线性代数

习题解

Wind & Moon Press

Canton, 2008.6

线性代数

魏福义，黄燕苹主编–北京：中国农业出版社，2007. 8 (ISBN 978-7-109-11836-2)

这是题文
这是题解
这是注释

习题一 ………………………………… 1

习题二 ………………………………… 13

习题三 ………………………………… 22

习题四 ………………………………… 31

习题五 ………………………………… (缺)

习题六 ………………………………… 47

习题一

1.1 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&-2&4\\0&5&1\end{bmatrix}$

求 $3\boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}$.

$$3\boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{A}=3\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&-2&4\\0&5&1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}$$
$$=3\begin{bmatrix}0&5&8\\0&-5&6\\2&9&0\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}0&15&24\\0&-15&18\\6&27&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&2&2\\2&2&-2\\2&-2&2\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-2&13&22\\-2&-17&20\\4&29&-2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&-2&4\\0&5&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&5&8\\0&-5&6\\2&9&0\end{bmatrix}$$

1.2 计算下列乘积

(1) $\begin{bmatrix}4&3&1\\1&-2&3\\5&7&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\2\\1\end{bmatrix}$　　(2) $\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&2\end{bmatrix}$　　(4) $\begin{bmatrix}2&1&4&0\\1&-1&3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&1\\0&-1&2\\1&-3&1\\4&0&-2\end{bmatrix}$　　(5) $\begin{bmatrix}x_1&x_2&x_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$

(1) $\begin{bmatrix}35\\6\\49\end{bmatrix}$ (2) 10 (3) $\begin{bmatrix}-2&4\\-1&2\\-3&6\end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix}6&-7&8\\20&-5&-6\end{bmatrix}$

(5) $$\begin{bmatrix}x_1&x_2&x_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1&x_2&x_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3\end{bmatrix}$$
$$=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$$

1.3 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$, 问下列各式是否成立?

(1) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$;　　(2) $(\boldsymbol{AB})^2=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2$

(3) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$;　　(4) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$

(1) $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\neq\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}0&-1\\-&0\end{bmatrix}$

(2) $(\boldsymbol{AB})^2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\neq\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$

(3) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\neq\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2=\begin{bmatrix}0&2\\2&0\end{bmatrix}$

(4) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\begin{bmatrix}2&-2\\-2&2\end{bmatrix}\neq\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$

1.4 讨论下列命题是否正确:

(1)若 $\boldsymbol{A}^2=0$，则 $\boldsymbol{A}=0$;

(2)若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}=0$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$;

(3)若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 且 $\boldsymbol{A}\neq0$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

(1)不对. 反例: $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$,但 $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

(2)不对. 反例: 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}\neq0$ 且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E}$, 但 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$.

(3)不对. 反例: 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}$, 则有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 且 $\boldsymbol{A}\neq0$, 但 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ ..

1.5 1.5 计算:

(1) $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^n$,　(2) $\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}^n$,　(3) $\begin{pmatrix}1&&&\\&2&&\\&&3&\\&&&4\end{pmatrix}^n$.

(1)

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix},$$
$$\cdots$$
$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&n-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}.$$

(2)

$$\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2&2\lambda&1\\0&\lambda^2&2\lambda\\0&0&\lambda^2\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda^2&2\lambda&1\\0&\lambda^2&2\lambda\\0&0&\lambda^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^3&3\lambda^2&3\lambda\\0&\lambda^3&3\lambda^2\\0&0&\lambda^3\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda^3&3\lambda^2&3\lambda\\0&\lambda^3&3\lambda^2\\0&0&\lambda^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^4&4\lambda^3&6\lambda\\0&\lambda^4&4\lambda^2\\0&0&\lambda^4\end{pmatrix},$$

$\cdots$

$$\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda^{n-1}&(n-1)\lambda^{n-2}&\frac{(n-1)(n-2)}{2}\lambda^{n-3}\\0&\lambda^{n-1}&(n-1)\lambda^{n-2}\\0&0&\lambda^{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^n&n\lambda^{n-1}&\frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\0&\lambda^n&(n-1)\lambda^{n-1}\\0&0&\lambda^n\end{pmatrix}.$$

(3)

$$\begin{pmatrix}1&&&\\&2&&\\&&3&\\&&&4\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&&&\\&2&&\\&&3&\\&&&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&\\&2&&\\&&3&\\&&&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1^2&&&\\&2^2&&\\&&3^2&\\&&&4^2\end{pmatrix},$$

$\cdots$

$$\begin{pmatrix}1&&&\\&2&&\\&&3&\\&&&4\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1&&&\\&2&&\\&&3&\\&&&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1^{n-1}&&&\\&2^{n-1}&&\\&&3^{n-1}&\\&&&4^{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1^n&&&\\&2^n&&\\&&3^n&\\&&&4^n\end{pmatrix}.$$

1.6 1.6 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足矩阵方程 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=0$，证明 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 都可逆，并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 及 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}$.

由 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=0$ 得 $\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$.

由 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=0$ 也可得 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=-4\boldsymbol{E}$ 或 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\left[-\frac{1}{4}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\right]=\boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 可逆，且

$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}=-\frac{1}{4}(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})$.

1.7 1.7 利用初等行变换求下列矩阵的逆矩阵:

(1) $\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}1&0&2\\2&-1&3\\4&1&8\end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix}1&-2&2\\2&-3&6\\1&1&7\end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix}1&2&-4\\-1&-1&5\\2&7&-3\end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&1&4&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&9\end{bmatrix}$ (6) $\begin{bmatrix}3&5&0&1\\1&2&0&0\\1&0&2&0\\1&2&0&2\end{bmatrix}$

(1) $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\2&1&-2&0&1&0\\2&-2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&-3&-6&-2&1&0\\0&-3&3&0&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{-\frac{1}{3}r_2\\ r_1-2r_2}]{r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&0\\0&1&2&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&0\\0&0&9&2&-2&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_2-2r_3\\ r_1+2r_3}]{\frac{1}{9}r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{9}&\frac{2}{9}&\frac{2}{9}\\0&1&0&\frac{2}{9}&\frac{1}{9}&-\frac{2}{9}\\0&0&1&\frac{2}{9}&-\frac{2}{9}&\frac{1}{9}\end{array}\right),$

$$\therefore\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{9}&\frac{2}{9}&\frac{2}{9}\\\frac{2}{9}&\frac{1}{9}&-\frac{2}{9}\\\frac{2}{9}&-\frac{2}{9}&\frac{1}{9}\end{bmatrix}$$

(2) $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\2&-1&3&0&1&0\\4&1&8&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&-1&-1&-2&1&0\\0&1&0&-4&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{-\frac{1}{3}r_2\\ r_1-2r_2}]{r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&0&-1&-6&1&1\\0&1&0&-4&0&1\end{array}\right)$

$\xrightarrow[-r_2]{r_1+2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-11&2&2\\0&0&1&6&-1&-1\\0&1&0&-4&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-11&2&2\\0&1&0&-4&0&1\\0&0&1&6&-1&-1\end{array}\right),$

$$\therefore\begin{pmatrix}1&0&2\\2&-1&3\\4&1&8\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-11&2&2\\-4&0&1\\6&-1&-1\end{pmatrix}$$

(3) $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&2&1&0&0\\2&-3&6&0&1&0\\1&1&7&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-2r_1]{r_3-r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&2&1&0&0\\0&1&2&-2&1&0\\0&3&5&-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-3r_2]{r_1+2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&6&-3&2&0\\0&1&2&-2&1&0\\0&0&-1&5&-3&1\end{array}\right)$

$\xrightarrow[r_1+6r_3]{r_2+2r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&27&-16&6\\0&1&0&8&-5&2\\0&0&-1&5&-3&1\end{array}\right)\xrightarrow{-r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&27&-16&6\\0&1&0&8&-5&2\\0&0&1&-5&3&-1\end{array}\right),$

$$\therefore\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&-3&6\\1&1&7\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}27&-16&6\\8&-5&2\\-5&3&-1\end{pmatrix}$$

(4) $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-4&1&0&0\\-1&-1&5&0&1&0\\2&7&-3&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-4&1&0&0\\0&1&1&1&1&0\\0&3&5&-2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-3r_2]{r_1-2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-6&-1&-2&0\\0&1&1&1&1&0\\0&0&2&-5&-3&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-r_3]{\substack{r_1+3r_3\\ \frac{1}{2}r_3}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-16&-11&3\\0&1&0&\frac{7}{2}&\frac{5}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{5}{2}&-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right)$

$$\begin{pmatrix}1&2&-4\\-1&-1&5\\2&7&-3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-16&-11&3\\\frac{7}{2}&\frac{5}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{5}{2}&-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

(5) $$\left(\begin{array}{cccc|cccc}2&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&4&0&0&1&0&0\\0&0&-1&0&0&0&1&0\\0&0&0&9&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2+4r_3}\left(\begin{array}{cccc|cccc}2&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&4&0\\0&0&-1&0&0&0&1&0\\0&0&0&9&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{-r_3\\ \frac{1}{9}r_4}]{\frac{1}{2}r_1}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&\frac{1}{2}&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&4&0\\0&0&1&0&0&0&-1&0\\0&0&0&1&0&0&0&\frac{1}{9}\end{array}\right)$$

$$\therefore\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&1&4&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&9\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0&0\\0&1&4&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&\frac{1}{9}\end{pmatrix}$$

