{Re}\{\mathrm{e}^{[\ln\sqrt{2}-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}][\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+2k\pi)]}\}=\mathrm{Re}\{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}(\frac{\pi}{2}+2k\pi)+\mathrm{i}\ln\sqrt{2}(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}\}$$

$$=\mathrm{Re}\{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}\cos[\ln\sqrt{2}(\frac{\pi}{2}+2k\pi)]+i\sin[\ln\sqrt{2}(\frac{\pi}{2}+2k\pi)]\}$$

$$=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}\cos[\ln\sqrt{2}(\frac{\pi}{2}+2k\pi)]。$$

(4) $\mathrm{Im}[1^{\sqrt{2}}]$。

$$=\mathrm{Im}[e^{\sqrt{2}Ln1}]=\mathrm{Im}[e^{\sqrt{2}(\ln1+i(0+2k\pi))}]=\mathrm{Im}[e^{i2\sqrt{2}k\pi}]=\sin 2\sqrt{2}k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

8、解方程(1) $e^z-1-\sqrt{3}i=0$；

解：原方程等价于 $e^z=1+\sqrt{3}i$，两边取对数，得 $z=Ln(1+\sqrt{3}i)$

$$=\ln\left|1+\sqrt{3}i\right|+i[\arg(1+\sqrt{3}i)+2k\pi]=\ln 2+i(\frac{\pi}{3}+2k\pi)\ （k=0,\pm1,\pm2,\cdots）。$$

(2) $\sin z+\cos z=2$，求 $\mathrm{Im}\,z$。

解：由于 $\sin z=\sin(x+iy)=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$，

$\cos z=\cos(x+iy)=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y$，

则由所给方程得 $\begin{cases}(\sin x+\cos x)\cosh y=2\\(\cos x-\sin x)\sinh y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sinh y=0\\ \text{或}\cos x=\sin x\end{cases}$，

即 $y=0$ 或 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{4}$（$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$）。

当 $y=0$ 时，$\sin z+\cos z=2$ 无解。

当 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{4}$ 时，若 k 为偶数，则 $\cosh y=\sqrt{2}$，即

$$\frac{1}{2}(e^{y}+e^{-y})=2\Rightarrow e^{y}=\sqrt{2}\pm1$$

（解关于 e^{y} 的方程），故 $y=\ln(\sqrt{2}\pm1)$；若 k 为奇数时，则 $\cosh y=-\sqrt{2}$，无解。所以

$\sin z+\cos z=2$ 的解为 $z=(k\pi+\dfrac{\pi}{4})+i\ln(\sqrt{2}\pm1)$（$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$）。

故 $\operatorname{Im} z=\ln(\sqrt{2}\pm1)$。

10、证明：$\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$。

证明：$\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2=\dfrac{1}{2}(e^{iz_1}+e^{-iz_1})\cdot\dfrac{1}{2}(e^{iz_2}+e^{-iz_2})$

$$-\frac{1}{2i}(e^{iz_1}+e^{-iz_1})\cdot\frac{1}{2}(e^{iz_2}+e^{-iz_2})=\frac{1}{4}[e^{i(z_1+z_2)}+e^{i(z_1-z_2)}+e^{i(z_2-z_1)}+e^{-i(z_1+z_2)}]$$

$$+\frac{1}{4}[e^{i(z_1+z_2)}-e^{i(z_1-z_2)}-e^{i(z_2-z_1)}+e^{-i(z_1+z_2)}]=\frac{1}{2}(e^{i(z_1+z_2)}+e^{-i(z_1+z_2)})=\cos(z_1+z_2)。$$

第三章 复变函数积分

一、单项填空题

D B C D C A A

二、填空题

1、$\int_0^{1+i}(8z^2+4z+1)\mathrm{d}z=\underline{-\frac{13}{3}+\frac{31}{3}i}$；$\int_0^{1+i}(8z^2+4z+1)\mathrm{d}z=\underline{-\frac{13}{3}+\frac{31}{3}i}$。

提示：解析函数在单连域内的积分与路径无关，只与起、终点有关。

2、$\oint_C \frac{f''(z)+2f'(z)+4}{f(z)}\mathrm{d}z=\underline{\ 0\ }$。

3、$\oint_C \frac{e^z}{(z-a)^2}\mathrm{d}z=\underline{2\pi\,\mathrm{i}e^a}$；$\oint_C \frac{e^z}{(z-a)^2}\mathrm{d}z=\underline{\ 0\ }$。

4、$\oint_{|z|=1}\frac{\overline{z}}{|z|}\mathrm{d}z=\underline{2\pi i}$，$\oint_{|z|=3}\frac{\overline{z}}{|z|}\mathrm{d}z=\underline{6\pi i}$。

5、$\oint_{|z|=r<1}\frac{f(z)}{z^2}\mathrm{d}z=\underline{2\pi i f'(0)}$，$\oint_{|z|=r<1}\frac{f(z)}{z-2r}\mathrm{d}z=\underline{\ 0\ }$；

6、积分 $\oint_{|z|=3}\frac{e^z}{(z-2)^3}\mathrm{d}z=\underline{\pi i e^2}$。

7、积分 $\oint_{|z|=1}\frac{e^{\frac{1}{z-1}}\mathrm{d}z}{(z^2+2)(z-3)}=\underline{\ 0\ }$。

三、计算和证明

1、计算积分 $I=\int_{-i}^{i}|z|\mathrm{d}z$，积分路线 C 为：

(1)直线段； (2)左半圆周 $|z|=1$。

解：(1)设 C： $z=it\ (-1\le t\le 1)$，则 $|z|=|t|$， $\mathrm{d}z=i\mathrm{d}t$。故

$I=\int_{-i}^{i}|z|\,\mathrm{d}z=\int_{-1}^{1}i|t|\,\mathrm{d}t=2i\int_0^1 t\,\mathrm{d}t=i$。

(2)设 C： $z=e^{-it}$，$\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{3\pi}{2}$ 则 $|z|=1$， $\mathrm{d}z=-ie^{-it}\mathrm{d}t$。故

$$I=\int_{-1}^{1}|z|\,\mathrm{d}z=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(-ie^{-it})\,\mathrm{d}\,t=e^{-it}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=2i\text{。}$$

2、计算下列沿指定曲线正向的积分。

(1) $\oint_C \sec z\mathrm{d}z$，$C:|z|=1$；

解：由于 $\sec z$ 在圆域 C 内解析，由柯西积分定理有，$\oint_C \sec z\mathrm{d}z=0$。

(2) $\oint_C 6z\cos z^2\mathrm{d}z$，$C:|z|=1$；

解：由于 $6z\cos z^2$ 在圆域 C 内解析，由柯西积分定理有，$\oint_C 6z\cos z^2\mathrm{d}z=0$。

(3) $\oint_C \dfrac{e^{2z}\mathrm{d}z}{z^2+7z+10}$，$C:|z|=1$；

解：由于 $\dfrac{e^{2z}}{z^2+7z+10}$ 在在圆域 C 内解析，由柯西积分定理有，$\oint_C \dfrac{e^{2z}\mathrm{d}z}{z^2+7z+10}=0$。

(4) $\oint_C \dfrac{\mathrm{d}z}{z^2-\beta^2}$，$C:|z-\beta|=\beta$；

解：被积函数 $\dfrac{1}{z^2-\beta^2}$ 有两个奇点 $z=\pm\beta$，但在 $z=\beta$ 在圆 C 内，而 $z=-\beta$ 在圆 C 外。

根据柯西积分公式有

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2-\beta^2}=\oint_C \frac{\frac{1}{z+\beta}\mathrm{d}z}{z-\beta}=2\pi i\frac{1}{z+\beta}\Big|_{z=\beta}=\frac{\pi i}{\beta}\text{。}$$

(5) $\oint_C \dfrac{\mathrm{d}z}{(z^2-4)(z^2+27)}$，$C:|z|=r<1$；

解：由于 $\dfrac{1}{(z^2-4)(z^2+27)}$ 在圆域 C 内解析，故由柯西积分定理有

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z^2-4)(z^2+27)}=0\text{。}$$

(6) $\oint_C \frac{\cos z}{z^{2n+1}}\mathrm{d}z$，$C:|z|=1$，$n$ 为自然数；

解：因为 $\frac{\cos z}{z^{2n+1}}$ 在圆域 C 内有奇点 $z=0$，而 $\cos z$ 在 $|z|\le 1$ 内解析，所以由高阶导数公式有

$$\oint_C \frac{\cos z}{z^{2n+1}}\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{(2n)!}[(\cos z)^{(2n)}]\Big|_{z=0} = \frac{2\pi i}{(2n)!}[\cos(z+\frac{2n}{2}\pi)]\Big|_{z=0}$$

$$= \frac{2\pi i}{(2n)!}\cos n\pi = (-1)^n \frac{2\pi i}{(2n)!}.$$

3、计算积分 $\int_C \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\mathrm{d}z$，其中

(1) $C:|z+1|=\frac{1}{2}$；(2) $C:|z-1|=\frac{1}{2}$。

解：(1) $\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}$ 在 $|z+1|\le\frac{1}{2}$ 内有奇点 $z=-1$，而 $\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z-1}$ 处处解析，所以由柯西积分公式有：

$$\int_C \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\mathrm{d}z = \int_C \frac{\sin\frac{\pi}{4}z\Big/(z-1)}{z+1}\mathrm{d}z = 2\pi i\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z-1}\Bigg|_{z=-1} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\pi i。$$

(2) $\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}$ 在 $|z-1|\le\frac{1}{2}$ 内有奇点 $z=1$，而 $\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z+1}$ 处处解析，所以由柯西积分公式有：

$$\int_C \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z^2-1}\mathrm{d}z = \int_C \frac{\sin\frac{\pi}{4}z\Big/(z+1)}{z-1}\mathrm{d}z = 2\pi i\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z+1}\Bigg|_{z=1} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\pi i。$$

4、求积分 $I=\int_C \frac{1}{z^3(z+1)(z-2)}\mathrm{d}z$ 之值，其中 C 为圆周 $|z|=r$，$r\ne 1,2$。

解：(1)当 $0\le r\le 1$ 时，$f(z)=\frac{1}{(z+1)(z-2)}$ 在 C 及其内部解析，从而由高阶导数公式有：

$I=\oint_C \frac{f(z)}{z^3}dz=\frac{2\pi i}{2}f''(z)\Big|_{z=0}=\pi i[(\frac{1}{(z+1)(z-2)})'']\Big|_{z=0}=\pi i[\frac{6z^2-6z+6}{(z+1)^3(z-2)^3}]_{z=0}$

$=\pi i(-\frac{3}{4})=-\frac{3}{4}\pi i$。

(2)当$1<r<2$时，作圆周$C_1:|z|=\frac{1}{2}$正向与$C_2:|z+1|=\frac{1}{2}$正向，从而有

$I=\int_C \frac{1}{z^3(z+1)(z-2)}dz=\oint_{C_1}\frac{1}{z^3}\cdot\frac{1}{(z+1)(z-2)}dz+\oint_{C_2}\frac{1}{z+1}\cdot\frac{1}{z^3(z-2)}dz$，

有(1)知，$\oint_{C_1}\frac{1}{z^3}\cdot\frac{1}{(z+1)(z-2)}dz=-\frac{3}{4}\pi i$。

又因为$\frac{1}{z^3(z-2)}$在C_2内解析，所以

$\oint_{C_2}\frac{1}{z+1}\cdot\frac{1}{z^3(z-2)}dz=2\pi i\left[\frac{1}{z^3(z-2)}\right]_{z=-1}=\frac{2}{3}\pi i$。

故$I=-\frac{3}{4}\pi i+\frac{2}{3}\pi i=-\frac{1}{12}\pi i$。

(3)当$r>2$时，作圆周$C_1:|z|=\frac{1}{2}$正向，$C_2:|z+1|=\frac{1}{2}$正向及$C_3:|z-2|=\frac{1}{2}$，从

而有$I=\oint_C \frac{1}{z^3(z+1)(z-2)}dz=\oint_{C_1}\frac{1}{z^3(z+1)(z-2)}dz+\oint_{C_2}\frac{1}{z^3(z+1)(z-2)}dz$

$+\oint_{C_3}\frac{1}{z^3(z+1)(z-2)}dz$。

由(2)知$\oint_{C_1}\frac{1}{z^3(z+1)(z-2)}dz+\oint_{C_2}\frac{1}{z^3(z+1)(z-2)}dz=-\frac{1}{12}\pi i$。

又因为$\frac{1}{z^3(z+1)}$在C_3内解析，所以

$\oint_{C_3}\frac{1}{z^3(z+1)(z-2)}dz=2\pi i\left[\frac{1}{z^3(z+1)}\right]_{z=2}=\frac{1}{12}\pi i$。

故 $I=-\frac{1}{12}\pi i+\frac{1}{12}\pi i=0$。

5、设 C_1 与 C_2 为不经过 z_0 的两条互不包含也互不相交的闭路，求

$$\frac{1}{2\pi i}[\oint_{C_1}\frac{z^2dz}{z-z_0}+\oint_{C_2}\frac{\sin zdz}{z-z_0}]$$的值。

解：(1)当 z_0 在 C_1 的内部时，由柯西积分公式有

$$\frac{1}{2\pi i}[\oint_{C_1}\frac{z^2dz}{z-z_0}+\oint_{C_2}\frac{\sin zdz}{z-z_0}]=\frac{1}{2\pi i}[2\pi iz^2\big|_{z=z_0}+0]=z_0^2.$$