(6) $$\left(\begin{array}{cccc|cccc}3&5&0&1&1&0&0&0\\1&2&0&0&0&1&0&0\\1&0&2&0&0&0&1&0\\1&2&0&2&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&2&0&0&0&1&0\\1&2&0&0&0&1&0&0\\3&5&0&1&1&0&0&0\\1&2&0&2&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_4-r_2\\ r_2-r_1}]{r_3-3r_4}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&2&0&0&0&1&0\\0&2&-2&0&0&1&-1&0\\0&-1&0&-5&1&0&0&-3\\0&0&0&2&0&-1&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_1}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&2&0&0&0&1&0\\0&-1&0&-5&1&0&0&-3\\0&2&-2&0&0&1&-1&0\\0&0&0&2&0&-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+2r_2}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&2&0&0&0&1&0\\0&-1&0&-5&1&0&0&-3\\0&0&-2&-10&2&1&-1&-6\\0&0&0&2&0&-1&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_2+\frac{5}{2}r_4\\ r_1+r_3}]{r_3+5r_4}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&2&-4&0&-1\\0&-1&0&0&1&-\frac{5}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&0&-2&0&2&-4&-1&-1\\0&0&0&2&0&-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{-\frac{1}{2}r_3\\ \frac{1}{2}r_4}]{-r_2}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&2&-4&0&-1\\0&1&0&0&-1&\frac{5}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&0&-1&2&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&1&0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

$$\therefore\begin{pmatrix}3&5&0&1\\1&2&0&0\\1&0&2&0\\1&2&0&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&-4&0&-1\\-1&\frac{5}{2}&0&\frac{1}{2}\\-1&2&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

1.8

1.9

1.10 1.10 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix},\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$，求 $\boldsymbol{B}$.

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}\Rightarrow(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\Rightarrow\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}.$$

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E},\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&2&3&1&0&0\\1&-1&0&0&1&0\\-1&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3+r_2]{r_1-2r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&4&3&1&-2&0\\1&-1&0&0&1&0\\0&1&1&0&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&0&1&0\\0&1&1&0&1&1\\0&4&3&1&-2&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-4r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&0&1&0\\0&1&1&0&1&1\\0&0&-1&1&-6&-4\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_1+r_2\\ -r_3}]{r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-4&-3\\0&1&0&1&-5&-3\\0&0&1&-1&6&4\end{array}\right)$$

求得$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix}$,于是$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-8&-6\\2&-9&-6\\-2&12&9\end{pmatrix}$.

1.11 **1.11** 设 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{bmatrix}$, (1) 证明 $\boldsymbol{\Lambda}^k=\begin{bmatrix}\lambda_1^k&0\\0&\lambda_2^k\end{bmatrix}$; (2) 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$，证明 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P\Lambda}^k\boldsymbol{P}^{-1}$

(1)

$$\boldsymbol{\Lambda}^2=\begin{bmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1^2&0\\0&\lambda_2^2\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Lambda}^3=\boldsymbol{\Lambda}^2\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1^2&0\\0&\lambda_2^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1^3&0\\0&\lambda_2^3\end{bmatrix},$$

$$\cdots$$

$$\boldsymbol{\Lambda}^k=\boldsymbol{\Lambda}^{k-1}\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1^{k-1}&0\\0&\lambda_2^{k-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1^k&0\\0&\lambda_2^k\end{bmatrix}$$

(2)

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$$

$$\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1})(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1})=\boldsymbol{P\Lambda}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P})\boldsymbol{\Lambda P}^{-1}=\boldsymbol{P\Lambda E\Lambda P}^{-1}=\boldsymbol{P\Lambda}^2\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{P\Lambda}^2\boldsymbol{P}^{-1})(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1})=\boldsymbol{P\Lambda}^2(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P})\boldsymbol{\Lambda P}^{-1}=\boldsymbol{P\Lambda}^2\boldsymbol{E\Lambda P}^{-1}=\boldsymbol{P\Lambda}^3\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$\cdots$$

$$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{P\Lambda}^{k-1}\boldsymbol{P}^{-1})(\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1})=\boldsymbol{P\Lambda}^{k-1}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P})\boldsymbol{\Lambda P}^{-1}=\boldsymbol{P\Lambda}^{k-1}\boldsymbol{E\Lambda P}^{-1}=\boldsymbol{P\Lambda}^k\boldsymbol{P}^{-1}$$

1.12 **1.12** 计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix}1&0&2&0\\-1&4&3&6\\0&2&-5&3\\3&1&1&0\end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix}x&y&x+y\\y&x+y&x\\x+y&x&y\end{vmatrix}$; (3) $\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&1\\1&1&-1&1\\1&1&1&-1\end{vmatrix}$; (5) $\begin{vmatrix}2&-1&3&2\\3&-3&3&2\\3&-1&-1&2\\3&-1&3&-1\end{vmatrix}$; (6) $\begin{vmatrix}-ab&ac&ae\\bd&-cd&de\\bf&cf&-ef\end{vmatrix}$

(1) $\begin{vmatrix}1&0&2&0\\-1&4&3&6\\0&2&-5&3\\3&1&1&0\end{vmatrix}\overset{r_2+r_1}{\underset{r_4-3r_1}{=}}\begin{vmatrix}1&0&2&0\\0&4&5&6\\0&2&-5&3\\0&1&-5&0\end{vmatrix}\overset{r_2+r_3}{\underset{r_3-r_4}{=}}\begin{vmatrix}1&0&2&0\\0&6&0&9\\0&1&0&3\\0&1&-5&0\end{vmatrix}\overset{\substack{r_2\leftrightarrow r_3\\r_3\leftrightarrow r_4}}{\underset{\frac{1}{3}r_4}{=}}+3\begin{vmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&3\\0&1&-5&0\\0&2&0&3\end{vmatrix}\overset{\substack{r_3-r_2\\r_4-2r_2}}{\underset{\frac{1}{3}r_4}{=}}+3\begin{vmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&3\\0&0&-5&-3\\0&0&0&-3\end{vmatrix}=3\cdot1\cdot1\cdot(-5)\cdot(-3)=45$

(2) $\begin{vmatrix}x&y&x+y\\y&x+y&x\\x+y&x&y\end{vmatrix}\overset{r_1+r_2+r_3}{=}\begin{vmatrix}2(x+y)&2(x+y)&2(x+y)\\y&x+y&x\\x+y&x&y\end{vmatrix}=2(x+y)\begin{vmatrix}1&1&1\\y&x+y&x\\x+y&x&y\end{vmatrix}$

$\overset{r_2-yr_1}{\underset{r_3-(x+y)r_1}{=}}2(x+y)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&x&x-y\\0&-y&-x\end{vmatrix}=2(x+y)\cdot1\cdot\begin{vmatrix}x&x-y\\-y&-x\end{vmatrix}=2(x+y)\cdot1\cdot(-x^2+xy-y^2)=-2(x^3-y^3)$.

(3) $\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}\overset{r_1+r_2+r_3}{=}\begin{vmatrix}a+2&a+2&a+2\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}\overset{r_2-r_1}{\underset{r_3-r_1}{=}}(a+2)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&a-1&0\\0&0&a-1\end{vmatrix}=(a+2)(a-1)^2$.

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1 \\ r_4-r_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-2)^3 = -8.$

(5) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_i-r_1 \\ i=2,3,4}}{=} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} \overset{c_1+\frac{1}{2}c_2+\frac{1}{4}c_3+\frac{1}{3}c_4}{=} \begin{vmatrix} \frac{35}{12} & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$

$= \frac{35}{12} \cdot (-2) \cdot (-4) \cdot (-3) = -70.$

(6) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix} = adf \begin{vmatrix} -b & c & e \\ b & -c & e \\ b & c & -e \end{vmatrix} = adf \cdot bce \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{r_1+r_2+r_3}{=} abcdef \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$\overset{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1}}{=} abcdef \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = abcdef \cdot [1 \cdot (-2) \cdot (-2)] = 4abcdef.$

1.13 1.13* 证明下列等式

(1) $\begin{vmatrix} a^2 & 2a & 1 \\ ab & a+b & 1 \\ b^2 & 2b & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$ (2) $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$

(1) $\begin{vmatrix} a^2 & 2a & 1 \\ ab & a+b & 1 \\ b^2 & 2b & 1 \end{vmatrix} \overset{r_1-2r_2+r_3}{=} \begin{vmatrix} a^2+b^2-2ab & 0 & 0 \\ ab & a+b & 1 \\ b^2 & 2b & 1 \end{vmatrix} \overset{r_1-2r_2+r_3}{=} \begin{vmatrix} (a-b)^2 & 0 & 0 \\ (a-b)b & a-b & 0 \\ b^2 & 2b & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$

(2)

$\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1+b_1x & b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$= \left(\begin{vmatrix} a_1 & a_1x & c_1 \\ a_2 & a_2x & c_2 \\ a_3 & a_3x & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x & a_1x & c_1 \\ b_2x & a_2x & c_2 \\ b_3x & a_3x & c_3 \end{vmatrix} \right) + \left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x & b_1 & c_1 \\ b_2x & b_2 & c_2 \\ b_3x & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right)$

$= \left(x\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} + x^2 \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} \right) + \left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right)$