(2)当 z_0 在 C_2 的内部时，由柯西积分公式有

$$\frac{1}{2\pi i}[\oint_{C_1}\frac{z^2dz}{z-z_0}+\oint_{C_2}\frac{\sin zdz}{z-z_0}]=\frac{1}{2\pi i}[0+2\pi i\sin z\big|_{z=z_0}]=\sin z_0.$$

(3)当 z_0 不在 C_1 与 C_2 的内部时，由柯西积分定理有

$$\frac{1}{2\pi i}[\oint_{C_1}\frac{z^2dz}{z-z_0}+\oint_{C_2}\frac{\sin zdz}{z-z_0}]=\frac{1}{2\pi i}[0+0]=0.$$

6、设 C 为正向圆周 $|z|=3$，$f(z_0)=\oint_C\frac{3z^2+7z+1}{z-z_0}dz$，求 $f'(1+i)$ 的值。

解：令 $\varphi(z)=3z^2+7z+1$，则 $\varphi(z)$ 在复平面上解析，

故 $$f(z_0)=\oint_C\frac{3z^2+7z+1}{z-z_0}dz=\begin{cases}0 & |z|>3\\ 2\pi i\varphi(z_0) & |z|<3\end{cases}.$$

因而，当 $|z|>3$ 时，$f'(z_0)=0$；当 $|z|<3$ 时，$f'(z_0)=2\pi i\varphi'(z_0)=2\pi i(6z_0+7)$；

即 $$f'(z_0)=\begin{cases}0 & |z|>3\\ 2\pi i(6z_0+7) & |z|<3\end{cases}$$

又因 $|1+i|=\sqrt{2}<3$，故 $f'(1+i)=2\pi i[6(1+i)+7]=2\pi(13i-6)$。

7、设函数 $f(z)$ 在 $0<|z|<1$ 内解析，且沿任何圆周 $C:|z|=r,0<r<1$ 的积分等于 0，问

$f(z)$ 在 $z=0$ 处是否解析？试举例说明。

解：不一定解析。例如 $f(z)=\dfrac{1}{z^2}$，则其在 $0<|z|<1$ 内解析，且沿任何圆周 $C:|z|=r, 0<r<1$ 的积分 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z=\oint_{|z|=r}\dfrac{1}{z^2}\mathrm{d}z=0$，但显然 $f(z)$ 在 $z=0$ 处不解析。

8、求积分 $\oint_C \dfrac{\mathrm{d}z}{(z+a)^n(z+b)^n}$ 的值，其中曲线 C 为正向圆周 $|z|=1$，且 $|a|<|b|<1$。

解：根据题意，可知被积函数 $\dfrac{1}{(z+a)^n(z+b)^n}$ 在 C 有两个奇点 $z=-a$ 及 $z=-b$。现分别以 $z=-a$、$z=-b$ 为圆心，充分小 r_1、r_2 为半径，作正向圆周 C_1，C_2。则由复合闭路定理、高阶导数公式得：

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z+a)^n(z+b)^n}=\oint_{C_1}\frac{\frac{1}{(z+b)^n}}{(z+a)^n}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{\frac{1}{(z+a)^n}}{(z+b)^n}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi i\left[\frac{1}{(z+b)^n}\right]^{(n-1)}_{z=-a}+2\pi i\left[\frac{1}{(z+a)^n}\right]^{(n-1)}_{z=-b}$$

$$=2\pi i(-n)(-n-1)\cdots(-2n+2)[(z+b)^{-2n+1}\Big|_{z=-a}+(z+a)^{-2n+1}\Big|_{z=-b}]=0。$$

9、设 $F(z)=\int_{|\xi|=2}\dfrac{2\xi^2-\xi+1}{\xi-z}\mathrm{d}\xi$，(1)求 $F(1)$；(2)求 $F(z_0)$，$|z_0|>2$；(3)能否求出 $F(2)$？

解：(1)若 $|z|<2$ 内，由柯西积分公式得：

$F(z)=\int_{|\xi|=2}\dfrac{2\xi^2-\xi+1}{\xi-z}\mathrm{d}\xi=2\pi i(2\xi^2-\xi+1)_{\xi=z}=2\pi i(2z^2-z+1)$。故

$F(1)=2\pi i(2z^2-z+1)_{z=1}=4\pi i$。

(2) 若 $|z|>2$ 内，由柯西积分定理得：$F(z)=\int_{|\xi|=2}\dfrac{2\xi^2-\xi+1}{\xi-z}\mathrm{d}\xi=0$。

由于 $|z_0|>2$，故 $F(z_0)=0$。

(3)若 $|z|=2$ 时，则不能求出 $F(z)=\int_{|\xi|=2}\dfrac{2\xi^2-\xi+1}{\xi-z}d\xi$。故不能求出 $F(2)$。

10*、试讨论计算积分 $\int_C \dfrac{e^z}{z}dz$，C 为圆周 $|z|=2$ 正向与圆周 $|z|=1$ 组成的。

解：(1)当 C 为圆周 $|z|=2$ 正向与圆周 $|z|=1$ 负向组成时，根据复合闭路的定义，可知圆周 $|z|=2$ 正向与圆周 $|z|=1$ 的负向构成一个复合闭路，根据闭路变形公式得：

$$\int_C \frac{e^z}{z}dz=0。$$

(2)当 C 为圆周 $|z|=2$ 正向与圆周 $|z|=1$ 正向组成时，由于被积函数的奇点 $z=0$ 位于圆周 $|z|=2$ 正向与圆周 $|z|=1$ 内，则 $\int_C \dfrac{e^z}{z}dz=2\int_{|z|=2}\dfrac{e^z}{z}dz=4\pi i$。

第四章　级数

一、单项填空题

B　B　C　D　B

二、填空题

1、设 $\dfrac{e^{\frac{z}{z-3}}\cos z}{(z-1)(z-i)\ln(2-z)}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$，则收敛半径 $R=$ __1__；

2、设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-2)^n$ 在 $z=4$ 收敛而在 $z=2+2i$ 发散，则收敛半径 $R=$ __2__；

3、收敛圆环域为 $1<|z-2|<2$；和函数为 $\dfrac{z-2}{(z-3)(4-z)}$；

4、幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}(1+3i)^n z^{2n}$ 的收敛半径是 $\dfrac{1}{\sqrt[4]{10}}$；

5、$\oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^3}dz=2\pi i a_2$；

三、计算和证明

1、下列数列 $\{\alpha_n\}$ 是否收敛？如果收敛，求出它们的极限：

(1) $\alpha_n=\dfrac{1+n!}{1-n!}$；

解：$\alpha_n=\dfrac{1+ni}{1-ni}=\dfrac{1-n^2}{1+n^2}+i\dfrac{2n}{1+n^2}$，设 $a_n=\dfrac{1-n^2}{1+n^2}$，$b_n=\dfrac{2n}{1+n^2}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-1$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$。根据数列收敛的充要条件的 $\{\alpha_n\}$ 收敛。

(2) $\alpha_n=(-1)^n+\dfrac{i}{n+1}$；

解：由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\lim\limits_{n\to\infty}[(-1)^n+\dfrac{i}{n+1}]=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\neq 0$，根据数列收敛的必要条件知 $\{\alpha_n\}$ 发散。

3、求下列各级数的收敛半径：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}n!(\dfrac{z}{n})^n$；

解：$C_n = \dfrac{n!}{n^n}$，$R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{C_n}{C_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!\big/n^{n+1}}{(n+1)!\big/(n+1)^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n = e$。

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\dfrac{1}{n})^{n^2} z^n$；

解：$C_n = (1+\dfrac{1}{n})^{n^2}$，$R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1}{\sqrt[n]{|C_n|}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{\left|(1+\dfrac{1}{n})^{n^2}\right|}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(1+\dfrac{1}{n})^n} = \dfrac{1}{e}$。

4、求幂级数的收敛半径、收敛圆域及和函数：(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(z-3)^{n+1}$；

解：$C_n = n+1$，$R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{C_n}{C_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1} = 1$，故收敛圆域为 $|z-3|<1$。

当 $|z-3|<1$，设 $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(z-3)^n$，则

$\int f(z)\mathrm{d}z = \int[\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(z-3)^n]\mathrm{d}z = \sum\limits_{n=0}^{\infty}[\int(n+1)(z-3)^n\mathrm{d}z] = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(z-3)^{n+1} = \dfrac{z-3}{4-z}$，

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(z-3)^{n+1} = (z-3)f(z) = (z-3)\left(\dfrac{z-3}{4-z}\right)' = \dfrac{z-3}{(4-z)^2}$。

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}z^n$。

解：$C_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$，$R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{C_n}{C_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n} = 1$，故收敛圆域为 $|z|<1$。

当 $|z|<1$，设 $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}z^n$，则 $f'(z) = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}z^n\right)' = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^n}{n}z^n\right)'$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{n-1} = \dfrac{1}{z}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\right) = \dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{1+z} = \dfrac{1}{z(z+1)}$；

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}z^n = \int\dfrac{1}{z(z+1)}\mathrm{d}z = \ln\dfrac{z}{z+1}$。

5、幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-2)^n$ 能否在 $z=0$ 收敛而在 $z=3$ 发散？

解：不能。

由 Abel 定理知，如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-2)^n$ 在点 $z=0$ 收敛，则在 $|z-2|<2$ 内绝对收敛，

而 $z=3$ 属于收敛圆 $|z-2|<2$ 内的点，故不可能在 $z=3$ 发散。

6、求下列各函数展开成 z 的幂级数，并指出它们的收敛半径：

(1) $2z/(1+z^2)^2$；

解：因为 $\left(-\dfrac{1}{1+z^2}\right)'=\dfrac{2z}{(1+z^2)^2}$，故 $2z/(1+z^2)^2=\left(-\dfrac{1}{1+z^2}\right)'$。

又 $\dfrac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$，　　$|z|<1$。

因为幂级数在收敛圆内可逐项求导，且收敛半径不变，所以

$$\frac{2z}{(1+z^2)^2}=\left(-\frac{1}{1+z^2}\right)'=\left(-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}\right)'=-\sum_{n=0}^{\infty}[(-1)^n z^{2n}]'=-\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n n z^{2n-1},$$

$|z|<1$；其收敛半径为 1。

(2) $e^{z^2}\cdot\sin z^2$；

解：$e^{z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{2n}}{n!}$　　$|z|<+\infty$，且 $\sin z^2=\dfrac{e^{iz^2}-e^{-iz^2}}{2i}$，故

$$e^{z^2}\cdot\sin z^2=e^{z^2}\cdot\frac{e^{iz^2}-e^{-iz^2}}{2i}=\frac{1}{2i}\left[e^{(1+i)z^2}-e^{(1-i)z^2}\right]=\frac{1}{2i}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n z^{2n}}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-i)^n z^{2n}}{n!}\right]$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n z^{2n}}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-i)^n z^{2n}}{n!}\right]=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n-(1-i)^n}{n!}z^{2n}=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2i\cdot 2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}z^{2n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}z^{2n}\qquad |z|<+\infty。$$

(3) $\sin^2 z$；

解：$\sin^2 z = \frac{1-\cos 2z}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2z)^{2n} = \frac{1}{2} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}2^{2n-1}z^{2n}$

$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}2^{2n-1}z^{2n}$，　$|z|<+\infty$。

(4) $\ln(z^2-3z+2)$。

解：因为 $f'(z)=\frac{2z-3}{z^2-3z+2}$，故

$$f(z)=\ln(z^2-3z+2)=\int_0^z \frac{2\xi-3}{\xi^2-3\xi+2}dz + C$$

$$=\int_0^z\left[\frac{1}{\xi-1}+\frac{1}{\xi-2}\right]d\xi + C = -\int_0^z\left[\frac{1}{1-\xi}+\frac{1}{2-\xi}\right]d\xi+C = -\int_0^z\frac{1}{1-\xi}d\xi - \frac{1}{2}\int_0^z\frac{1}{1-\frac{\xi}{2}}d\xi+C$$

$$=-\int_0^z\sum_0^\infty \xi^n dz - \int_0^z\sum_0^\infty \frac{\xi^n}{2^{n+1}}dz + C = -\sum_0^\infty\left[\int_0^z \xi^n dz + \int_0^z\frac{\xi^n}{2^{n+1}}dz\right]+C$$

$$=-\left[\sum_0^\infty\frac{z^{n+1}}{n+1}+\sum_0^\infty\frac{1}{2^{n+1}}\frac{z^{n+1}}{n+1}\right]+C = -\sum_0^\infty\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\frac{z^{n+1}}{n+1}+C$$

（或 $=-\sum_1^\infty\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\frac{z^n}{n}+C$），而在 $z=0$ 处，$f(0)=\ln 2$，故 $C=\ln 2$，所以，

$$f(z)=\ln(z^2-3z+2)=\ln 2-\sum_0^\infty\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\frac{z^{n+1}}{n+1}$$（或

$$=-\sum_1^\infty\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\frac{z^n}{n}+\ln 2$$）。

7、求下列各函数在指定 z_0 处的泰勒展开式，并指出它们的收敛半径。

(1) $\frac{z}{z+2}$，$z_0=1$；

解：$\frac{z}{z+2}=1-\frac{2}{(z-1)+3}=1-\frac{2}{3}\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}}=1-\frac{2}{3}\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\left(\frac{z-1}{3}\right)^n$　$|z-1|<3$。

(2) $\dfrac{z}{z^2+3z+2}$，$z_0=2$；

解：

$$\frac{z}{z^2+3z+2}=\frac{2}{z+2}-\frac{1}{z+1}=\frac{2}{(z-2)+4}-\frac{1}{(z-2)+3}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\dfrac{z-2}{4}}-\frac{1}{3}\frac{1}{1+\dfrac{z-2}{3}}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\dfrac{z-2}{4}}-\frac{1}{3}\frac{1}{1+\dfrac{z-2}{3}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{4}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{3}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^{2n+1}}(z-2)^n-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^{n+1}}(z-2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{2^{2n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right](z-2)^n,$$

$|z-2|<3$。

(3) $\dfrac{1}{z^2}$，$z_0=-1$；

解：$\dfrac{1}{z^2}=\left(-\dfrac{1}{z}\right)'=\left(-\dfrac{1}{(z+1)-1}\right)'=\left(\dfrac{1}{1-(z+1)}\right)'=\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(z+1)^n\right)'$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}[(z+1)^n]'=\sum_{n=1}^{\infty}n(z+1)^{n-1},\quad |z+1|<1。$$

(4) $\dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$，$a\neq b, z_0=1$；

解：$\dfrac{1}{(z-a)(z-b)}=\dfrac{1}{a-b}\left[\dfrac{1}{z-a}-\dfrac{1}{z-b}\right]=\dfrac{1}{a-b}\left[\dfrac{1}{(z-1)-(a-1)}-\dfrac{1}{(z-1)-(b-1)}\right]$

$$=\frac{1}{a-b}\left[\frac{-1}{a-1}\frac{1}{1-\dfrac{z-1}{a-1}}-\frac{-1}{b-1}\frac{1}{1-\dfrac{z-1}{b-1}}\right]=\frac{1}{a-b}\left[\frac{-1}{a-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{a-1}\right)^n-\frac{-1}{b-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{b-1}\right)^n\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(a-b)(b-1)^{n+1}}-\frac{1}{(a-b)(a-1)^{n+1}}\right](z-1)^n,\quad |z-1|<\min\{|a-1|,|b-1|\}。$$

8、将下列各函数在指定的圆环域内展成罗朗级数：

(1) $\dfrac{1}{(z^2+1)(z-2)}$，$1<|z|<2$；

解：$\dfrac{1}{(z^2+1)(z-2)}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{z-i}+(\dfrac{3}{10}-\dfrac{2}{5}i)\dfrac{1}{z+i}+(\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}i)\dfrac{1}{z-2}$

$$=-\frac{1}{2z}\frac{1}{1-\frac{i}{z}}+(\frac{3}{10}-\frac{2}{5}i)\cdot\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{i}{z}}-\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i)\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{z}\right)^n+(\frac{3}{10}-\frac{2}{5}i)\cdot\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{i}{z}\right)^n-\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{i^n}{2})\frac{1}{z^{n+1}}+(\frac{3}{10}-\frac{2}{5}i)\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n\frac{1}{z^{n+1}}-(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n \qquad 1<|z|<2\text{。}$$

(2) $\dfrac{\sin z}{z^3}$，$0<|z|<+\infty$；

解：$\dfrac{\sin z}{z^3}=\dfrac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}}{z^3}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n-2}$ $\quad 0<|z|<+\infty$。

(3) $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$，①$0<|z-1|<1$；②$1<|z-2|<+\infty$；

解：① $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}=\dfrac{1}{z-1}\cdot\dfrac{1}{z-2}=\dfrac{-1}{z-1}\cdot\dfrac{1}{1-(z-1)}=-\dfrac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^{n-1} \qquad 0<|z-1|<1\text{；}$$

② $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}=\dfrac{1}{z-2}\cdot\dfrac{1}{z-1}=\dfrac{1}{z-2}\cdot\dfrac{1}{1+(z-2)}=\dfrac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^{n-1} \qquad 1<|z-2|<+\infty\text{。}$$

(3) $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$，①$0<|z-1|<1$；

②$1 < |z-2| < +\infty$；

(4) $1/[z(1-z)^2]$，①$0<|z|<1$；②$0<|z-1|<1$；③$1<|z-1|<+\infty$；

解：①由于 $\dfrac{1}{(1-z)^2}=\left(\dfrac{1}{1-z}\right)'=\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n\right)'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(z^n)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}$ $\quad |z|<1$。故

$1/[z(1-z)^2]=\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{(1-z)^2}=\dfrac{1}{z}\sum\limits_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nz^{n-2}$ $\qquad 0<|z|<1$。

②$1/[z(1-z)^2]=\dfrac{1}{(1-z)^2}\cdot\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{(1-z)^2}\cdot\dfrac{1}{1+(z-1)}=\dfrac{1}{(1-z)^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^{n-2}$ $\qquad 0<|z-1|<1$。

③$1/[z(1-z)^2]=\dfrac{1}{(1-z)^2}\cdot\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{(1-z)^2}\cdot\dfrac{1}{1+(z-1)}=\dfrac{1}{(1-z)^2}\cdot\dfrac{1}{z-1}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{z-1}}$

$=\dfrac{1}{(z-1)^3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^{-n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^{-n-3}$ $\qquad 1<|z-1|<+\infty$。

9、求罗朗级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a^n}{(z-1)^{n+1}}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-1)^{n+1}}{b^{n+1}}$，$0<|a|<|b|$的收敛域。

解：首先设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a^n}{(z-1)^{n+1}}$，$\xi=\dfrac{1}{z-1}$，则 $f(z)=g(\xi)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a^n\xi^{n+1}$，根据收敛半径计算公式（Cauchy 公式）知，$g(\xi)$的收敛半径为$\dfrac{1}{|a|}$，收敛域为$|\xi|<\dfrac{1}{|a|}$，故 $f(z)$的收敛域为$|z-1|>|a|$。

其次设 $h(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-1)^{n+1}}{b^{n+1}}$，根据收敛半径计算公式（Cauchy 公式）知，$h(z)$的收敛半径为$|z-1|<|b|$。

由于$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a^n}{(z-1)^{n+1}}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-1)^{n+1}}{b^{n+1}}=f(z)+h(z)$，且$0<|a|<|b|$，故收敛域为

$|a|<|z-1|<|b|$。

10、设函数 $f(z)=\dfrac{z-2}{z(z-1)}$ (1)将 $f(z)$在 $z=2$ 处展开成 Taylor 级数，并指出收敛半径；

(2)将 $f(z)$ 在圆环域 $0<|z-1|<1$ 内展开成罗朗级数。

解：$f(z)=\dfrac{z-2}{z(z-1)}=\dfrac{2}{z}-\dfrac{1}{z-1}$。

(1) $f(z)=\dfrac{2}{z}-\dfrac{1}{z-1}=\dfrac{2}{(z-2)+2}-\dfrac{1}{(z-2)+1}=\dfrac{1}{1+\dfrac{z-2}{2}}-\dfrac{1}{(z-2)+1}$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\dfrac{z-2}{2})^n-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\dfrac{1}{2^n}-1)(\dfrac{z-2}{2})^n \qquad |z-2|<1$；

(2) $f(z)=\dfrac{2}{z}-\dfrac{1}{z-1}=\dfrac{2}{1+(z-1)}-\dfrac{1}{z-1}=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n-\dfrac{1}{z-1}$， $0<|z-1|<1$。

11、函数 $\sec(\dfrac{1}{z-1})$ 能否在 $z=1$ 的邻域内展开成罗朗级数？为什么？

解：$\cot(\dfrac{1}{z})=\dfrac{\cos(\dfrac{1}{z})}{\sin(\dfrac{1}{z})}$ 的奇点有无穷多，$z=0$ 和 $z_k=\dfrac{1}{k\pi}(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 都是它的奇点，而且当 $\lim\limits_{k\to\infty}z_k=0$，所以 $z=0$ 是一个非孤立奇点，故不存在一个去心邻域 $0<|z|<R$ 使 $\sec(\dfrac{1}{z})$ 在其内解析，因此不能展开成罗朗级数。

12、设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^nC_n$ 收敛，而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n|C_n|$ 发散，证明幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_nz^n$ 的收敛半径为 2。

证明：级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^nC_n$ 收敛相当于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_nz^n$ 在 $z=2$ 处收敛，于是有 Abel 定理，对于满足 $|z|<2$ 的 z，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_nz^n$ 必绝对收敛，从而该级数的收敛半径 $R\geq2$；但若 $R>2$ 时幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_nz^n$ 在收敛圆 $|z|<R$ 内绝对收敛，特别地在 $z=2$ $(<R)$ 处也绝对收敛，即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n|C_n|$ 收敛，这显然与已知矛盾，故级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_nz^n$ 的收敛半径 $R=2$。

第五章　留数

一、单项填空题

答案：D　B　D　B　C　D

二、填空题

1、$m = \underline{\ 3\ }$。　　2、$\mathrm{Res}[f(z),k\pi] = \underline{\ 0\ }$。

3、$\mathrm{Res}[\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z},0] = \underline{e-1}$。　　4、积分 $\oint_{|z|=1} \frac{\tan \pi z}{z^3} \mathrm{d}z = \underline{\ 0\ }$。

5、积分 $\oint_{|z|=7} \frac{1+z}{1-\cos z} \mathrm{d}z = \underline{12\pi \mathrm{i}}$。

三、计算和证明

1、设 $z = a$ 是 $f(z)$ 的 m 级零点，问在 a 点处，$F(z) = \int_a^z f(z)dz$ 具有多少阶零点？

m+1 阶零点。

2、判断下列函数的孤立奇点及类型，如果是极点，指出它的级。

(1) $(z-1)/[z(z^2+4)^2]$；

解：$z = 0$ 为一级极点；$z = \pm 2\mathrm{i}$ 为二级极点。

(2) $\dfrac{z^5}{(1-z)^2}$；

解：$z = 1$ 为二级极点。

(3) $\dfrac{(z-5)\sin z}{(z-1)^2 z^3 (z+1)^4}$；

解：$z = 1$ 为二级极点；$z = 0$ 为三级极点；$z = -1$ 为四级极点。

(4) $\dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{z^5}$

解：$z = 0$ 为五级极点。

(5) $\dfrac{1}{z^2(e^z - 1)}$；

解：$z = 0$ 为三级极点；$z = 2k\pi \mathrm{i}$（$k = \pm 1, \pm 2, \cdots$）为一级极点。

(6) $e^{\frac{1}{z-1}}$；

解：$z=1$ 为本性奇点。

3、求下列函数的非孤立奇点：

(1) $\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$；

解：$z=0$ 为非孤立奇点，因 $\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ 的一级极点为 $z_k=\dfrac{1}{k\pi}$（$k\in Z$），而 $z=0$ 为这些极点的极限点。

(2) $\dfrac{1}{e^{\frac{1}{z^2}}+1}$。

解：$z=0$ 为非孤立奇点，因 $\dfrac{1}{e^{\frac{1}{z^2}}+1}$ 的极点列为 $z_k=\pm\dfrac{1}{\sqrt{(2k+1)\pi i}}$（$k\in Z$），而 $z=0$ 为这些极点列的极限点。

4、求下列函数在指定孤立奇点处的留数：

(1) $\mathrm{Res}[z^4/(z^2-4)^4,2]$；

解：由于 $z=2$ 为 $\dfrac{z^4}{(z^2-4)^4}$ 的4级极点.

$$\therefore \mathrm{Res}\left[\frac{z^4}{(z^2-4)^4},2\right]=\frac{1}{3!}\lim_{z\to 2}\left[(z-2)^4\frac{z^4}{(z^2-4)^4}\right]^{(3)}$$

$$=\frac{8z(z^2-6z+4)}{(z+2)^7}\Big|_{z=2}=-\frac{1}{256}$$

(2) $\mathrm{Res}[\sin z\sin\frac{1}{z},0]$；

解，由于 $z=0$ 为本性奇点.

$$\therefore \text{原式}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\frac{1}{z^{2k+1}}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{n+k}z^{2(n-k)}}{(2k+1)!(2n+1)!}$$

由于上式中不存在 z^{-1} 项，故

$\mathrm{Res}[\sin z\sin\frac{1}{z},0]=0.$

(3) $\mathrm{Res}\left[(z^3+1)e^{\frac{1}{z}},0\right]$;

解. 由于 $z=0$ 为本性奇点.

$$\therefore (z^3+1)e^{\frac{1}{z}}=(z^3+1)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\frac{1}{z^n}}{n!}\right)$$

$$=(z^3+1)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{4!}+1\right)+\cdots$$

$$=\frac{25}{24}\cdot\frac{1}{z}+\cdots$$

$$\therefore \mathrm{Res}[(z^3+1)e^{\frac{1}{z}},0]=\frac{25}{24}$$

(4) $\mathrm{Res}[\frac{e^z-1}{z^3},0]=$;

解：由于 $z=0$ 为二级极点.

$$\mathrm{Res}\left[\frac{e^z-1}{z^3},0\right]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left[z^3\cdot\frac{e^z-1}{z^3}\right]''$$

$$=\frac{1}{2}$$

5、求下列函数在有限奇点处的留数。

(1) $\dfrac{2z+1}{z^2-z-2}$；

解：函数有两个孤立奇点 $z=-1,2$，均为一级极点.

$$\therefore \mathrm{Res}\left[\frac{2z+1}{z^2-z-2},-1\right]=\lim_{z\to -1}\left[(z+1)\frac{2z+1}{z^2-z-2}\right]=\frac{1}{3}$$

$$\mathrm{Res}\left[\frac{2z+1}{z^2-z-2},2\right]=\lim_{z\to 2}\left[(z-2)\frac{2z+1}{z^2-z-2}\right]=\frac{5}{3}$$

(2) $\dfrac{e^z}{z^{n+1}}$；

解：函数有一个孤立奇点 $z=0$，且为 $n+1$ 级极点.

$$\therefore \mathrm{Res}\left[\frac{e^z}{z^{n+1}},0\right]=\frac{1}{n!}\lim_{z\to 0}\left[z^{n+1}\cdot\frac{e^z}{z^{n+1}}\right]^{(n)}$$

$$=\frac{1}{n!}$$

(3) $(z+1)\sin\dfrac{1}{z}$；

解. $z=0$ 为本性奇点.