$= \left(0 - x^2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right) + \left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + 0 \right) = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$

证法二
$$\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} \overset{c_1-c_2}{=} (1-x)\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2-b_2 & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3-b_3 & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} \overset{c_2+c_1}{=} (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1 & c_1 \\ a_2-b_2 & a_2 & c_2 \\ a_3-b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$
$$\overset{c_1-c_2}{=} (1-x^2)\begin{vmatrix} -b_1 & a_1 & c_1 \\ -b_2 & a_2 & c_2 \\ -b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} \overset{c_1-c_2}{=} (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(3)
$$\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} \overset{r_1+r_2+\cdots r_n}{=} \begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & x+(n-1)a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = \left[x+(n-1)a\right]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} =$$
$$\underset{i=2,\cdots,n}{\overset{r_i-ar_1}{=}} \left[x+(n-1)a\right]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} = \left[x+(n-1)a\right](x-a)^{n-1}.$$

1.14 **1.14** 用克拉默法则解下列方程组:

(1) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=5 \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=-2 \\ 2x_1-3x_2-x_3-5x_4=-2 \\ 3x_1+x_2+2x_3+11x_4=0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 5x_1+6x_2=1 \\ x_1+5x_2+6x_3=0 \\ x_2+5x_3+6x_4=0 \\ x_3+5x_4+6x_5=0 \\ x_4+5x_5=1 \end{cases}$

(1) 计算得 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix}=-142\neq 0,$

$$D_1=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix}=-142, D_2=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & -5 \\ 3 & 0 & 2 & 11 \end{vmatrix}=-284, D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 0 & 11 \end{vmatrix}=-426, D_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=142$$

因为系数行列式 $D\neq 0$，所以方程组有唯一解 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=1, x_2=\dfrac{D_2}{D}=2, x_3=\dfrac{D_3}{D}=3, x_4=\dfrac{D_4}{D}=-1$.

(2) 计算得 $D=\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}=665\neq 0, D_1=\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}=1507, \quad D_2=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}=-1145,$

$$D_3=\begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}=703, \quad D_4=\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}=-395, \quad D_5=\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=212$$

因为系数行列式 $D\neq 0$，所以方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{1507}{665}, x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{1145}{665}, x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{703}{665}, x_4=\frac{D_4}{D}=-\frac{395}{665}, x_5=\frac{D_5}{D}=-\frac{212}{665}.$$

1.15 **1.15** 求下列方阵的逆阵

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$; (3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$; (4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

(1)套用公式 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}(ad-bc\neq 0)$，得 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{1\cdot 5-2\cdot 2}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

(2)套用上述公式，得 $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \dfrac{1}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

(3) $$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-3r_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & 6 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3-7r_2]{r_1+r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 16 & -7 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2+r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 13 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 16 & -7 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-r_3]{-\frac{1}{2}r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -16 & 7 & -1 \end{array}\right]$$，得 $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -\frac{13}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ -16 & 7 & -1 \end{bmatrix}.$$

(4) $$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3-2r_1]{\substack{r_4-r_2 \\ r_2-r_1}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_4-\frac{1}{3}r_3]{r_3-\frac{1}{2}r_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & -\frac{5}{24} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

得 $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{5}{24} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 12 & 0 & 0 \\ -12 & -4 & 8 & 0 \\ 3 & -5 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

1.16 1.16. 解下列矩阵方程

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\boldsymbol{X}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\boldsymbol{X}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(1) $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

(2) $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ -2/3 & 1 & -2/3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -8/3 & 5 & -2/3 \end{bmatrix}$

(3) $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}1&4\\-1&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}3&1\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\-1&1\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2&-4\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1\\0&-1\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\1/4&0\end{bmatrix}$

1.17 **1.17** 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为其伴随矩阵，证明：

(1)若 $|\boldsymbol{A}|=0$，则 $|\boldsymbol{A}^*|=0$

(2) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$..

(1)设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}$. 如果 $\boldsymbol{A}$ 的第一行元素全为零，则 $A_{ij}=0\left(i=2,\cdots n,j=1,\cdots,n\right)$，

于是 $\left|A^*\right|=0$. 假设 $\boldsymbol{A}$ 的第一行元素不全为零，例如 $a_{11}\neq0$，作如下行初等变换，得

$$\left|\boldsymbol{A}^*\right|=\begin{vmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{vmatrix}\overset{a_{11}r_1+a_{12}r_2+\cdots+a_{1n}r_n}{=}\frac{1}{a_{11}}\begin{vmatrix}|A|&0&\cdots&0\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{vmatrix}.$$

现 $|A|=0$，因此 $\left|\boldsymbol{A}^*\right|=0$.

(2)一般地，$\left|\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}\right|=\left\|\boldsymbol{A}\right|\boldsymbol{E}\right|=\left|\boldsymbol{A}\right|^n\left|\boldsymbol{E}\right|=\left|\boldsymbol{A}\right|^n$，但 $\left|\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}\right|=\left|\boldsymbol{A}^*\right|\left|\boldsymbol{A}\right|$. 于是 $\left|\boldsymbol{A}^*\right|\left|\boldsymbol{A}\right|=\left|\boldsymbol{A}\right|^n$. 从而，若 $\left|\boldsymbol{A}\right|\neq0$，立刻得到 $\left|\boldsymbol{A}^*\right|=\left|\boldsymbol{A}\right|^{n-1}$. 而若

$\left|A\right|=0$，由(1)知 $\left|\boldsymbol{A}^*\right|=\left|\boldsymbol{A}\right|^{n-1}$ 仍成立.

1.18 **1.18** 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&2&1&0&0\\3&1&0&0&0\\0&0&0&-2&0\\0&0&0&0&-2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&2&0&0&0\\0&0&3&0&0\\0&0&0&-1&3\\0&0&0&4&2\end{bmatrix}$

利用分块矩阵的乘法，计算 $\boldsymbol{AB}$.

$$\boldsymbol{AB}=\left[\begin{array}{ccc|cc}1&0&1&0&0\\0&2&1&0&0\\3&1&0&0&0\\\hline0&0&0&-2&0\\0&0&0&0&-2\end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&0&0\\0&2&0&0&0\\0&0&3&0&0\\\hline0&0&0&-1&3\\0&0&0&4&2\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&-2\boldsymbol{E}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&-2\boldsymbol{B}_2\end{bmatrix}$$

$$=\left[\begin{array}{ccc|cc}1&0&3&0&0\\0&4&3&0&0\\3&2&0&0&0\\\hline0&0&0&2&-6\\0&0&0&-8&-4\end{array}\right]=\begin{bmatrix}1&0&3&0&0\\0&4&3&0&0\\3&2&0&0&0\\0&0&0&2&-6\\0&0&0&-8&-4\end{bmatrix}$$

1.19 **1.19** 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA},\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}$，证明：$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\left(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}\right)\boldsymbol{A}$.

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}=\left(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}\right)\boldsymbol{A}.$$

1.20 **1.20** 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，证明：$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$.

$$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{BA}|..$$

1.21 **1.21** 设3阶方阵 A 的伴随矩阵为 A^* 且 $|A|=\frac{1}{2}$，求 $\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|$.

$$\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|=\left|3^{-1}A^{-1}-2A^*\right|=\left|\left(3^{-1}E-2A^*A\right)A^{-1}\right|=\left|\left(3^{-1}E-2|A|E\right)A^{-1}\right|$$
$$=\left|\left(3^{-1}-2|A|\right)EA^{-1}\right|=\left|\left(3^{-1}-2\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot A^{-1}\right|=\left|\left(-\frac{2}{3}\right)A^{-1}\right|=\left(-\frac{2}{3}\right)^3\left|A^{-1}\right|=\left(-\frac{2}{3}\right)^3\frac{1}{1/2}=-\frac{16}{27}$$

或 $$\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|=\left|\frac{1}{3|A|}A^*-2A^*\right|=\left|\left(\frac{2}{3}-2\right)A^*\right|=\left(-\frac{4}{3}\right)^3|A|^2=\left(-\frac{4}{3}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2==-\frac{16}{27}.$$

1.22 **1.22*** 设 A 为 n 阶方阵，$A^k=0, k\in\mathbb{N}$，求证 $E-A$ 可逆，并写出逆矩阵的表达式.

$$\because (E-A)\left(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}\right)$$
$$=\left(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}\right)-\left(A+A^2+A^3+\cdots+A^k\right)$$
$$=E-A^k=E-0=E,$$

$\therefore E-A$ 可逆，且 $(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$.

1.23 **1.23** 设分块阵 $X=\begin{bmatrix}O & A\\ B & O\end{bmatrix}$,其中 A,B 可逆,求 X^{-1}.

$$X^{-1}=\begin{bmatrix}O & A^{-1}\\ B^{-1} & O\end{bmatrix}.\text{验算}\begin{bmatrix}0 & A\\ B & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & B^{-1}\\ A^{-1} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}AA^{-1} & O\\ O & BB^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E & O\\ O & E\end{bmatrix}=E\text{ .OK}$$

1.24 **1.24** 设 $A=\begin{bmatrix}0 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}\\ a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}(a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n)$,求 A^{-1}.

$$A-E=\left(\begin{array}{cccccc|cccccc}0 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccccc|cccccc}a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccccc|cccccc}1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/a_n\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1/a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1/a_3 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/a_{n-1} & 0\end{array}\right);A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/a_n\\ 1/a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1/a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1/a_3 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/a_{n-1} & 0\end{pmatrix}$$

1.25 **1.25** 设 A,B 均为 n 阶方阵且 $|A|=2,|B|=-3$,求 $\left|2(A^*)B^{-1}\right|$.

$$\left|2A^*B^{-1}\right|=2^n\left|A^*\right|\left|B^{-1}\right|=2^n|A|^{n-1}|B|^{-1}=2^n\cdot 2^{n-1}\cdot\frac{1}{-3}=-\frac{2^{2n-1}}{3}$$

注: $AA^*=|A|E\Rightarrow|A||A^*|=|A|^n|E|\Rightarrow|A^*|=|A|^{n-1}$.