$\because (z+1)\sin\frac{1}{z}=(z+1)\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{2n+1}}\right]$

$=\frac{1}{z}+\cdots$

$\therefore \mathrm{Res}\left[(z+1)\sin\frac{1}{z},0\right]=1$.

(4) $\frac{e^z-1}{z^5}$；

解. $z=0$ 为4级极点

$\mathrm{Res}\left[f(z),\frac{e^z-1}{z^5}\right]=\frac{1}{4!}\lim_{z\to 0}\left[z^5\cdot\frac{e^z-1}{z^5}\right]^{(4)}$

$=\frac{1}{4!}\left[e^z\right]^{(4)}_{z=0}=\frac{1}{24}$.

6、利用留数理论计算下列各积分：

(1) $\oint_{|z|=3}\frac{\sin z}{z+1}dz$；

解. 由于 $z=-1$ 为 $\frac{\sin z}{z+1}$ 的一级极点且位于圆 $|z|=3$ 内.

$\therefore \operatorname{Res}\left[\frac{\sin z}{z+1}, -1\right] = \lim_{z\to -1}\left[(z+1)\frac{\sin z}{z+1}\right]$

$= -\sin 1$.

$\therefore$ 由留数定理有 $\oint_{|z|=3}\frac{\sin z}{z+1}dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{\sin z}{z+1}, -1\right]$

$= -2\pi i \sin 1$

(2) $\oint_{|z|=2}\frac{2e^z+z}{z^2+1}dz$；

$\oint_{|z|=2}\frac{2e^z+z}{z^2+1}dz$； $\frac{2e^z+z}{z^2+1}$ 的

解. 由于 $z=\pm i$ 均为一级极点，且位于 $|z|=2$ 内.

$\therefore$ 由留数定理有

$\oint_{|z|=2}\frac{2e^z+z}{z^2+1}dz = 2\pi i\left\{\operatorname{Res}\left[\frac{2e^z+z}{z^2+1}, i\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{2e^z+z}{z^2+1}, -i\right]\right\}$

$= 2\pi i\left[\frac{2e^i+i}{2i} - \frac{2e^{-i}-i}{2i}\right]$

$= 2\pi i[2\sin 1+1]$

(3) $\oint_{|z|=4}\frac{z+1}{\sin z}dz$；

(3) $\oint_{|z|=6}\frac{z+1}{\sin z}dz$；

05/12/02

解：由于 $z=0,\pm\pi$ 均为 $\frac{z+1}{\sin z}$ 的一级极点，且位于 $|z|=6$ 内

$$=2\pi i\left\{Res\left[\frac{z+1}{\sin z},0\right]+Res\left[\frac{z+1}{\sin z},\pi\right]+Res\left[\frac{z+1}{\sin z},-\pi\right]\right\}$$

$$\oint_{|z|=6}\frac{z+1}{\sin z}dz=2\pi i\left[\frac{z+1}{(\sin z)'}\Big|_{z=0}+\frac{z+1}{(\sin z)'}\Big|_{z=\pi}+\frac{z+1}{(\sin z)'}\Big|_{z=-\pi}\right]$$

$$=2\pi i\left[1+\frac{\pi+1}{-1}+\frac{-\pi+1}{-1}\right]=-2\pi i$$

32

(4) $\oint_C\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}dz$，$C:|z|=2$；

解：由于 $z=1$ 为 $\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$ 的二级极点。

由留数定理得

$$\oint_C\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}dz=2\pi i\,Res\left[\frac{e^{2z}}{(z-1)^2},1\right]=2\pi i\lim_{z\to1}\left[(z-1)^2\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}\right]'$$

$$=2e^2\cdot 2\pi i=4\pi e^2 i$$

(5) $\oint_{|z|=1}z^3\sin^5\frac{1}{z}dz$；

解．由于 $z=0$ 为 $z^3\sin^5\frac{1}{z}$ 的本性奇点，且在 $|z|=1$ 内

而 $z^3\sin^5\frac{1}{z}=z^3\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{2n+1}}\right]^5$

$=\frac{1}{z^2}-\frac{5}{6}z^{-4}+\frac{\frac{23}{72}}{z^6}-\frac{227}{3024}\frac{1}{z^8}+\cdots$

∴由留数定理有

$$\oint_{|z|=1} z^3\sin^5\frac{1}{z}dz=2\pi i\,\mathrm{Res}\left[z^3\sin^5\frac{1}{z},0\right]$$

$=2\pi i\cdot 0=0$

(6) $\oint_C (a+bz)(e^{\frac{1}{z}}+e^{\frac{1}{z-1}})dz$，$C:|z|=2$，$a$、$b$ 为常数；

解．$=\oint_C (a+bz)e^{\frac{1}{z}}dz+\oint_C (a+bz)e^{\frac{1}{z-1}}dz$

$z=0$ 为 $(a+bz)e^{\frac{1}{z}}$ 的本性奇点，$z=1$ 为 $(a+b)e^{\frac{1}{z-1}}$ 的本性奇点，

而 $(a+bz)e^{\frac{1}{z}}=(a+bz)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}\frac{1}{n!}\right)=(a+\frac{b}{2})\frac{1}{z}+\cdots$

$(a+bz)e^{\frac{1}{z-1}}=[(a+b)+b(z-1)]\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^n}\cdot\frac{1}{n!}\right)=[(a+b)+\frac{b}{2}]\frac{1}{z-1}+\cdots$

即 $\mathrm{Res}[(a+bz)e^{\frac{1}{z}},0]=a+\frac{b}{2}$，

$\mathrm{Res}[(a+bz)e^{\frac{1}{z-1}},1]=a+\frac{3}{2}b$

由留数定理有 $\oint_{|z|=1}(a+bz)(e^{\frac{1}{z}}+e^{\frac{1}{z-1}})dz=2\pi i\{\mathrm{Res}[(a+bz)e^{\frac{1}{z}},0]$

$+\mathrm{Res}[(a+bz)e^{\frac{1}{z-1}},1]\}=2\pi i[(a+\frac{b}{2})+(a+\frac{3}{2}b)]=2\pi i(2a+2b)$

$=4\pi i(a+b)$.

7、利用留数理论计算实积分：

(1) $\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta}d\theta\ (a>b>0)$；

(1) $\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta}d\theta\ (a>b>0)$；

解. 设 $z=e^{i\theta}$，则 $\sin\theta=\frac{z^2-1}{2iz}$，$\cos\theta=\frac{z^2+1}{2z}$，$d\theta=\frac{dz}{iz}$

$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta}d\theta=\oint_{|z|=1}\frac{\left(\frac{z^2-1}{2iz}\right)^2}{a+b\cdot\frac{z^2+1}{2z}}\cdot\frac{dz}{iz}=\frac{i}{2}\oint_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2}{z^2(bz^2+2az+b)}dz$，令 $f(z)=\frac{i}{2}\cdot\frac{(z^2-1)^2}{z^2(bz^2+2az+b)}$，

在$|z|=1$内，$z_1=0$为$f(z)$二级极点，$z_2=\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$为$f(z)$一级极点，根据留数定理有

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{a+b\cos\theta}d\theta=2\pi i\left\{Res[f(z),0]+Res\left[f(z),\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right]\right\}$$

$$=2\pi i\left[\frac{-ai}{b^2}+\frac{\sqrt{a^2-b^2}\,i}{b^2}\right]=\frac{2\pi}{b^2}\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right).$$

(2) $\int_0^{2\pi}\frac{1}{a+b\sin\theta}d\theta\ (a>b>0)$；

解. 设 $z=e^{i\theta}$，则 $\sin\theta=\frac{z^2-1}{2iz}$，$d\theta=\frac{dz}{iz}$

$\int_0^{2\pi}\frac{1}{a+b\sin\theta}d\theta=\oint_{|z|=1}\frac{1}{a+b\frac{z^2-1}{2iz}}\cdot\frac{dz}{iz}=\oint_{|z|=1}\frac{2i}{ibz^2-2az-ib}dz$

令 $f(z)=\frac{2i}{ibz^2-2az-ib}$，则$f(z)$在圆$|z|=1$内只有一个一级极点 $z_1=\frac{i}{b}(\sqrt{a^2-b^2}-a)$

根据留数定理有. $\int_0^{2\pi}\frac{1}{a+b\sin\theta}d\theta=2\pi i\,Res[f(z),z_1]=2\pi i\left(-\frac{bi}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)$

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$；

解. 设 $f(z)=\frac{z^2}{1+z^4}$，分母最高次数比分子最高次数高二次，且在实轴上没有奇点

$$f(z)=\frac{z^2}{[z-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)][z-\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)][z-\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)][z-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)]}$$

$z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ 和 $z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$ 为在上半平面内的两个一级极点，且

$$\mathrm{Res}[f(z),z_1]=\lim_{z\to z_1}\frac{z^2}{[z-\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)][z^2+i]}=\frac{1+i}{4\sqrt{2}i},$$

$$\mathrm{Res}[f(z),z_2]=\lim_{z\to z_2}\frac{z^2}{[z-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)](z^2-i)}=\frac{1-i}{4\sqrt{2}i}$$

于是有 $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i(\mathrm{Res}[f(z),z_1]+\mathrm{Res}[f(z),z_2])$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\left(\frac{1+i}{4\sqrt{2}i}+\frac{1-i}{4\sqrt{2}i}\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

(4) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(a^2+x^2)^2}dx\,(a>0)$；

解. 设 $f(z)=\frac{z^2}{(a^2+z^2)^2}$，分母最高次数比分子最高次数高二次，且在实轴上没有奇点。

$f(z)=\frac{z^2}{(z+ai)^2(z-ai)^2}$，$z=ai$ $(a>0)$ 为位于上半平面内的二级极点，且

$$\mathrm{Res}[f(z),ai]=\lim_{z\to ai}f(z)\cdot(z-ai)^2=-\frac{i}{4a}$$

于是有 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(a^2+x^2)^2}dx=2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),ai]=2\pi i\cdot\left(-\frac{i}{4a}\right)=\frac{\pi}{2a}$

(5) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2+4x+5}dx$；

(5) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2+4x+5}dx$；

解：设 $f(z)=\frac{1}{z^2+4z+5}$，分母最高次数比分子最高次数高二次。

因为 $f(z)e^{iz}=\frac{e^{iz}}{[z-(-2+i)][z-(-2-i)]}$ 在上半平面内有一级极点 $z=-2+i$，且

$\mathrm{Res}[f(z)e^{iz},-2+i]=\lim\limits_{z\to -2+i}f(z)e^{iz}\cdot[z-(-2+i)]=\frac{e^{-1-2i}}{2i}$

于是有 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2+4x+5}dx=\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iz}}{z^2+4z+5}dz=\mathrm{Im}(2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z)e^{iz},-2+i])$

$=\mathrm{Im}(2\pi i\cdot\frac{e^{-1-2i}}{2i})=\mathrm{Im}(\pi e^{-1-2i})=\pi e^{-1}\sin 2$.

(6)

$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{16+x^4}dx$

解：设 $f(z)=\frac{z}{16+z^4}$，分母最高次数比分子最高次数高三次。

因为 $f(z)e^{iz}=\frac{ze^{iz}}{[z-\sqrt{2}(1+i)][z-\sqrt{2}(1-i)][z-\sqrt{2}(-1+i)][z-\sqrt{2}(-1-i)]}$ 在上半平面内有两个一级极点，分别为

$z_1=\sqrt{2}(1+i)$ 及 $z_2=\sqrt{2}(-1+i)$，且

$\mathrm{Res}[f(z)e^{iz},z_1]=\lim\limits_{z\to z_1}f(z)e^{iz}\cdot[z-\sqrt{2}(1+i)]=-\frac{i}{16}e^{i\sqrt{2}(1+i)}$

$\mathrm{Res}[f(z)e^{iz},z_2]=\lim\limits_{z\to z_2}f(z)e^{iz}[z-\sqrt{2}(-1+i)]=\frac{i}{16}e^{-\sqrt{2}(1+i)}$

于是有 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{16+x^4}dx=\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ze^{iz}}{16+z^4}dz=\mathrm{Im}\{2\pi i(\mathrm{Res}[f(z)e^{iz},z_1]+\mathrm{Res}[f(z)e^{iz},z_2])\}$

$=\mathrm{Im}\{2\pi i(-\frac{i}{16}e^{-\sqrt{2}(1-i)}+\frac{i}{16}e^{-\sqrt{2}(1+i)})\}=\mathrm{Im}\{\frac{\pi}{4}ie^{-\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}\}=\frac{\pi}{4}e^{-\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}$

第六章　保角映射

一、B　D　D　A　D　A

二、1、保角性和伸缩率不变性；　　2、$\omega=1+z$；　　3、$\omega=Re^{i\theta}\dfrac{z-a}{1-z\bar{a}}$；

4、角形域 $0<\arg w<\dfrac{3}{4}\pi$　　5、扇形域 $0<\arg\omega<\pi$ 且 $|\omega|<8$。

三、1、

解：一个解析函数 $w=f(z)$ 所构成的映射在 $f'(z)\neq 0$ 的点组成的区域内具有伸缩率和旋转角的不变性.

② 由于 $w'=2z$，故当 $z=0$ 时 $w'=0$. 因此 $w=z^2$ 在复平面上除 $z=0$ 外处处具有旋转角与伸缩率的不变性.

2、

大？解：由伸缩率及旋转角计算公式有：$|w'(z_0)|=\left|\frac{1}{2z}\right|_{z=1+i}=\frac{1}{2}$（伸缩率）

$\arg w'(z_0)=\arg(\frac{1}{2}i)=\frac{\pi}{2}$（旋转角）

当 $|w'(z)|<1$ 时，即在区域 $x^2+y^2>1$ 时图形缩小，在区域 $x^2+y^2<1$ 时图形放大.

3、

下的[illegible]区域。

解：由已知所求映射 $w=f(z)$ 满足：$\dfrac{\frac{w-(-1)}{w-i}}{\frac{1-(-1)}{1-i}}=\dfrac{\frac{z-2}{z-i}}{\frac{-2-2}{-2-i}}$　化简得　$w=-\dfrac{-z+6i}{3iz-2}$

4、(1)

……分别映射成 1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$。

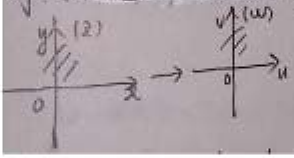
解：由题意有 $\dfrac{\frac{w-1}{w-1/2}}{\frac{1/3-1}{1/3-1/2}}=\dfrac{\frac{z-0}{z-1}}{\frac{2-0}{2-1}}$　化简得 $w=\dfrac{1}{1+z}$

(2)

解：由题意有 $\dfrac{\frac{w-\infty}{w-(-1)}}{\frac{0-\infty}{0-(-1)}}=\dfrac{\frac{z-(-i)}{z-0}}{\frac{i-(-i)}{i-0}}$　化简得 $w=\dfrac{z-i}{z+i}$.

（3）

解：由题意，该映射将z平面的x轴映射成w平面上的u轴，且方向一致，则在x轴和u轴上取两对对应点，则如有 $w(0)=0$，$w(1)=1$，有

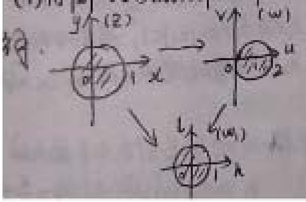


$$\frac{w-0}{w-1} : \frac{1+i-0}{1+i-1} = \frac{z-0}{z-1} : \frac{i-0}{i-1}$$ 化简得 $w=\frac{2z}{1+z}$.

（4）

(4)将$|z|<1$映射成$|\omega-1|<1$.

解.



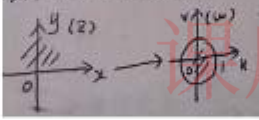
①作映射 $w_1=w-1$，该映射将w平面上的$|w-1|<1$映射成w_1平面上的$|w_1|<1$.

②设映射 $w_1=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$ $(\theta\in R)$ 将z平面上的$|z|<1$映射成w_1平面上的$|w_1|<1$，取$\theta=0$，$\alpha=\frac{1}{2}$，则 $w_1=\frac{1-2z}{z-2}$.

综上所述，$w=1+\frac{1-2z}{z-2}=-\frac{z+1}{z-2}$，该映射将$|z|<1$映成$|w-1|<1$.

（5）

(5)将上半平面映射成单位圆$|\omega|<1$，且将i映射成0，arg $f'(i)=\frac{\pi}{2}$



设所求映射为 $w=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}$，由题意知 $\alpha=i$，且 $\theta=\arg f'(i)+\frac{\pi}{2}=\pi$

$\therefore w=e^{i\pi}\frac{z-i}{z+i}=\frac{i-z}{z+i}$

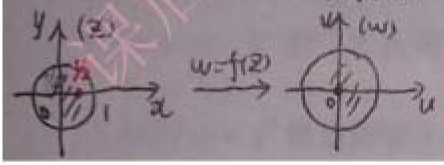
6（1）

解(1) 设所求映射为 $w=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$ ① $(\theta\in R)$

由题意知 $\alpha=\frac{1}{2}$，且 $f(-1)=1$ 则代入①中

$1=e^{i\theta}\frac{-1-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}(-1)}$ 得 $e^{i\theta}=-1$

综上讨论得 所求映射为 $w=-\frac{z-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z}=-\frac{2z-1}{2-z}$

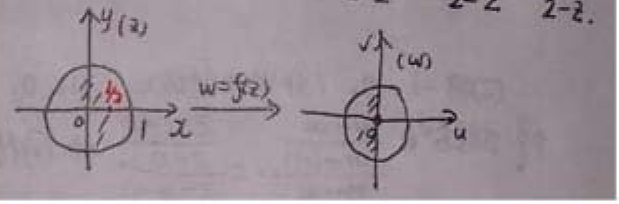


（2）

解. 设所求映射为 $w=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-z\bar{\alpha}}$ $(\theta\in R)$

由题意知 $\alpha=\frac{1}{2}$，且 $\theta=\arg f'(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{2}$，

则所求映射 $w=e^{i\frac{\pi}{2}}\frac{z-\frac{1}{2}}{1-z\cdot\frac{1}{2}}=i\frac{2z-1}{2-z}=\frac{2iz-i}{2-z}$.



7

解 首先，分式线性映射应满足 $ad-bc\neq0$.

其次 若 $|z|=1$ 映为直线，则 $|z|=1$ 上某点应映为 ∞，即 $cz+d=0$. 故应有 $\left|-\frac{d}{c}\right|=1$，即 $|c|=|d|$

所以，参数应满足 $ad-bc\neq0$ 且 $|c|=|d|$.

8

解. ① 作变换 $z_1=\frac{z}{2}$，将扩充 z 平面上 $|z|<2$ 映为扩充 z_1 平面上的 $|z_1|<1$；将 $z=0$ 映为 $z_1=0$

② 作映射 $w_1=e^{i\frac{\pi}{2}}w=iw$，将扩充 w 平面上的 $\operatorname{Re}w>0$ 映为扩充 w_1 平面上的 $\operatorname{Im}w_1>0$，将 $w=1$ 映为 $w_1=i$；

③ 设映射 $z_1=e^{i\theta}\frac{w_1-\alpha}{w_1-\bar{\alpha}}$ $(\theta\in R)$ 将扩充 w_1 平面上的 $\operatorname{Im}w_1>0$ 映为扩充 z_1 平面上的 $|z_1|<1$；

将 $w_1=i$ 映为 $z_1=0$；即 $\alpha=i$. $\therefore z_1=e^{i\theta}\frac{w_1-i}{w_1+i}$. 由 $\arg w'(0)=\frac{\pi}{2}$ 知 $\theta=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$.

$\therefore z_1=-i\frac{w_1-i}{w_1+i}$

综上所述，所求映射为 $w=\frac{2+iz}{2-iz}$

9

解 …2i 映射成 $\omega=0$ $(\omega=u+iv)$.

由 $z=4i$ 是 $|z-4i|<2$ 的圆心，且 $z=4i$ 映射为 $w=-4$，那么 $z=4i$ 关于圆周 $|z-4i|=2$ 的对称点 $z=\infty$ 应映射到

$w=-4$ 关于 $u=0$ 的对称点 $w=4$；又 $w(2i)=0$. 由这三对对应点即唯一确定了所求的映射.

$\frac{w-(-4)}{w-4}:\frac{0-(-4)}{0-4}=\frac{z-4i}{2i-4i}$. 即 $w=-4\cdot\frac{2i+z}{z-2-4i}$.

10

…把 $|z|<1, \mathrm{Im}\,z>0$ 映为单位圆外域 $|\omega|>1$ 的一个保角映射。

解：① 将 $|z|<1$，$\mathrm{Im}\,z>0$ 映为第一象限，$\mathrm{Re}\,w_1>0$，$\mathrm{Im}\,w_1>0$，即将边界 $-1\to i\to 1$ 映为边界 $\infty\to i\to 0$

则 $\frac{w_1-0}{w_1-\infty}:\frac{i-0}{i-\infty}=\frac{z-1}{z+1}:\frac{i-1}{i+1}\Rightarrow w_1=\frac{z-1}{z+1}$；

② 作映射 $w_2=w_1^2$，将第一象限映为上半平面 $\mathrm{Im}\,w_2>0$；

③ 将 $\mathrm{Im}\,w_2>0$ 映为 $|w|>1$，即将边界上的点 $-1,0,1$ 依次映为 $-i,-1,i$，并令 $i\to\infty$，$-i\to 0$，则得映射 $w=\frac{w_2+i}{w_2-i}$；

综上所述，所求映射为 $w=\frac{w_2+i}{w_2-i}=\frac{w_1^2+i}{w_1^2-i}=\frac{(1-z)^2+i(1+z)^2}{(1-z)^2-i(1+z)^2}$.

11

$\omega=f(z)$。解：① 作映射 $z_1=z-2$，将扩充 z 平面上的 $|z-2|<1$ 映为扩充 z_1 平面上的 $|z_1|<1$；将 $z=2$ 映为 $z_1=0$.

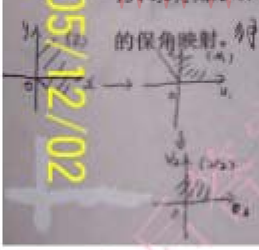
② 作映射 $w_1=\frac{w-2i}{2}$，将扩充 w 平面上的 $|w-2i|<2$ 映射为扩充 w_1 平面上的 $|w_1|<1$，将 $w=0$ 映为点 $w_1=-\frac{i}{2}$；

③ 设映射 $z_1=e^{i\theta}\frac{w_1-a}{1-w_1\bar{a}}$，将扩充 w_1 平面上的 $|w_1|<1$ 映为扩充 z_1 平面上的 $|z_1|<1$，且 $z_1(-\frac{i}{2})=0$，即 $a=-\frac{i}{2}$，
即 $z=2+e^{i\theta}\frac{(w-2i)/2+\frac{i}{2}}{1-\frac{i}{2}\cdot\frac{w-2i}{2}}=2(1+e^{i\theta}\frac{w-i}{2-iw})=g(w)$.

由题给条件 $\arg f'(2)=0$ 可知 $\arg g'(i)=\arg(\frac{1}{f'(2)})=0$，而 $g'(i)=\frac{4}{3}e^{i\theta}$，所以 $\theta=0$，从而
$z=2(1+\frac{w-i}{2-iw})$，于是 $w=\frac{z-(2-i)}{\frac{iz}{2}+(1-i)}$.

12

13、求将角形域 $-\frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{\pi}{2}$ …的保角映射。解：① 作旋转映射 $e^{\frac{\pi}{4}i}z$，将角形区域…映为 $0<\arg w_1<\frac{3\pi}{4}$



② 作映射 $w_2=w_1^{\frac{4}{3}}$，将角形域 $0<\arg w_1<\frac{3\pi}{4}$ 映射为扩充 w_2 平面上的上半平面，边界上 $z=1,i$，…

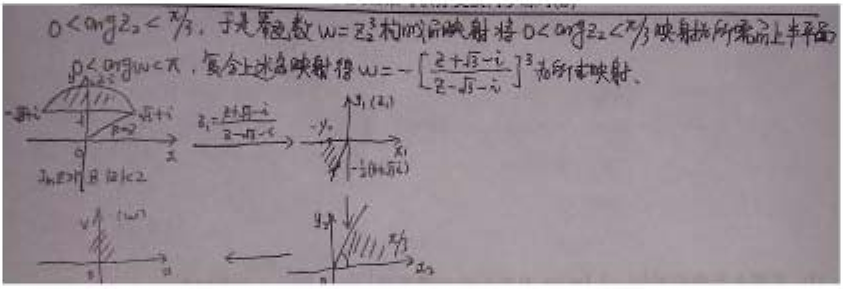
③ …，$-1,0$ 映射为 $2,-1,0$，于是 …

综上所述，所求映射为 $w=\frac{2i(\sqrt{6}+1)e^{\frac{\pi}{3}i}z^{\frac{4}{3}}}{(\sqrt{6}-2)e^{\frac{\pi}{3}i}z^{\frac{4}{3}}+3\sqrt{6}}$

13（1）

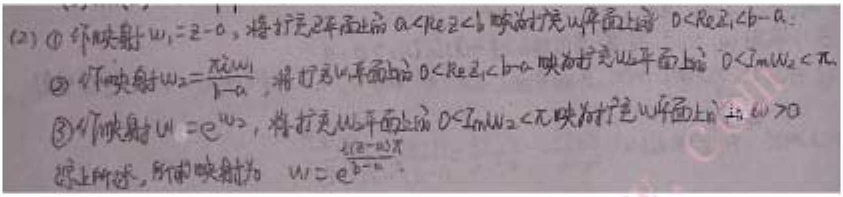
14.（1）直线 $\mathrm{Im}\,z=1$ 与圆周 $|z|=2$ 的交点为 $\sqrt{3}+i$ 和 $-\sqrt{3}+i$，分式线性映射 $z_1=\frac{z+\sqrt{3}-i}{z-\sqrt{3}-i}$ 将区域边界上点 $\sqrt{3}+i$，$2i$，$-\sqrt{3}+i$，i 分别映射为 ∞，$-\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)$，$0$，$-1$，把区域 $\mathrm{Im}\,z>1$ 且 $|z|<2$ 映射为 z_1 角形区域 $-\pi<\arg z_1<-\frac{2}{3}\pi$

作旋转变换 $z_2=e^{-\pi i}z_1$（旋转 $-\pi$，即顺时针方向旋转角度 π），将角形域 $-\pi<\arg z_1<-\frac{2}{3}\pi$ 变为角形域



$0<\arg z_2<\pi/3$，于是幂函数 $w=z_2^3$ 构成的映射将 $0<\arg z_2<\pi/3$ 映射成所需的上半平面 $0<\arg w<\pi$，复合上述各映射得 $w=-\left[\frac{z+\sqrt{3}-i}{z-\sqrt{3}-i}\right]^3$ 为所求映射。

（2）



(2) ① 作映射 $w_1=z-a$，将扩充z平面上的 $a<\mathrm{Re}\,z<b$ 映射为扩充 w_1 平面上的 $0<\mathrm{Re}\,z_1<b-a$；