1.26 **1.26** 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非奇异(可逆)矩阵,其伴随阵为 $\boldsymbol{A}^*$,求 $(\boldsymbol{A}^*)^*$

$$(\boldsymbol{A}^*)^* = |\boldsymbol{A}^*|(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = |\boldsymbol{A}^*|\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|^{n-1}\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$$

或 $(\boldsymbol{A}^*)^* = \left(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\right)^* = \left||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\right|\left(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = \left(|\boldsymbol{A}|^n|\boldsymbol{A}|^{-1}\right)\left(|\boldsymbol{A}|^{-1}\boldsymbol{A}\right) = \ldots$

1.27 **1.27**.

1.28 **1.28**..

习题二

2.1 **2.1** 讨论下列向量组的线性相关性

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,-1,0)$， $\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,3)$， $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,3)$

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,3,4)$， $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,1)$

(3) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,2)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(3,-1,0,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(2,-1,3,2)$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(1,0,-3,-1)$

(4) $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,0)$， $\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,3,2)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,3,4)$， $\boldsymbol{\alpha}_4=(-1,5,6)$

(1) $$\left(\boldsymbol{\alpha}_1^T,\boldsymbol{\alpha}_2^T,\boldsymbol{\alpha}_3^T\right)=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&1&0\\0&3&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_1+2r_2}\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

可见 $R\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}=2<m=3$，故向量组线性相关.

(2) $$\left(\boldsymbol{\alpha}_1^T,\boldsymbol{\alpha}_2^T\right)=\begin{pmatrix}-1&2\\3&0\\4&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_1+r_2\\r_3-4r_2}]{\frac{1}{3}r_2}\begin{pmatrix}0&2\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_3}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

可见 $R\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\}=2=m=2$，故向量组线性无关.

(3) $$\left(\boldsymbol{\alpha}_1^T,\boldsymbol{\alpha}_2^T,\boldsymbol{\alpha}_3^T,\boldsymbol{\alpha}_4^T\right)=\begin{pmatrix}1&3&2&1\\2&-1&-1&0\\-1&0&3&-3\\2&1&2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_4-r_2\\r_2+2r_3}]{r_1+r_3}\begin{pmatrix}0&3&5&-2\\0&-1&5&-6\\-1&0&3&-3\\0&2&3&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-1&0&3&-3\\0&-1&5&-6\\0&3&5&-2\\0&2&3&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+2r_2]{r_3+3r_2}\begin{pmatrix}-1&0&3&-3\\0&-1&5&-6\\0&0&20&-20\\0&0&13&-13\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-1&0&3&-3\\0&-1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

可见 $R\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}=3<m=4$，故向量组线性相关.

(4) $$\left(\boldsymbol{\alpha}_1^T,\boldsymbol{\alpha}_2^T,\boldsymbol{\alpha}_3^T,\boldsymbol{\alpha}_4^T\right)=\begin{pmatrix}2&-1&0&-1\\1&3&3&5\\0&2&4&6\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-\frac{1}{2}r_1}\begin{pmatrix}2&-1&0&-1\\0&\frac{7}{2}&3&\frac{11}{2}\\0&2&4&6\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_2]{\frac{2}{7}r_2}\begin{pmatrix}2&-1&0&-1\\0&1&\frac{6}{7}&\frac{11}{7}\\0&0&\frac{16}{7}&\frac{20}{7}\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2-\frac{6}{7}r_3\\r_1+r_2}]{\frac{7}{16}r_2}\begin{pmatrix}2&0&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{5}{4}\end{pmatrix}$$

可见 $R\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\}=3<m=4$，故向量组线性相关.

解法二 现有 4 个 3 维，$4>3$，所以给出的向量组线性相关.

P45 推论 2.1 任意 $m(m>n)$ 个 n 维向量线性相关.

2.2 **2.2** 求下列矩阵的秩

(1) $\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\3&2&-1&2\\1&-1&3&3\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}2&-1&3&0\\1&2&1&1\\2&-1&1&3\\2&1&4&0\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}2&-1&0&3\\1&2&-1&2\\3&1&-1&5\end{pmatrix}$

(1) $\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\3&2&-1&2\\1&-1&3&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&2&-1&0\\0&-4&2&2\\0&-3&4&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3+3r_2\\r_1-2r_2}]{-\frac{1}{4}r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&\frac{5}{2}&\frac{3}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+\frac{1}{2}r_2]{\frac{2}{5}r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-\frac{1}{5}\\0&0&1&\frac{3}{5}\end{pmatrix}$

可见秩 $R=3$.

(2) $\begin{pmatrix}2&-1&3&0\\1&2&1&1\\2&-1&1&3\\2&1&4&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-\frac{1}{2}r_1\\r_3=r_1}}\begin{pmatrix}2&-1&3&0\\0&\frac{5}{2}&-\frac{1}{2}&1\\0&0&-2&3\\0&2&1&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&-1&3&0\\0&2&1&0\\0&5&-1&1\\0&0&-2&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+\frac{4}{7}r_3]{r_3-\frac{5}{2}r_2}\begin{pmatrix}2&-1&3&0\\0&2&1&0\\0&0&-\frac{7}{2}&2\\0&0&0&\frac{29}{7}\end{pmatrix}$

可见秩 $R=4$.

$\begin{pmatrix}2&-1&3&0\\1&2&1&1\\2&-1&1&3\\2&1&4&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1-2r_2]{\substack{r_3-r_1\\r_4-r_1}}\begin{pmatrix}0&-5&1&-2\\1&2&1&1\\0&0&-2&3\\0&2&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+\frac{5}{2}r_1}\begin{pmatrix}0&0&\frac{7}{2}&-2\\1&2&1&1\\0&0&-2&3\\0&2&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+\frac{7}{4}r_3}\begin{pmatrix}0&0&0&\frac{13}{4}\\1&2&1&1\\0&0&-2&3\\0&2&1&0\end{pmatrix}$

或

$\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&2&1&0\\0&0&-2&3\\0&0&0&\frac{13}{4}\end{pmatrix}, R=4$

(3) $\begin{pmatrix}2&-1&0&3\\1&2&-1&2\\3&1&-1&5\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-\frac{1}{2}r_1]{r_3-3r_2}\begin{pmatrix}2&-1&0&3\\0&\frac{5}{2}&-1&\frac{1}{2}\\0&-5&2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_2]{2r_2}\begin{pmatrix}2&-1&0&3\\0&5&-2&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}, R=2$

2.3 2.3 求解下列齐次线性方程组

(1) $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3+2x_4=0\\x_1-x_2+2x_3-x_4=0\\2x_1+x_2+x_3+x_4=0\end{cases}$; (2) $\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=0\\3x_1-3x_2+x_3=0;\\x_1+2x_2-3x_3=0\end{cases}$ (3) $\begin{cases}x_1-2x_2-3x_3+4x_4=0\\3x_1-6x_2-9x_3+12x_4=0;\\2x_1-4x_2-6x_3+8x_4=0\end{cases}$

(1) 对方程组的系数矩阵作行初等变换

$$\begin{pmatrix}1&2&-1&2\\1&-1&2&-1\\2&1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&2&-1&2\\0&-3&3&-3\\0&-3&3&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{-\frac{1}{3}r_3\\r_1-2r_2}]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

得简化行阶梯形(Reduced row echelon form, RREF). 对应的同解方程组为 $\begin{cases}x_1+x_3\quad=0\\x_2-x_3+x_4=0\end{cases}$,

方程组的解为 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-k_1\\k_1-k_2\\k_1\\k_2\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\quad\left(k_1,k_2\in\mathbb{R}\right)$.

(2) 对方程组的系数矩阵作行初等变换

$$\begin{pmatrix}2&1&1\\3&-3&1\\1&2&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-\frac{1}{2}r_1]{r_2-\frac{3}{2}r_1}\begin{pmatrix}2&1&1\\0&-\frac{9}{2}&-\frac{1}{2}\\0&\frac{3}{2}&-\frac{7}{2}\end{pmatrix}\xrightarrow[2r_3]{2r_2}\begin{pmatrix}2&1&1\\0&-9&-1\\0&3&-7\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+\frac{1}{3}r_2}\begin{pmatrix}2&1&1\\0&-9&-1\\0&0&-\frac{22}{3}\end{pmatrix},R=3=n，方程组有唯一零解\ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

(3) 对方程组的系数矩阵作行初等变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&-3&4\\3&-6&-9&12\\2&-4&-6&8\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&-2&-3&4\\0&0&0&0\\2&0&0&0\end{pmatrix},得\ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}2k_1+3k_2-4k_3\\k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}3\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}-4\\0\\0\\1\end{pmatrix}\quad (k_1,k_2,k_3\in\mathbb{R})$$

2.4 2.4 求一个齐次线性方程组使他的基础解系为

$$\alpha_1=(1,-1,2,0)^T,\ \alpha_2=(0,2,-2,3)^T$$

由题意，齐次线性方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\2\\-2\\3\end{pmatrix}\quad (k_1,k_2\in\mathbb{R})，或\begin{cases}x_1=k_1\\x_2=-k_1+2k_2\\x_3=2k_1-2k_2\\x_4=3k_2\end{cases}.$$

从中消去 k_1,k_2，得 $\begin{cases}x_1+x_2-\frac{2}{3}x_4=0\\2x_1-x_3-\frac{2}{3}x_4=0\end{cases}$ 即为所求.