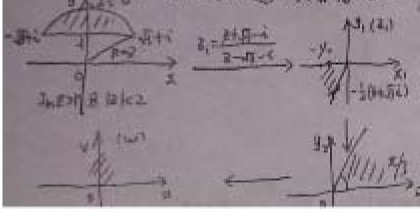
② 作映射 $w_2=\frac{\pi i w_1}{b-a}$，将扩充 w_1 平面上的 $0<\mathrm{Re}\,z_1<b-a$ 映射为扩充 w_2 平面上的 $0<\mathrm{Im}\,w_2<\pi$；

③ 作映射 $w=e^{w_2}$，将扩充 w_2 平面上的 $0<\mathrm{Im}\,w_2<\pi$ 映射为扩充 w 平面上的 $\mathrm{Im}\,\omega>0$

综上所述，所求映射为 $w=e^{\frac{i(z-a)\pi}{b-a}}$。

14 解：首先，做映射 $\omega_1=z-a$，将带形区域 $a<\mathrm{Re}\,z<b(0<a<b)$ 映射成带形区域 $0<\mathrm{Re}\,z<b-a(0<a<b)$；其次，做分式线性映射 $\omega_2=\dfrac{\pi\omega_1 i}{b-a}$，将带形区域 $0<\mathrm{Re}\,\omega_1<b-a(0<a<b)$ 映射成带形区域 $0<\mathrm{Im}\,\omega_2<\pi$；再做指数函数 $\omega_3=e^{\omega_2}$，将带形区域 $0<\mathrm{Im}\,\omega_2<\pi$ 映射成上半平面 $\mathrm{Im}\,z>0$；最后，做映射 $\omega=e^{-\frac{\pi}{2}i}\omega_3=-i\omega_3$，将上半平面 $\mathrm{Im}\,z>0$ 映射成右半平面 $\mathrm{Re}\,z>0$；综上所述，映射 $\omega=-ie^{\frac{\pi(z-a)i}{b-a}}$ 保角地将带形区域 $a<\mathrm{Re}\,z<b(0<a<b)$ 映射成右半平面 $\mathrm{Re}\,\omega>0$。

$0<\arg z_2<\pi/3$，于是幂函数 $w=z_2^3$ 构成的映射将 $0<\arg z_2<\pi/3$ 映射成所求的上半平面 $0<\arg w<\pi$，复合上述各映射得 $w=-\left[\frac{z+\sqrt{3}-i}{z-\sqrt{3}-i}\right]^3$ 为所求映射。



（2）

(2) ① 作映射 $w_1=z-a$，将 z 平面上的 $a<\mathrm{Re}\,z<b$ 映射成 w_1 平面上的 $0<\mathrm{Re}\,z_1<b-a$；

② 作映射 $w_2=\frac{\pi i w_1}{b-a}$，将 w_1 平面上的 $0<\mathrm{Re}\,z_1<b-a$ 映射成 w_2 平面上的 $0<\mathrm{Im}\,w_2<\pi$，

③ 作映射 $w=e^{w_2}$，将 w_2 平面上的 $0<\mathrm{Im}\,w_2<\pi$ 映射成 w 平面上的 $\mathrm{Im}\,\omega>0$

综上所述，所求映射为 $w=e^{\frac{i(z-a)\pi}{b-a}}$。

14 解：首先，做映射 $\omega_1=z-a$，将带形区域 $a<\mathrm{Re}\,z<b(0<a<b)$ 映射成带形区域 $0<\mathrm{Re}\,z<b-a(0<a<b)$；其次，做分式线性映射 $\omega_2=\dfrac{\pi\omega_1 i}{b-a}$，将带形区域 $0<\mathrm{Re}\,\omega_1<b-a(0<a<b)$ 映射成带形区域 $0<\mathrm{Im}\,\omega_2<\pi$；再做指数函数 $\omega_3=e^{\omega_2}$，将带形区域 $0<\mathrm{Im}\,\omega_2<\pi$ 映射成上半平面 $\mathrm{Im}\,z>0$；最后，做映射 $\omega=e^{-\frac{\pi}{2}i}\omega_3=-i\omega_3$，将上半平面 $\mathrm{Im}\,z>0$ 映射成右半平面 $\mathrm{Re}\,z>0$；综上所述，映射 $\omega=-ie^{\frac{\pi(z-a)i}{b-a}}$ 保角地将带形区域 $a<\mathrm{Re}\,z<b(0<a<b)$ 映射成右半平面 $\mathrm{Re}\,\omega>0$。

第七章　Fourier 变换

一、B　C　A　C　B　D

二、1、$\delta(t+3)+\delta(t-3)$　　2、$\frac{1}{a}f(\frac{t_0}{a})$

3、e^{-3}　　4、$2u(t-\frac{\pi}{6})$

5、$2\pi\delta(\omega)$　　6、$\frac{i}{4}F'(\frac{\omega}{2})$

7、$i(\omega-2)$

三、

2、已知 $f(t)=\begin{cases}1-t^2, & |t|<1\\ 0, & |t|>1\end{cases}$，求 $f(t)$ 的傅氏变换。

解：$\mathcal{F}\{f(t)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-1}^{1}(1-t^2)e^{-i\omega t}dt=\int_{-1}^{1}e^{-i\omega t}dt-\int_{-1}^{1}t^2e^{-i\omega t}dt$

$=2\int_0^1\cos\omega t\,dt-2\int_0^1 t^2\cos\omega t\,dt=2\frac{\sin\omega t}{\omega}\Big|_0^1-2\left[\frac{\omega^2t^2\sin(\omega t)-2\sin\omega t+2\omega t\cos\omega t}{\omega^3}\right]\Big|_0^1$

$=\frac{2\sin\omega}{\omega}-2\left[\frac{\sin\omega}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}\cos\omega-\frac{1}{\omega^3}\sin\omega\right]=\frac{2}{\omega^3}\sin\omega-\frac{2}{\omega^2}\cos\omega.$

3、证明 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(ax-b)dx=\frac{1}{a}f(\frac{b}{a})$　$(a>0)$。

证明：令 $ax=u$. 则 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(ax-b)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\frac{u}{a})\delta(u-b)\frac{du}{a}=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\frac{u}{a})\delta(u-b)du$

由δ函数的筛选性质，故 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(\frac{u}{a})\delta(u-b)du=f(\frac{b}{a})$.

即 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(ax-b)dx=\frac{1}{a}f(\frac{b}{a})$. 得证.

4、已知 $\mathcal{F}[f(t)]=F(\omega)$，利用傅氏变换的性质求下列函数的傅氏变换：

(1) $tf(2t)$：

解. 由相似性质有 $\mathcal{F}\{f(2t)\}=\frac{1}{2}F(\frac{\omega}{2})$，再由频域微分性质有 $\mathcal{F}\{tf(t)\}=i\frac{d}{d\omega}[\frac{1}{2}F(\frac{\omega}{2})]=\frac{i}{4}F'(\frac{\omega}{2})$

(2) $(t-2)f(t)$：

解. 由线性性质及频域微分性质有 $\mathcal{F}\{(t-2)f(t)\}=\mathcal{F}\{tf(t)\}-2\mathcal{F}\{f(t)\}$

$=i\frac{d}{d\omega}F(\omega)-2F(\omega)=iF'(\omega)-2F(\omega)$.

(3) $(t-2)f(-2t)$：

解. 由相似性质有 $\mathcal{F}\{f(-2t)\}=\frac{1}{2}F(-\frac{\omega}{2})$.

再利用线性性质及频域微分性质有

$\mathcal{F}\{(t-2)f(-2t)\}=\mathcal{F}\{tf(-2t)\}-2\mathcal{F}\{f(-2t)\}=i\frac{d}{d\omega}[\frac{1}{2}F(-\frac{\omega}{2})]-2\cdot\frac{1}{2}F(-\frac{\omega}{2})$

$=-\frac{i}{4}F'(-\frac{\omega}{2})-F(-\frac{\omega}{2})$

(4) $tf'(t)$：

解. 由时域微分性质有 $\mathcal{F}\{f'(t)\}=i\omega F(\omega)$,

再由频域微分性质有 $\mathcal{F}\{tf'(t)\}=i\frac{d}{d\omega}[i\omega F(\omega)]=-\omega F'(\omega)-F(\omega)$

(5) $f(2t-5)$：

解. 由相似性质有 $\mathcal{F}\{f(2t)\}=\frac{1}{2}F(\frac{\omega}{2})$.

再由时域平移有 $\mathcal{F}\{f(2t-5)\}=\mathcal{F}\{f[2(t-\frac{5}{2})]\}=\frac{1}{2}e^{-\frac{5}{2}i\omega}F(\frac{\omega}{2})$

(6) $(1-t)f(1-t)$；

解 由相似性质及时域平移性质有 $\mathscr{F}\{f(1-t)\}=\mathscr{F}\{f(-(t-1))\}=e^{-i\omega}F(-\omega)$

再利用线性性质及频域微分有 $\mathscr{F}\{(1-t)f(1-t)\}=\mathscr{F}\{f(1-t)\}-\mathscr{F}\{tf(1-t)\}$

$=e^{-i\omega}F(-\omega)-i\frac{d}{d\omega}[e^{-i\omega}F(-\omega)]=e^{-i\omega}F(-\omega)-[e^{-i\omega}F(-\omega)+ie^{-i\omega}F'(-\omega)]$

$=ie^{-i\omega}F'(-\omega)$.

5、求下列函数的傅氏变换：

(1) $f(t)=e^{-\beta t}\cos\omega_0 t\cdot u(t)$；

解 由Fourier变换的定义有 $\mathscr{F}\{e^{-\beta t}\cos\omega_0 t\cdot u(t)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\beta t}\cos\omega_0 t\cdot u(t)e^{-i\omega t}dt$

$=\int_0^{+\infty}\cos\omega_0 t\, e^{-(\beta+i\omega)t}dt=\left.\frac{e^{-(\beta+i\omega)t}[-(\beta+i\omega)\cos\omega_0 t+\omega_0\sin\omega_0 t]}{(\beta+i\omega)^2+\omega_0^2}\right|_0^{+\infty}$

$=\frac{\beta+i\omega}{(\beta+i\omega)^2+\omega_0^2}$

(2) $f(t)=\sin^3 t$；

解 $\mathscr{F}\{f(t)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin^3 t\, e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}[3\sin t-\sin 3t]e^{-i\omega t}dt$

$=\frac{3}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin t\, e^{-i\omega t}dt-\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin 3t\, e^{-i\omega t}dt=\frac{3}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}e^{-i\omega t}dt-\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{3it}-e^{-3it}}{2i}e^{-i\omega t}dt$

$=\frac{3}{8i}2\pi[\delta(\omega-1)-\delta(\omega+1)]-\frac{1}{8i}\cdot 2\pi[\delta(\omega-3)-\delta(\omega+3)]=\frac{\pi i}{4}[\delta(\omega-3)-3\delta(\omega-1)+3\delta(\omega+1)-\delta(\omega+3)]$

(3) $f(t)=\int_{-\infty}^{t}\tau g(\tau)d\tau$；

解 设 $\mathscr{F}\{g(t)\}=G(\omega)$，则由积分性质及微分性质有

$\mathscr{F}\{\int_{-\infty}^{t}\tau g(\tau)d\tau\}=\frac{\mathscr{F}\{tg(t)\}}{i\omega}+\pi\mathscr{F}\{tg(t)\}\delta(\omega)=[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{i\omega}]iG'(\omega)$

(4) $f(t)=t^n e^{-i\beta t}u(t)$；注：将原题改为：$f(t)=t^n e^{-i\beta t}u(t)$.

解：由于 $\mathcal{F}\{u(t)\}=\frac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega)$，由频移性质有 $\mathcal{F}\{e^{-i\beta t}u(t)\}=\frac{1}{i(\omega+\beta)}+\pi\delta(\omega+\beta)$

再由象函数微分性质有 $\mathcal{F}\{f(t)\}=\mathcal{F}\{t^n e^{-i\beta t}u(t)\}=i^n\frac{d^n}{d\omega^n}\left[\frac{1}{i(\omega+\beta)}+\pi\delta(\omega+\beta)\right]$

(5) $f(t)=\frac{1}{2}[\delta(t+a)+\delta(t-a)]$；

解：由 δ 函数的性质：$\mathcal{F}\{\delta(t\pm a)\}=e^{\pm ia\omega}$ 及线性性质有

$\mathcal{F}\{f(t)\}=\frac{1}{2}\mathcal{F}\{\delta(t+a)\}+\frac{1}{2}\mathcal{F}\{\delta(t-a)\}=\frac{1}{2}[e^{-ia\omega}+e^{ia\omega}]=\cos a\omega$

(6) $f(t)=g(3t-2)e^{-it}$；

解：设 $\mathcal{F}\{g(t)\}=G(\omega)$，由位移性质及相似性质有 $\mathcal{F}\{g(3t-2)\}=\frac{1}{3}e^{-\frac{2}{3}i\omega}G(\frac{\omega}{3})$

又由频域平移性质有 $\mathcal{F}\{g(3t-2)e^{-it}\}=\frac{1}{3}e^{-\frac{2}{3}(\omega+1)i}G(\frac{\omega+1}{3})$

6. 求下列函数的 Fourier 逆变换。

(1) $F(\omega)=\frac{\sin\omega}{\omega}$；

$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}(\cos\omega t+i\sin\omega t)d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}d\omega+\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega\sin\omega t}{\omega}d\omega$

$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin(1+t)\omega+\sin(1-t)\omega}{\omega}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin(1+t)\omega}{\omega}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin(1-t)\omega}{\omega}d\omega$

由单位阶跃函数 $u(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}d\omega \quad (t\neq 0)$

即 $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}d\omega=2u(t)-\frac{1}{2}$，于是 $f(t)=\frac{1}{2}[u(t+\pi)-\frac{1}{2}]+\frac{1}{2}[u(t-\pi)-\frac{1}{2}]=\frac{1}{2}[$[illegible]$]$

当 $t=\pm1$ 时，$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega}{\omega}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2\omega}{\omega}d\omega=\frac{1}{2}[u(0)-\frac{1}{2}]=\frac{1}{4}$

(2) $F(\omega)=\dfrac{i\omega}{\beta+i\omega}$ （$\beta>0$）；

7．利用积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)]^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2d\omega$，求下列积分的值：

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}dx$；

解：$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}dx\xlongequal{令\frac{x}{2}=t}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2d\omega$

$=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\pi^2d\omega=\pi$.