解法二：设所求的齐次线性方程组为

$$\begin{cases}x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=0\\ \quad\ \ x_2+b_3x_3+b_4x_4=0\end{cases}$$

将 $\alpha_1=(1,-1,2,0)^T,\alpha_2=(0,2,-2,3)^T$ 分别代入方程组，得

$$\begin{cases}1-a_2+2a_3=0\\2a_2-2a_3+3a_4=0\end{cases}\ \cdots\cdots(1),\quad \begin{cases}-1+2b_3=0\\2-2b_3+3b_4=0\end{cases}\ \cdots\cdots(2)$$

解方程组(1)，得其中一个解 $a_2=-1$，$a_3=-1$，$a_4=0$. 解方程组(2)，得其中一个解 $b_3=1/2$，$b_4=-1/3$. 从而得一个满足要求的方程组 $\begin{cases}x_1-x_2-x_3=0\\x_2+\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{3}x_4=0\end{cases}$

2.5 2.5 求下列非齐次线性方程组的通解

(1) $\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3-x_4=1\\-x_1+2x_2-x_3+2x_4=2\\x_1+x_2+x_3+x_4=3\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=1\\2x_1+3x_2+x_3=-1\\3x_1+x_2+2x_3=2\end{cases}$ (3) $\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3+x_4=2\\2x_1-2x_2+3x_3-3x_4=-1\\4x_1+x_2+2x_3-2x_4=2\end{cases}$

(1) 对方程组的增广矩阵作行初等变换，将之化为简化行阶梯形

$$\left(\begin{array}{cccc|c}2&-1&2&-1&1\\-1&2&-1&2&2\\1&1&1&1&3\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-2r_3]{r_2+r_3}\left(\begin{array}{cccc|c}0&-3&0&-3&-5\\0&3&0&3&5\\1&1&1&1&3\end{array}\right)\xrightarrow[r_3+r_2]{r_3\leftrightarrow r_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&3\\0&3&0&3&5\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-r_2]{\frac{1}{3}r_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&0&\frac{4}{3}\\0&1&0&1&\frac{5}{3}\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

立刻得到方程组的解 $\boldsymbol{x}=k_1\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\\frac{5}{3}\\0\\0\end{pmatrix}\quad(k_1,k_2\in\mathbb{R})$

(2) 对方程组的增广矩阵作行初等变换，将之化为简化行阶梯形

$$\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&3&1\\2&3&1&-1\\3&1&2&2\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&3&1\\0&-1&-5&-3\\0&-5&-7&-1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3+5r_2]{-r_2,\ r_1-2r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-7&-5\\0&1&5&3\\0&0&18&14\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-5r_3,\ r_1+7r_3]{\frac{1}{18}r_3}\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&\frac{4}{9}\\0&1&0&-\frac{8}{9}\\0&0&1&\frac{7}{9}\end{array}\right),\ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\frac{4}{9}\\-\frac{8}{9}\\\frac{7}{9}\end{pmatrix}$$

立刻得到方程组的解 $\boldsymbol{x}=k_1\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\\frac{5}{3}\\0\\0\end{pmatrix}\quad(k_1,k_2\in\mathbb{R})$

(3) 对方程组的增广矩阵作行初等变换

$$\left(\begin{array}{cccc:c}2&3&-1&1&2\\2&-2&3&-3&-1\\4&1&2&-2&2\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{cccc:c}2&3&-1&1&2\\0&-5&4&-4&-3\\0&-5&4&-4&-2\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-r_2}\left(\begin{array}{cccc:c}2&3&-1&1&2\\0&-5&4&-4&-3\\0&0&0&-0&1\end{array}\right)$$

因为 $R(\overline{A})\neq R(A)$，所以方程组无解.

2.6 2.6 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性相关.试证 α_4 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关 $\Rightarrow\alpha_1,\alpha_2$ 线性无关.

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性相关 $\Rightarrow\alpha_4$ 可由 α_1,α_2 线性表示.

从而 α_4 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

证法二 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性相关 $\Rightarrow\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关.

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关 $\Rightarrow\alpha_4$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

注意：“$\because\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\therefore$ 存在全为 0 的 k_1,k_2,k_3，使得 $k_1\alpha+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$.”这个说法是有问题的，因为不管是否相关,这些 k_1,k_2,k_3 总是存在的!

2.7 2.7 设线性方程组 $\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0\\x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=\lambda\\x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=-\lambda^2\end{cases}$

当 λ 等于何值时, (1)方程组有唯一解; (2)无解; (3)有无穷多解. 并求此时方程组的通解.

$$|A|=\begin{vmatrix}1+\lambda&1&1\\1&1+\lambda&1\\1&1&1+\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3+\lambda&1&1\\3+\lambda&1+\lambda&1\\3+\lambda&1&1+\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3+\lambda&1&1\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(3+\lambda).$$

(1) $\lambda\neq0,-3$ 时方程组有唯一解.

(2) $\lambda=-3$ 时，$\overline{A}=\begin{pmatrix}-2&1&1&0\\1&-2&1&-3\\1&1&-2&-9\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+2r_2}\begin{pmatrix}0&-3&3&-6\\1&-2&1&-3\\0&3&-3&-6\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_1}\begin{pmatrix}0&-3&3&-6\\1&-2&1&-3\\0&0&0&-12\end{pmatrix}$. 无解

(2) $\lambda=0$ 时，$\bar{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&0\\1&1&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, R(\bar{A})=R(A)=1<3$，有无穷多解.

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&0\\1&1&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, R(\bar{A})=R(A)=1<3$$

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k_1-k_2\\k_1\\k_2\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\quad(k_1,k_2\in\mathbb{R})$$

2.8 2.8 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(x,-1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,0)$

(1)当 x 为何值时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

(2)当 x 为何值时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(3)当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关时，将 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 表示为 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合.

$$\left|\alpha_1'\ \alpha_2'\ \alpha_3'\right|=\begin{vmatrix}x&0&1\\-1&3&2\\1&3&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x&0&1\\-1-2x&3&0\\1&3&0\end{vmatrix}=-6(1+x)$$

(1)当 $x=-1$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关；

(2)当 $x\neq-1$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(3)现 $x=-1$. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可表示为 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合：$\boldsymbol{\alpha}_1=x_1\boldsymbol{\alpha}_2+x_2\boldsymbol{\alpha}_3$，即 $\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$. 则有线性方程组

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T & \boldsymbol{\alpha}_2^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},\text{或}\begin{pmatrix}0&1\\3&2\\3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{cc|c}0&1&-1\\3&2&-1\\3&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}3&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{array}\right)，\text{得 } x_1=\frac{1}{3},x_2=-1. \text{ 于是 } \boldsymbol{\alpha}_1=\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_2-x_2\boldsymbol{\alpha}_3$$

2.9 2.9.

2.10 2.10.设线性方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots\dots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots\dots+a_{2n}x_n=0\\\dots\dots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots\dots+a_{mn}x_n=0\end{cases}$ 的解都是 $b_1x_1+b_2x_2+\dots\dots+b_nx_n=0$ 的解.试证 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\dots,b_n)$ 是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_1&=(a_{11}\quad a_{12}\quad\dots\quad a_{1n})\\\boldsymbol{\alpha}_2&=(a_{21}\quad a_{22}\quad\dots\quad a_{2n})\\&\dots\dots\quad\dots\dots\\\boldsymbol{\alpha}_m&=(a_{m1}\quad a_{m2}\quad\dots\quad a_{mn})\end{aligned}$$

的线性组合.

方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$与$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots\cdots+a_{mn}x_n=0 \\ b_1x_1+b_2x_2+\cdots\cdots+b_nx_n=0 \end{cases}$是同解方程组，它们的基础解系相同，从而它们的系数矩阵的秩相同，即向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$和向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$有相同的秩：$R\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\\ \boldsymbol{\beta}\end{pmatrix}=r$.

设$\xi_1,\xi_2\cdots,\xi_r$是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$的一个极大无关组，则$\xi_1,\xi_2\cdots,\xi_r,\boldsymbol{\beta}$是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$中的$r+1$个向量，因而是线性相关的. 所以$\boldsymbol{\beta}$可由$\xi_1,\xi_2\cdots,\xi_r$线性表示，从而$\boldsymbol{\beta}$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示.

定理 2.1 若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关，而向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$线性相关. 则向量$\boldsymbol{\beta}$可以由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示.

2.11 2.11 证明方程组$\begin{cases} x_1-x_2=a_1 \\ x_2-x_3=a_2 \\ x_3-x_4=a_3 \\ x_4-x_5=a_4 \\ x_5-x_1=a_5 \end{cases}$有解的充要条件是$\sum_{i=1}^{5}a_i=0$.