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}dx$；

解：$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2x(1-\cos^2x)}{x^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2dx-\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin x\cos x}{x}\right)^2dx$

(由(1)的结果) $=\pi-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2dt$

(再由(1)的结果) $=\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

8. 求微分积分方程 ……

9、若 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$，利用对称性质证明 $f(\mp\omega)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\mp t)e^{-i\omega t}dt$。

证明：由对称性质有 $f(-\omega)=\frac{1}{2\pi}\mathscr{F}\{F(t)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(t)e^{-i\omega t}dt$ (1)

令(1)中 $\omega=-u$ 有 $f(u)=\frac{1}{2\pi}\mathscr{F}\{f$

10、若 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$，$a$ 为非零常数，试证明 $\mathscr{F}[f(at-t_0)]=\dfrac{1}{|a|}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)e^{-i\frac{\omega}{a}t_0}$。

证明：令 $g(t)=f(at)$，由位移性质得 $\mathscr{F}\{f(at-t_0)\}=\mathscr{F}\{f(a(t-\frac{t_0}{a}))\}=\mathscr{F}\{g(t-t_0)\}$

$=\mathscr{F}\{g(t)\}e^{-i\omega\frac{t_0}{a}}=\mathscr{F}\{f(at)\}e^{-i\omega\frac{t_0}{a}}$.

再由相似性质得 $=\frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})e^{-i\frac{\omega}{a}t_0}$

即 $\mathscr{F}\{f(at-t_0)\}=\frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})e^{-i\frac{\omega}{a}t_0}$

结论~

第八章 Laplace 变换

一、A B D B D A

二、1、$\dfrac{3}{s^2+7s+1}$　　2、$\dfrac{e^{\frac{3}{s+1}}}{s+1}$

3、$\dfrac{2s-1+\arccos s}{s^2}$　　4、$\dfrac{1}{2}e^t\sin 2t$

5、$\dfrac{1}{2}\cos 2t$

三、

(1) $f(t)=\begin{cases}\sin t, & 0<t\le\pi\\ 0, & t>\pi\end{cases}$；

解：根据 Laplace 变换公式有

$\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt$

$=\int_0^{\pi}\sin t\, e^{-st}dt$

$=\left[-\dfrac{e^{-st}\cos t+se^{-st}\sin t}{s^2+1}\right]_0^{\pi}$

$=\dfrac{1}{s^2+1}(e^{\pi s}+1)e^{-\pi s}$

(2) $f(t)=(t-1)[u(t-1)-u(t-2)]$；

解：由于 $\mathcal{L}\{u(t)\}=\frac{1}{s}$ 及微分性质及延迟性质有

$\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\{tu(t-1)\}-\mathcal{L}\{u(t-1)\}-\mathcal{L}\{tu(t-2)\}+\mathcal{L}\{u(t-2)\}$

$=-[e^{-s}\frac{1}{s}]'-e^{-s}\frac{1}{s}+[e^{-2s}\frac{1}{s}]'+e^{-2s}\frac{1}{s}$

$=\frac{1}{s^2}[e^{-s}-se^{-2s}-e^{-2s}]$

(3) $f(t)=\cos\alpha t\cos\beta t$；

解.

(4) $f(t)=e^{-3t}\int_0^t t\sin 2t\,dt$，$\int_0^t te^{-3t}\sin 2t\,dt$

解：由积分性质有

$\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{1}{s}\mathcal{L}\{te^{-3t}\sin 2t\}$

由位移性质及像函数的微分性质有

$\mathcal{L}\{e^{-3t}\sin 2t\}=\dfrac{2}{(s+3)^2+4}$

$\mathcal{L}\{te^{-3t}\sin 2t\}=-\dfrac{d}{ds}\left[\dfrac{2}{(s+3)^2+4}\right]=\dfrac{4(s+3)}{[(s+3)^2+4]^2}$

故 $\mathcal{L}\{f(t)\}=\dfrac{4(s+3)}{s[(s+3)^2+4]^2}$

3、计算积分：(1) $\int_0^{\infty}te^{-2t}\cos t\,dt$；

(1) 解：$\mathcal{L}\{\cos t\}=\dfrac{s}{s^2+1}$，由 s 域微分有

$\mathcal{L}\{t\cos t\}=-(\dfrac{s}{s^2+1})'=\dfrac{1-s^2}{(s^2+1)^2}$

但 $\mathcal{L}\{t\cos t\}=\int_0^{+\infty}t\cos t\,e^{-st}dt$

当 s=2 时，即 $\int_0^{+\infty}te^{-2t}\cos t\,dt=-\dfrac{3}{25}$

(2) $\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}dt$．

解：由公式 $\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt=\int_0^{\infty}\mathcal{L}\{f(t)\}ds$ 得

$\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}dt=\int_0^{\infty}\mathcal{L}\{e^{-t}-e^{-3t}\}ds$

39

$=\int_0^{+\infty}[\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+3}]ds=\ln\frac{s+1}{s+3}\Big|_0^{+\infty}=\ln 3$

12/02

4、利用拉氏变换的性质求下列函数的拉氏变换(a,b 为常数)：

(1) $f(t)=1-te^{t}$；

解. $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\{1\}-\mathcal{L}\{te^{t}\}$

$=\frac{1}{s}-\frac{1}{(s-1)^2}$

注：$\mathcal{L}\{te^{t}\}=\frac{1}{(s-1)^2}$ 可以由[illegible]S[illegible]分[illegible]得到.

(2) $f(t)=\frac{t}{2a}\sin at+t\cos bt$；

解. $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{1}{2a}\mathcal{L}\{t\sin at\}+\mathcal{L}\{t\cos bt\}$

由[illegible]有

$=\frac{1}{2a}\cdot\left(\frac{a}{s^2+a^2}\right)'+\left(\frac{s}{s^2+b^2}\right)'$

$=-\frac{s}{(s^2+a^2)^2}+\frac{b^2-s^2}{(s^2+b^2)^2}$

(3) $f(t)=e^{-2t}\sin 6t$；

$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\{e^{-2t}\sin 6t\}$

由位移性质 $=\frac{6}{(s+2)^2+36}$

(4) $f(t)=t^2u(t-2)$；

解. 由于 $\mathcal{L}\{u(t)\}=\frac{1}{s}$ 利用性质得

$\mathcal{L}\{u(t-2)\}=e^{-2s}\frac{1}{s}$

又由[illegible]有 $\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\{t^2u(t-2)\}$

$=\left(e^{-2s}\frac{1}{s}\right)''=\frac{-2se^{-2s}-e^{-2s}}{s^2}$

$=\frac{-(2s+1)e^{-2s}}{s^2}$

5、求下列函数的拉氏逆变换：

(1) $F(s)=\frac{s+1}{s^2+s-6}$；

因为 $F(s)=\frac{s+1}{s^2+s-6}=\frac{s+1}{(s-2)(s+3)}=\frac{3}{5}\frac{1}{s-2}+\frac{2}{5}\frac{1}{s+3}$

所以 $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=\frac{3}{5}e^{2t}+\frac{2}{5}e^{-3t}=\frac{1}{5}(3e^{2t}+2e^{-3t})$.

(2) $F(s)=\frac{2s+5}{s^2+4s+13}$；

因为 $F(s)=\frac{2(s+2)}{(s+2)^2+3^2}+\frac{1}{3}\frac{3}{(s+2)^2+3^2}$

所以 $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2(s+2)}{(s+2)^2+3^2}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{3}\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\right\}$

$=2e^{-2t}\cos 3t+\frac{1}{3}e^{-2t}\sin 3t$

(3) $F(s)=\dfrac{1}{s^2(s^2-1)}$;

解. 用部分分式法有

$F(s)=\dfrac{1}{s^2(s^2-1)}=-\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s-1}-\dfrac{1}{s+1}\right)$

从而 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}=-t+\frac{1}{2}(e^{t}-e^{-t})$

$=\sinh t-t$.

注：本题也可用留数法求解.

(4) $F(s)=\dfrac{1}{(s^2+2s+2)^2}$;

解. $F(s)=\dfrac{1}{((s+1)^2+1)^2}$

所以 由位移性质及 $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2+1)^2}\right\}=\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t)$

$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}=\frac{1}{2}e^{-t}(\sin t-t\cos t)$

6、试利用卷积定理证明：$\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s^2}{(s^2+a^2)^2}\right]=\dfrac{1}{2a}(at\cos at+\sin at)$；

证明. 令 $F_1(s)=\dfrac{s}{s^2+a^2}$ 则 $f_1(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F_1(s)\}=\cos at$.

由卷积定理有：$\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^2}{(s^2+a^2)^2}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\{F_1^2(s)\}=f_1(t)*f_1(t)=\int_0^t\cos a\tau\cdot\cos a(t-\tau)d\tau$

$=\frac{1}{2a}(at\cos at+\sin at)$.

7、求解积分方程 $y(t)=at-\int_0^t\sin(t-\tau)y(\tau)d\tau$；

原方程显然可以写为 $y(t)=at+\sin t*y(t)$

两边取Laplace变换 并利用卷积定理有

$Y(s)=\frac{a}{s^2}+Y(s)\frac{1}{s^2+1}$ 即 $Y(s)=\frac{a(s^2+1)}{s^4}=a\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^4}\right)$

从而原方程的解为 $y(t)=\mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}=a\left(t+\frac{t^3}{6}\right)$.

2005/

8、求解变系数二阶线性微分方程：$ty''(t)+(1-2t)y'(t)-2y(t)=0$，$y(0)=1$，$y'(0)=2$。

解 方程两边取Laplace变换，并代入初始条件并利用微分性质得

$-\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{y''\}+\mathscr{L}\{y'\}+2\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{y'\}-2\mathscr{L}\{y\}=0$

$-\frac{d}{ds}[s^2Y(s)-s-2]+sY(s)-1+2\frac{d}{ds}[sY(s)-1]-2Y(s)=0$

$-2sY(s)-s^2Y'(s)+1+sY(s)-1+2Y(s)+2sY'(s)-2Y(s)=0$

整理得 $(2s-s^2)Y'(s)-sY(s)=0$. 这是一阶齐次线性方程 $Y(s)=ce^{\int\frac{1}{\ }ds}=-\frac{c}{s-2}$.

再取Laplace逆变换得 $y(t)=-ce^{2t}$. 由初始条件 $y(0)=1$ 得 $c=-1$.

故原方程的解为 $y(t)=e^{2t}$.

9、解下列方程：

(1) $y'(t)-4y(t)+4\int_0^t y(t)dt=\frac{t^3}{3}$，$y(0)=0$；

解 利用微分性质和积分性质，对方程两边取Laplace变换有

$sY(s)-4Y(s)+\frac{4}{s}Y(s)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3!}{s^4}$

即 $Y(s)=\frac{2}{s^3(s-2)^2}=\frac{3}{8}\frac{1}{s}+\frac{1}{2}\frac{1}{s^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{s^3}-\frac{3}{8}\frac{1}{s-2}+\frac{1}{4}\frac{1}{(s-2)^2}$

从而方程的解为 $y(t)=\mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}t^2-\frac{3}{8}e^{2t}+\frac{1}{4}te^{2t}$

(2) $y''(t)-2y'(t)+2y(t)=2e^t\cos t$，$y(0)=y'(0)=0$；

解 对方程两边取Laplace变换，并代入初始条件有

$s^2Y(s)-2sY(s)+2Y(s)=2\frac{s-1}{(s-1)^2+1}$

即 $Y(s)=\frac{2(s-1)}{(s^2-2s+2)^2}=-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(s-1)^2+1}\right)$

由s域微分性质，$\mathscr{L}^{-1}\{F'(s)\}=-t\mathscr{L}^{-1}\{F_1(s)\}$，其中 $F_1(s)=\frac{1}{(s-1)^2+1}$，从而可得

方程的解为 $y(t)=\mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}=-\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(s-1)^2+1}\right)\right\}=t\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+1}\right\}=te^t\sin t$.

模拟题 1 参考答案

一、 填空题

1. $\cos 13\theta + i\sin 13\theta$；

2. $\ln 2 + i(\frac{\pi}{3} + 2k\pi)$， $k \in Z$

3. e

4. $\omega = -\frac{1+i+iz}{-1+i+iz}$

5. $e^{-i\omega t_0} + 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$

二、 $f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$ $1 < |z| < 2$.