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_5 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum_{i=1}^{5}a_i \end{array}\right)$$，方程组有解$\Leftrightarrow R(\overline{\boldsymbol{A}})=R(\boldsymbol{A})=4\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{5}a_i=0$.

2.12 2.12 填空题

(1) 设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,x,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-1,2),\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,2)$，当$x=$ $-\dfrac{1}{2}$ 时$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关.

(2) 当$x=$ -1 时，向量$(x,1,0)$能由下列向量组线性表示.

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,-1)$$

(3) 已知向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,-1,3,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(3,-1,0,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(x,0,-3,1)$$

的秩等于 2，则$x=$ 1.

(4) 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & x \end{pmatrix}$，当$x=$ 2 时，$R(A)=3$.

(5) 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的解，若$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r$也是$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的一个解，则$k_1+k_2+\cdots+k_r=$ 1.

(6) 设$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,0,-1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0)^T$是齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=0$的一个基础解系，则$\boldsymbol{A}=$ $(2\ \ -1\ \ 4)$.

(1) $\left(\boldsymbol{\alpha}_1^T,\boldsymbol{\alpha}_2^T,\boldsymbol{\alpha}_3^T\right)=\begin{pmatrix}1&2&0\\x&-1&1\\1&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-xr_1}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1-2x&1\\0&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-r_3]{\frac{1}{2}r_3}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1-2x&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,

当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时, $R\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}=2<n=3$, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

(2)设有 x_1,x_2 使得 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2=(x,1,0)$，即 $\left(\boldsymbol{\alpha}_1^T,\boldsymbol{\alpha}_2^T\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\1\\0\end{pmatrix}$，则该方程组的增广矩阵

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c}1&2&x\\-1&0&1\\0&-1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}-1&0&1\\0&-1&0\\0&0&x+1\end{array}\right)$$ 的秩 $R(\overline{A})=R(\boldsymbol{A})=2$．于是 $x=-1$.

(3) $\left(\boldsymbol{\alpha}_1^T,\boldsymbol{\alpha}_2^T,\boldsymbol{\alpha}_3^T\right)=\begin{pmatrix}2&3&x\\-1&-1&0\\3&0&-3\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+\frac{1}{2}r_1]{r_3+3r_2}\begin{pmatrix}2&3&x\\0&\frac{1}{2}&\frac{x}{2}\\0&-3&-3\\0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&3&x\\0&0&x-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，当 $R\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}=2$ 时, $x=1$.

(4) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\2&-1&2&1\\1&2&0&2\\2&-1&3&x\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{\substack{r_4-r_2\\r_2-2r_1}}\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&-5&4&-1\\0&0&1&1\\0&0&1&x-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&-5&4&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&x-2\end{pmatrix}$，当 $x=2$ 时, $R(A)=3$

(5) $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{A}\left(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r\right)=k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_r=k_1\boldsymbol{b}_1+k_2\boldsymbol{b}+\cdots+k_r\boldsymbol{b}=\left(k_1+k_2+\cdots+k_r\right)\boldsymbol{b}$

给出的是非齐次方程组，$\boldsymbol{b}\neq 0$，所以 $k_1+k_2+\cdots+k_r=1$

(6) $m\times n$ 线性方程租的基础解系含 $n-r$ 个解向量(r 是系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩). 现 $n=3,n-r=2$，于是 $r=1$，这说明方程组有一个有效方程．$\boldsymbol{A}$ 可以是一个行矩阵，设为 $\boldsymbol{A}=(a,b,c)$．因为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ 是方程组的解，所以 $\begin{cases}2a-c=0\\a+2b=0\end{cases}$．解出 a,b,c 即知

$\boldsymbol{A}=(2\ \ -1\ \ 4)$.

注意：本小题答案不是唯一的.

2.13 2.13 选择题

(1)设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则下列向量组线性相关的是__都不可选__.

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$ (B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ (D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$

(2)在齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=0$ 中，若 $R(\boldsymbol{A})<n$，则下列结论正确的是(A).

(A)当 $m=n$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的 m 个行向量线性相关.

(B)当 $m<n$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的 m 个行向量线性无关.

(C)当 $m>n$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的 m 个行向量线性无关.

(D)当 $n=m+1$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的 m 个行向量线性相关.

(3)设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，则下列结论错误的是(D).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关. (B) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可以表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性组合.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关.(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

(4)若非齐次线性方程组 $A_{m\times n}X=b$ 有解，$\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_n$ 是 $A_{m\times n}$ 的 n 个列向量，下列结论正确的是(A).

(A) $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_n,b$ 线性相关． (B) $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_n$ 线性无关．

(C) $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_n$ 线性相关． (D) $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_n,b$ 线性无关．

(5)已知 β_1,β_2 是非齐次线性方程组 $AX=b$ 的两个不同的解，α_1,α_2 是对应的齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系，k_1,k_2 为任意常数，则方程组 $AX=b$ 的通解是(B).

(A) $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$ (B) $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1-\alpha_2)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$

(C) $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1+\beta_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$ (D) $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$

(6)设 A 为 n 阶方阵，且 $R(A)=n-1,\alpha_1,\alpha_2$ 是 $AX=0$ 的两个不同的解向量，则 $AX=0$ 的通解为(C).

(A) $k\alpha_1$ (B) $k\alpha_2$ (C) $k(\alpha_1-\alpha_2)$ (D) $k(\alpha_1+\alpha_2)$

(1)没有一个可选.

(A)不是线性相关的，因为

$$k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+k_3(\alpha_1+\alpha_3)=(k_1+k_2+k_3)\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0\Rightarrow\begin{cases}k_1+k_2+k_3=0\\ k_2=0\\ k_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_1=0\\k_2=0\\k_3=0\end{cases}$$

(B)不是线性相关的，因为

$$k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+k_3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=(k_1+k_2+k_3)\alpha_1+(k_2+k_3)\alpha_2+k_3\alpha_3=0\Rightarrow\begin{cases}k_1+k_2+k_3=0\\ k_2+k_3=0\\ k_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_1=0\\k_2=0\\k_3=0\end{cases}$$

(C)不是线性相关的，因为

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=(k_1+k_3)\alpha_1+(k_2+k_3)\alpha_2+k_3\alpha_3=0\Rightarrow\begin{cases}k_1+\quad+k_3=0\\ k_2+k_3=0\\ k_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_1=0\\k_2=0\\k_3=0\end{cases}$$

(D)不是线性相关的，因为

$$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_1+\alpha_3)+k_3(\alpha_3-\alpha_1)=(k_1+k_2-k_3)\alpha_1+k_1\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0\Rightarrow\begin{cases}k_1+k_2-k_3=0\\ k_1=0\\ k_2+k_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_1=0\\k_2=0\\k_3=0\end{cases}$$

(2) 设 $A_{m\times n}x_{n\times1}=0_{m\times1}$，有 $R(A_{m\times n})<n,m=n$．于是 $R(A_{m\times n})<m$．故选 A 的 m 个行向量先行相关.

(3)由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关可知 α_1,α_2 线性无关．故(A)不可选.

由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性相关且 α_1,α_2 线性无关可知 α_4 可由 α_1,α_2 线性表示(**定理 2.1** 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，而向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 线性相关．则向量 β 可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示.) 故(B)不可选.

由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性相关可知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关．故(C)不可选.

上面确认了 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是线性相关，故选(D).

(4) 注意到 $A_{m\times n}x_{n\times1}=b_{m\times1}\Leftrightarrow x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\ldots+x_n\alpha_n=b$，可知(A)成立

(5) 由 α_1,α_2 是齐次方程组 $AX=0$ 的基础解系知 $AX=0$ 的基础解系一定含有两个线性无关的解向量(这两个向量一定是非零向量).

向量组 $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2$ 是线性无关的，可作成一基础解系．但 $\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$ 不是非齐次方程组 $AX=b$ 的特解，因为

$\boldsymbol{A}\left(\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_2\right)=\dfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\right)=0\neq\boldsymbol{b}$. 故不可选(A)

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关故可作成一基础解系. 且 $\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$ 是非齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解, 因为

$\boldsymbol{A}\left(\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_2\right)=\dfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\right)=\boldsymbol{b}$. 故选$\underline{(\mathrm{B})}$.

$\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$ 不是齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=0$ 的解, 因为 $\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2\right)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{b}\neq 0$. 故不可选(C).

不能保证 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2$, 故不选(D).

(6) 基础解系含有 $n-R(A)=n-(n-1)=1$ 个线性无关的解向量, 而任何一个单独的非零向量是线性无关的.

不能保证 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是非零向量, 故不选(A). 同理, 不选(B). $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 有可能是反方向的, 此时 $\boldsymbol{\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_2$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=0$. 故不选(D). 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是不同的解向量知 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2\neq 0$, 因此可作成一基础解系. 故选$\underline{(\mathrm{C})}$

习题三

3.1 **3.1** 求下列矩阵的特征值和特征向量

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; (3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; (5) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(1)解特征方程

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} \overset{r_2+r_1}{=} \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ \lambda-3 & \lambda-3 \end{vmatrix} \overset{r_1+r_1}{=} (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-1)=0,$$

得特征值 $\lambda_1=1, \lambda_2=3$.