三、计算题

1. $2\pi i(e-1)$

2. $-\frac{3}{2}\pi i$

3. $2\pi i$

四、证明见课本 P29 例 2.9 (1)

五、 $\omega = z_1^2 = \left(-\frac{z+1}{z-1}\right)^2 = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$

六、 $\frac{\pi}{6}$

七、 $y = -\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{7}{8}e^{-3t} + \frac{1}{8}e^{t}$

模拟题 2 参考答案

一、填空题

1. $(1+\mathrm{i})^{\mathrm{i}} = \underline{\; e^{-\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+\mathrm{i}\ln\sqrt{2}} \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots) \;}$；

2. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2 z^n}$ 的收敛范围为 $\underline{\;|z|\ge 1\;}$；函数 $w=e^z$ 在 $z=\mathrm{i}$ 处的旋转角为 $\underline{\;1\;}$

；

伸缩率为 $\underline{\;1\;}$；

2. 设解析函数 $f(z)$ 以 z_0 为一级零点，则 $\oint_{|z-z_0|=r}\dfrac{z-z_0}{f(z)}\mathrm{d}z = \underline{\;0\;}$；

3. 设 $f(z)=y^3-3x^2y+iv(x,y)$ 在 z 复平面内处处解析，则 $f'(\mathrm{i}) = \underline{\;-3\mathrm{i}\;}$ 。

二、设 $f(z)=\dfrac{z-2}{(z-1)z}$，(1)将 $f(z)$ 在 $z=2$ 处展开成 Taylor 级数，并指出其收敛半径；(2)将 $f(z)$ 在圆环域 $0<|z-1|<1$ 内展开成洛朗级数。

解：(1)

$$f(z)=\frac{z-2}{(z-1)z}=\frac{2}{z}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{1+\frac{z-2}{2}}-\frac{1}{1+(z-2)}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(z-2)^n-\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z-2)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}-1\right)(-1)^n(z-2)^n \quad |z-2|<1$$

(2)

$$f(z)=\frac{z-2}{(z-1)z}=-\frac{1}{z-1}+\frac{2}{1+(z-1)}$$

$$=-\frac{1}{z-1}+2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z-1)^n \quad (0<|z-1|<1)$$

三、计算题

1. 求 $\lim\limits_{z\to1+\mathrm{i}}\dfrac{z\bar{z}+2z-\bar{z}-2}{z^2-1}$；

解：由于 $\dfrac{z\bar{z}+2z-\bar{z}-2}{z^2-1}$ 在 $z=1+\mathrm{i}$ 处连续，

所以，
$$\lim_{z\to1+\mathrm{i}}\frac{z\bar{z}+2z-\bar{z}-2}{z^2-1}=\frac{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})+2(1+\mathrm{i})-(1-\mathrm{i})-2}{(1+\mathrm{i})^2-1}=\frac{1+3\mathrm{i}}{2\mathrm{i}-1}$$

2. 计算 $\oint_C\dfrac{z\mathrm{d}z}{(z-2)^2(z+4)}$，其中 C 为正向圆周 $|z-3|=6$；

解：被积函数 $f(z)=\dfrac{z}{(z-2)^2(z+4)}$ 在 C 内有一个孤立奇点 $z=2$，且为二级极点

由解析函数的高阶导数公式(或留数定理)有

$$\oint_C \frac{z\mathrm{d}z}{(z-2)^2(z+4)}=2\pi i\left(\frac{z}{z+4}\right)'\Bigg|_{z=2}$$

$$=2\pi\mathrm{i}\left(\frac{4}{(z+4)^2}\right)\Bigg|_{z=2}=\frac{2}{9}\pi\mathrm{i}$$

3、计算积分 $\oint_C\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2 \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\mathrm{d}z$，其中 C 为正向圆周 $|z|=2$；

解：被积函数 $f(z)=\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$ 在 C 内有一个孤立奇点 $z=0$，且为本性奇点

$f(z)$ 在 $z=0$ 的去心邻域 $0<|z|<+\infty$ 内的 Laurent 级数展开为

$$f(z)=\left(z+\frac{1}{z}\right)^2\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}=\left(z^2+2+z^{-2}\right)\left(1+z^{-1}+\frac{z^{-2}}{2!}+\frac{z^{-3}}{3!}+\cdots\right)$$

其中，z^{-1} 的系数为 $C_{-1}=\left(2+\dfrac{1}{3!}\right)=\dfrac{13}{6}$

所以，$\oint_C\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}\left[\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2\mathrm{e}^{\frac{1}{z}},0\right]$

$$=2\pi\mathrm{i}C_{-1}=\frac{13}{3}\pi\mathrm{i}$$

4、利用留数定理计算 $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$ 。

解：$f(z)=\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$ 在上半平面内只有一个二级极点，且分子的次数比分母的次数大 2，

所以 $$I=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}\left[\frac{z^2}{(z^2+1)^2},\mathrm{i}\right]$$

$$=\pi\mathrm{i}\lim_{z\to\mathrm{i}}\left(\frac{z^2(z-\mathrm{i})^2}{(z^2+1)^2}\right)'$$

$$= \pi i \lim_{z \to i} \frac{2iz}{(z+i)^3}$$

$$= \pi i \frac{-i}{4} = \frac{\pi}{4}$$

四、求一个保角映射 $\omega = f(z)$，将扇形域 $|z| < 1, 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$ 映射成上半平面 $\mathrm{Im}\,\omega > 0$

解：先做幂函数映射 $\omega_1 = z^4$，它将扇形域 $|z| < 1, 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$ 映射成上半单位圆的内部区域 $|\omega_1| < 1, \mathrm{Im}\,\omega_1 > 0$；

再做分式线性映射 $\omega_2 = \frac{\omega_1 + 1}{1 - \omega_1}$ 将上半单位圆的内部区域 $|\omega_1| < 1, \mathrm{Im}\,\omega_1 > 0$ 映射成第一象限 $\mathrm{Re}\,\omega_2 > 0, \mathrm{Im}\,\omega_2 > 0$

最后做幂函数映射 $\omega = \omega_2^2$ 将第一象限 $\mathrm{Re}\,\omega_2 > 0, \mathrm{Im}\,\omega_2 > 0$ 映射成上半平面 $\mathrm{Im}\,\omega > 0$

综上所述，映射 $\omega = \left(\frac{z^4+1}{z^4-1}\right)^2$ 保角地将扇形域 $|z| < 1, 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$ 映射成上半平面 $\mathrm{Im}\,\omega > 0$

注意：映射 $\omega = -\left(\frac{z^4-1}{z^4+1}\right)^2$ 也保角地将扇形域 $|z| < 1, 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$ 映射成上半平面 $\mathrm{Im}\,\omega > 0$。这一映射的第二步映射为 $\omega_2 = i\frac{1-\omega_1}{1+\omega_1}$。

五、已知 $F\left\{\frac{1}{\beta^2+t^2}\right\} = \frac{\pi}{\beta} e^{-\beta|\omega|}$ ($\mathrm{Re}\,\beta > 0$),用位移性质求 $f(t) = \frac{\sin bt}{\beta^2+t^2}$ 的 Fourier 变换。

解：由 Fourier 变换的线性性质和位移性质，我们有

$$F\{f(t)\} = F\left\{\frac{\sin bt}{\beta^2+t^2}\right\} = F\left\{\frac{1}{\beta^2+t^2}\frac{e^{ibt}-e^{-ibt}}{2i}\right\}$$

$$= \frac{1}{2i}\left[F\left\{\frac{1}{\beta^2+t^2}e^{ibt}\right\} - F\left\{\frac{1}{\beta^2+t^2}e^{-ibt}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{\pi}{\beta}e^{-\beta|\omega-b|} - \frac{\pi}{\beta}e^{-\beta|\omega+b|}\right) \quad (\mathrm{Re}\,\beta > 0)$$

$$= \frac{\pi}{2\beta i}\left(e^{-\beta|\omega-b|} - e^{-\beta|\omega+b|}\right) = \frac{\pi i}{2\beta}\left(e^{-\beta|\omega+b|} - e^{-\beta|\omega-b|}\right) \quad (\mathrm{Re}\,\beta > 0)$$

六、用 Laplace 变换法解以下常微分方程初值问题：

$$\begin{cases} y''-2y'+y=2-t \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$$

解：设 $L\{y(t)\}=Y(s)$，对方程两边取 Laplace 变换，并考虑到初始条件，得

$$L\{y''-2y'+y\}=L\{2-t\}$$

$$s^2Y(s)-2sY(s)+Y(s)=\frac{2}{s}-\frac{1}{s^2}$$

即
$$Y(s)=\frac{2s-1}{s^2(s-1)^2}=\frac{1}{(s-1)^2}-\frac{1}{s^2}$$

取 Laplace 逆变换得

$$x(t)=te^t-t=t\left(e^t-1\right)$$

模拟题 3 参考答案

一、填空题

6. 0

7. $2+\frac{11}{3}i$

8. $|z+i|\le\frac{1}{2}$

9. —

10. $3+2i$

二、将函数 $f(z)=\frac{z-1}{(z+2)z^2}$ 在指定的圆环域内展开成洛郎级数：

1. 解 当 $0<|z|<1$ 时 $f(z)=\frac{1}{z+2}\frac{z-1}{z^2}=\frac{1}{1+\frac{z}{2}}\bullet\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}\right)$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{n-1}}{2^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{n-2}}{2^{n+1}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^{n+1}}\left(z^{n-1}-z^{n-2}\right)$$

当 $|z+2|>2$ 时 $\left|\frac{2}{z+2}\right|<1$，于是

$$f(z)=\frac{z-1}{(z+2)z^2}=\frac{1}{z+2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}\right)$$

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{z+2-2}=\frac{1}{z+2}\frac{1}{1-\frac{2}{z+2}}=\frac{1}{z+2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z+2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(z+2)^{n+1}}$$

$$-\frac{1}{z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-2^n(n+1)}{(z+2)^{n+2}},$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(z+2)^{n+2}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{(z+2)^{n+3}}$$

三、计算题

2．　解　$\frac{\partial v}{\partial x}=2y+1,\frac{\partial v}{\partial y}=2x$，　所以　$f'(z)=2x+i(2y+1)=2z+i$

所以　$f(z)=z^2+iz+C$

由　$f(0)=0$　知　　$C=0$

所以　$f(z)=z^2+iz$．

2．解　$f(z)=\frac{e^{iz}}{z^2+1}$ 有一级极点　$z=i,z=-i$　且都在　$|z|=2$　内

$$\operatorname{Res}[f(z),i]=\left.\frac{e^{iz}}{z+i}\right|_{z=i}=\frac{e^{-1}}{2i}$$

$$\operatorname{Res}[f(z),-i]=\left.\frac{e^{iz}}{z-i}\right|_{z=-i}=\frac{e}{-2i}$$

所以　$\oint_C\frac{e^{iz}}{z^2+1}dz=2\pi i\left(\frac{e^{-1}}{2i}+\frac{e}{2i}\right)=\pi\left(e^{-1}-e\right)$

3．解　$\sin\frac{1}{z}=\frac{1}{z}-\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\frac{1}{5!}\frac{1}{z^5}-\cdots$

$$z^2\sin\frac{1}{z}=z-\frac{1}{3!}\frac{1}{z}+\frac{1}{5!}\frac{1}{z^3}-\cdots$$

$$\operatorname{Res}\left[z^2\sin\frac{1}{z},0\right]=C_{-1}=-\frac{1}{3!}=-\frac{1}{6}$$

$$\oint_C z^2\sin\frac{1}{z}dz=2\pi i\left(-\frac{1}{6}\right)=-\frac{\pi i}{3}$$

4．解　$f(z)=\frac{e^{iz}}{z^2+4z+5}$　在上半平面只有一个一级极点　$z=-2+i$

且　$\operatorname{Res}[f(z),-2+i]=\left.\frac{e^{2z}}{z-(-2-i)}\right|_{z=-2+i}=\frac{e^{-1-2i}}{2i}$

所以 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+4x+5}dx = \pi e^{-1-2i}$

所以 $I = \pi e^{-1}\cos 2$.

四、求一个保角映射 $\omega = f(z)$，将 z 平面中上半单位圆内部区域 $|z|<1, \operatorname{Im} z>0$ 映射成单位圆外域 $|\omega|>1$.

解　复合 $\omega = \frac{z_2+i}{z_2-i} = \frac{z_1^2+i}{z_1^2-i} = \frac{\left(-\frac{z+1}{z-1}\right)^2+i}{\left(-\frac{z+1}{z-1}\right)-i}$

$$= \frac{(z+1)^2+(z-1)^2 i}{(z+1)^2-(z-1)^2 i}$$

五、$\mathcal{F}[(1-t)f(2t)] = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-iwt}(1-t)dt = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-iwt}dt - \int_0^{\frac{1}{2}} te^{-iwt}dt$

$$= \frac{1}{-iw}\left(e^{-\frac{iw}{2}}-1\right) - \int_0^{\frac{1}{2}} t d\left(\frac{e^{-iwt}}{-iw}\right) = \frac{-1}{iw}\left(e^{-\frac{iw}{2}}-1\right) + \left.\frac{te^{-iwt}}{iw}\right|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-iwt}}{iw}dt$$

$$= \frac{1}{iw}\left(1-e^{-\frac{iw}{2}}\right) + \frac{e^{-\frac{iw}{2}}}{2iw} + \left.\frac{e^{-iwt}}{(iw)^2}\right|_0^{\frac{1}{2}}$$

六、用 Laplace 变换法解以下常微分方程初值问题：

$$\begin{cases} y''+4y=5e^{-t} \\ y(0)=0,\ y'(0)=1 \end{cases}$$

解：令 $Y(s)=L[y(t)]$，则 $s^2Y(s)-1+4Y(s)=\frac{5}{s+1}$

$$Y(s)=\frac{s+6}{(s^2+4)(s+1)}=\frac{-s+2}{s^2+4}+\frac{1}{s+1}$$

$$y(t)=L^{-1}\left[Y(s)\right]=-\cos 2t+\sin 2t+e^{-t}$$

$$= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=-\cos 2t+\sin 2t+e^{-t}$$