对于特征值 $\lambda_1=1$，解齐次线性方程组 $(\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})x=0$. 其系数矩阵

$$\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可见特征向量为 $x=\begin{pmatrix} -k_1 \\ k_1 \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}(k_1 \neq 0)$.

对于特征值 $\lambda_2=3$，$\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,可见特征向量为 $x=\begin{pmatrix} k_2 \\ k_2 \end{pmatrix}=k_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}(k_2 \neq 0)$.

(2)解特征方程

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-5 & -6 & 3 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -1 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} \underset{r_1+3r_2}{\overset{r_3+r_2}{=}} \begin{vmatrix} \lambda-2 & 3\lambda-6 & 0 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 0 & \lambda-2 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-2)^2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_2-r_1+r_3}{=}(\lambda-2)^2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(\lambda-2)^3\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(\lambda-2)^3$$

得特征值 $\lambda=2,2,2$.

对于特征值 $\lambda=2,2,2$，解齐次线性方程组 $(\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})x=0$. 其系数矩阵

$$\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -3 & -6 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可见特征向量为 $x=\begin{pmatrix} 2k_1 \\ -k_1+k_2 \\ 2k_2 \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (k_1, k_2 不全为 0).

(3)解特征方程

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1&-1\\-1&\lambda-1&1&1\\-1&1&\lambda-1&1\\-1&1&1&\lambda-1\end{vmatrix}\overset{\substack{r_2+r_1\\r_3+r_1\\r_4-r_3}}{=}\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1&-1\\\lambda-2&\lambda-2&0&0\\\lambda-2&0&\lambda-2&0\\\lambda-2&0&0&\lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)^3\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1&-1\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{vmatrix}\overset{r_1+r_2+r_3+r_4}{=}(\lambda-2)^3\begin{vmatrix}\lambda+2&0&0&0\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{vmatrix}=(\lambda-2)^3(\lambda+2)$$

得特征值 $\lambda=-2,2,2,2$.

对于特征值 $\lambda=-2$, 解齐次线性方程组 $(\lambda E-A)x=0$. 其系数矩阵

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}-3&-1&-1&-1\\-1&-3&1&1\\-1&1&-3&1\\-1&1&1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+r_1]{\substack{r_2+r_1\\r_3+r_1}}\begin{pmatrix}-3&-1&-1&-1\\-4&-4&0&0\\-4&0&-4&0\\-4&0&0&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-3&-1&-1&-1\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2+r_3+r_4}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix},$$

可见特征向量为 $x=\begin{pmatrix}k_1\\-k_1\\-k_1\\-k_1\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}\quad(k_1\neq0)$.

对于特征值 $\lambda=2,2,2$, $\lambda E-A=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&1&1\\-1&1&1&1\\-1&1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

可见特征向量为 $x=\begin{pmatrix}k_2+k_3+k_4\\k_2\\k_3\\k_4\end{pmatrix}=k_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_4\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ (k_2,k_3,k_4 不全为 0).

(4) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\0&\lambda-1&0\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}\overset{r_3+r_1}{=}\begin{bmatrix}\lambda&0&-1\\0&\lambda-1&0\\\lambda-1&0&\lambda-1\end{bmatrix}=(\lambda-1)^2\begin{bmatrix}\lambda&0&-1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$

特征值 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$.

对于 $\lambda_1=-1$, $\lambda E-A=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&-2&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, 特征向量 $x=k_1\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}(k_1\neq0)$.

对于 $\lambda_2=\lambda_3=1$, $\lambda E-A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. 特征向量 $\boldsymbol{x}=k_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ (k_2,k_3 不全为 0).

(5) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-3&-1&-2\\0&\lambda+1&-1&-3\\0&0&\lambda-2&-5\\0&0&0&\lambda-2\end{vmatrix}\overset{r_3+r_1}{=}(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)^2$

特征值 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1,\lambda_3=\lambda_4=2$.

对于 $\lambda_1=-1$，$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&-3&-1&-2\\0&0&-1&-3\\0&0&-3&-5\\0&0&0&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&3&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，特征向量 $x=k_1\begin{pmatrix}-3\\2\\0\\0\end{pmatrix}(k_1\neq0)$.

对于 $\lambda_2=1$，$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-3&-1&-2\\0&2&-1&-3\\0&0&-1&-5\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$. 特征向量 $\boldsymbol{x}=k_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}(k_2\neq0)$.

对于 $\lambda_3=\lambda_4=2$，$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-3&-1&-2\\0&3&-1&-3\\0&0&0&-5\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-2&0\\0&3&-1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$. 特征向量 $\boldsymbol{x}=k_3\begin{pmatrix}6\\1\\3\\0\end{pmatrix}(k_3\neq0)$.

3.2 3.2 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}7&4&-1\\4&7&-1\\-4&-4&x\end{bmatrix}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=3,\lambda_3=12$，求 x 的值，并求其特征向量.

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=tr(A),\quad 3+3+12=7+7+x,\quad x=4$$

对 $\lambda_1=\lambda_2=3$，$\lambda E-A=\begin{pmatrix}4&4&-1\\4&4&-1\\-4&-4&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}4&4&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$x=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\4k_1+4k_2\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}$($k_1, k_2$ 不全为 0).

注:基础解系不是唯一的.

对 $\lambda_3=12$，$\lambda E-A=\begin{pmatrix}5&-4&1\\-4&5&1\\4&4&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}k_3\\k_3\\-k_3\end{pmatrix}=k_3\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\quad(k_3\neq0)$.

3.3 3.3 已知 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^5-3\boldsymbol{A}^4+2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$，试求 $\boldsymbol{B}$ 的特征值及 $|\boldsymbol{B}|$.

$$|\lambda A-E|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1\\-1&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda+3=(\lambda-1)(\lambda-3)=0$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda=1,3$.

$B=\varphi(A)=A^5-3A^4+2A-E$ 的特征值 $\varphi(\lambda)=\lambda^5-3\lambda^4+2\lambda-1:\varphi(1)=-1,\varphi(3)=-5.$ 故 $|B|=(-1)\cdot5=-5$.

3.4 3.4 已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,4,\cdots,2n$，试求 $|\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}|$.

设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 $f(\lambda)=\lambda-3$ 是 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$ 的特征值.

$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$ 的特征值有 $f(2)=-1,f(4)=1,\cdots,f(2n)=2n-3$. 于是 $|\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}|=(-1)\cdot1\cdot\cdots\cdot(2n-3)$

3.5 3.5 试证:若 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=0$，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是 1 或 2.

设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 $f(\lambda)=\lambda^2-3\lambda+2$ 是 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值. 现 $f(\boldsymbol{A})=0$，而零矩阵的特征值都是 0. 于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 必须满足 $f(\lambda)=\lambda^2-3\lambda+2=(\lambda-1)(\lambda-2)=0$，即 $\lambda=1$ 或 $\lambda=2$.

3.6 3.6 设 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，试证 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是 1 或 -1.

$$\varphi(A)=A^2-E=0 \text{ 的特征值满足 } \varphi(\lambda)=\lambda^2-1=0\text{. 于是 } \lambda=\pm1.$$

3.7 3.7 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 对应于 λ_1,λ_2 的特征向量，$\lambda_1\neq\lambda_2$，试证 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 不可能是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

用反证法. 假如 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 不可能是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，则有 λ 使得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\lambda(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$. 但 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 对应于 λ_1,λ_2 的特征向量，

有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2$. 从而 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2$

定理 3.2 推论 1: 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有互不相同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$.则其对应的特征向量 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 线性无关.,

于是有 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2=\lambda(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$ 或 $(\lambda_1-\lambda)\boldsymbol{\alpha}_1+(\lambda_2-\lambda)\boldsymbol{\alpha}_2=0$. 但 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是对应于不同特征值的特征向量，因而是线性无关的，故 $\lambda_1-\lambda=\lambda_2-\lambda=0$ 或 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$；这是不可能的，因为 $\lambda_1\neq\lambda_2$. 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 不可能是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

3.8 3.8 判断下列矩阵是否相似

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3&1&0\\0&3&1\\0&0&3\end{bmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&3\end{bmatrix}$

(1)显然 $\boldsymbol{B}$ 的特征值是 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=3$.

由 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$ 知 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量为 $x=k\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}(k\neq0)$. $\boldsymbol{B}$ 只有一个线性无关的特征向量,因此 $\boldsymbol{B}$ 不可能与对角阵 $\boldsymbol{A}$ 相似.

P73 定理 3.6 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 n 阶对角阵相似的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

(2) 显然 $\boldsymbol{B}$ 有 3 个相异的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$，因此 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 相似.

P74 定理 3.6 推论 3.2 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个相异的特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 与对角阵相似.

3.9 3.9 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{bmatrix}$ 且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似，试求: (1) x 和 y 的值. (2)可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

P73 性质 3.2 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则(1) $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$, (2) $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}=\mathrm{tr}\,\boldsymbol{B}$.

相似矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 有相同的行列式和迹: $\begin{vmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{vmatrix}$, $-2+x+1=-1+2+y$.

都得到 $x=y+2$. 相似矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda+2)((\lambda-x)(\lambda-1)-2),\quad |\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-y).$$

比较得 $\lambda+2=\lambda-y$ 或 $y=-2$. 而 $x=y+2=0$.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-2,\lambda_2=-1,\lambda_3=2$.

对于 $\lambda_1=-2$, $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&0\\-2&-2&-2\\-3&-1&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，得特征向量 $k_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}(k_1\neq0)$.

对于 $\lambda_2=-1$, $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&-1&-2\\-3&-1&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}$，得特征向量 $k_2\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}(k_2\neq0)$.

对于 $\lambda_3=2$, $\lambda E-A=\begin{bmatrix}4&0&0\\-2&2&-2\\-3&-1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$，得特征向量 $k_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}(k_3\neq 0)$.

令 $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$，则有 $P^{-1}AP=B$.

3.10 3.10 将下列矩阵对角化，并求 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$ (Λ 为对角阵)

(1) $A=\begin{bmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{bmatrix}$　　(2) $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&0\\2&1&2\end{bmatrix}$

(3) $A=\begin{bmatrix}3&-2&1\\0&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}$　　(4) $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$

(1) 解特征方程 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4&-6&0\\3&\lambda+5&0\\3&6&\lambda-1\end{vmatrix}\overset{r_2+r_1}{\underset{r_3+r_1}{=}}\begin{vmatrix}\lambda-4&-6&0\\\lambda-1&\lambda-1&0\\\lambda-1&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2\begin{vmatrix}\lambda-4&-6&0\\1&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$，得特征值

$\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=1$.

对于 $\lambda_1=-2$, $\lambda E-A=\begin{bmatrix}-6&-6&0\\3&3&0\\3&6&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$，得特征向量 $k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}(k_1\neq 0)$. 选 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_2=\lambda_3=1$, $\lambda E-A=\begin{bmatrix}-3&-6&0\\3&6&0\\3&6&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，得特征向量 $k_2\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ (k_2, k_3 不全为 0). 选 $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}-1&2&0\\1&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，则有 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$.

(2)解特征方程 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-3\\0&\lambda-1&0\\-2&-1&\lambda-2\end{vmatrix}\overset{r_1+2r_2}{\underset{r_3+r_2}{=}}(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-3\\0&1&0\\-2&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)[(\lambda-1)(\lambda-2)-6]=0$，得特征值

$\lambda_1=-1,\lambda_2=1,\lambda_3=4$.

对于 $\lambda_1=-1$, $\lambda E-A=\begin{bmatrix}-2&-2&-3\\0&-2&0\\-2&-1&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&0&3\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，得特征向量 $k_1\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}(k_1\neq 0)$. 选 $\alpha_1=\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_2=1$, $\lambda E-A=\begin{bmatrix}0&-2&-3\\0&0&0\\-2&-1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}4&0&-1\\0&2&3\\0&0&0\end{bmatrix}$，得特征向量 $k_2\begin{pmatrix}1\\-6\\4\end{pmatrix}(k_2\neq 0)$. 选 $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-6\\4\end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_3=4$, $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&-2&-3\\0&3&0\\-2&-1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$, 得特征向量 $k_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}(k_3\neq 0)$. 选 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}3&1&1\\0&-6&0\\-2&4&1\end{pmatrix}$, 则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&4\end{pmatrix}$.

3.11 3.11 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&2\\-3&5\end{bmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^{100}$.

$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{bmatrix}\lambda&-2\\3&\lambda-5\end{bmatrix}=\lambda^2-5\lambda+6=(\lambda-2)(\lambda-3)$, 得特征值 $\lambda_1=2,\lambda_2=3$.

对于 $\lambda_1=2$, $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-2\\3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$, 选 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_2=3$, $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-2\\3&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&-2\\0&0\end{pmatrix}$, 选 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$, 则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$. 于是 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$, 而

$$\boldsymbol{A}^{100}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^{100}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^{100}&0\\0&3^{100}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 2^{100}-2\cdot 3^{100}&-2\cdot 2^{100}+2\cdot 3^{100}\\3\cdot 2^{100}-3\cdot 3^{100}&-2\cdot 2^{100}+3\cdot 3^{100}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 2^{100}-2\cdot 3^{100}&2\cdot 3^{100}-2^{101}\\3\cdot 2^{100}-3^{101}&3^{101}-2^{101}\end{pmatrix}$$

3.12 3.12 试求一个正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$ (2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&2&4\\2&0&2\\4&2&3\end{bmatrix}$

(1)解特征方程 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1\\-1&\lambda-1&-1\\-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}\overset{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}{=}\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1\\-\lambda&\lambda&0\\-\lambda&0&\lambda\end{vmatrix}\overset{\substack{\frac{1}{\lambda}r_2\\\frac{1}{\lambda}r_3\\r_1+r_2+r_3}}{=}\lambda^2\begin{vmatrix}\lambda-3&0&0\\-1&1&0\\-1&0&1\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-3)$, 得特征值

$\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=3$.

对于 $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$, 得特征向量 $k_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ (k_1, k_2 不全为 0). 选

$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交化: $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\dfrac{[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_3=3$, $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$, 得特征向量 $k_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}(k_3\neq 0)$. 选 $\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

将 β_1,β_2,β_3 单位化: $\gamma_1=\frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\gamma_2=\frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix},\gamma_3=\frac{1}{\|\beta_3\|}\beta_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

令 $\boldsymbol{P}=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}$ 是正交的, 且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\Lambda=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 3\end{pmatrix}$.

3.13 *3.13 证明任何一个矩阵能唯一写成一个对称阵与一个反对称阵之和.

任给矩阵 $\boldsymbol{A}$, 有 $\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T)+\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^T)$, 其中 $\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T)$ 是对称矩阵:

$$\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T)\right)^T=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{A})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T),$$

而 $\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^T)$ 是反对称矩阵:

$$\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^T)\right)^T=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}^T-\boldsymbol{A})=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^T).$$

故 $\boldsymbol{A}$ 能唯一写成一个对称阵与一个反对称阵之和.

又假设 $\boldsymbol{A}$ 可写成 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$, 其中 $\boldsymbol{B}$ 是对称的, 而 $\boldsymbol{C}$ 是反对称的. 则

$$\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{B}^T+\boldsymbol{C}^T=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}.$$

于是

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T=2\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^T=2\boldsymbol{C},\ \text{或}\ \ \boldsymbol{B}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T),\quad \boldsymbol{C}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^T).$$

可见 $\boldsymbol{A}$ 写成一个对称阵与一个反对称阵之和的形式是唯一的..

3.14 3.14 建模题

3.15 3.15 建模题

3.16 3.16 填空题

(1) 设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=-1,\lambda_3=3$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵对应的行列式 $|\boldsymbol{A}^*|$ 为 <u>36</u>.

$$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}=(2\cdot(-1)\cdot 3)^2=36,\qquad \boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=-6\boldsymbol{A}^{-1}\ \text{的特征值为}\ -6\cdot\frac{1}{2}=-3,\ -6\cdot(-1)=6,\ -6\cdot\frac{1}{3}=-2$$

(2)设 0 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&a\end{bmatrix}$ 的特征值 , 则 $a=$ <u>1</u>.

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&a-1\end{vmatrix}=1\cdot 2\cdot(a-1)=0\Rightarrow a=1$$

(3)设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶方阵, $\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=2$ 为三个特征值, 对应特征向量为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, 令 $\boldsymbol{P}=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)$, 则

$P^{-1}A^*P=\begin{pmatrix}-2&&\\&2&\\&&-1\end{pmatrix}$.

$$P^{-1}A^*P=P^{-1}\left(|A|A^{-1}\right)P=|A|P^{-1}A^{-1}P=|A|\left(P^{-1}AP\right)^{-1}=|A|\Lambda^{-1}$$
$$=\lambda_1\lambda_2\lambda_3\begin{pmatrix}\lambda_1^{-1}&&\\&\lambda_2^{-1}&\\&&\lambda_3^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_2\lambda_3&&\\&\lambda_1\lambda_3&\\&&\lambda_1\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&&\\&2&\\&&-1\end{pmatrix}$$

(4)设 $A=\begin{bmatrix}a&2&1\\0&3&2\\2&1&-2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}b&0&1\\2&5&3\\1&1&0\end{bmatrix}$ 有相同的特征值，则 $a=$ $-\frac{7}{5}$, $b=$ $-\frac{27}{5}$.

$$|A|=\begin{vmatrix}a&2&1\\0&3&2\\2&1&-2\end{vmatrix}=2-8a=|B|=\begin{vmatrix}b&0&1\\2&5&3\\1&1&0\end{vmatrix}=-3-3b,\ \operatorname{tr}A=a+3-2=\operatorname{tr}B=b+5,\ \text{解得 } a=-\frac{7}{5}, b=-\frac{27}{5}$$

(5)*已知四阶方阵 A 相似于 B, A 的特征值为 $2,3,4,5$, E 为四阶单位矩阵，则 $|B-E|=$ 24 .

B 与 A 相似，因此有相同的特征值，从而 $B-E$ 为 $\lambda-1=1,2,3,4$. 于是 $|B-E|=1\cdot2\cdot3\cdot4=24$

3.17 3.17 选择题

(1)设 α_1,α_2 是 A 的对应于 λ_0 的两个不同特征向量，则如下为 A 的特征向量的有 (D).

(A) $k\alpha_1$ (B) $k\alpha_2$ (C) $\alpha_1+\alpha_2$ (D) $\alpha_1-\alpha_2$

$$A(\alpha_1-\alpha_2)=A\alpha_1-A\alpha_2=\lambda_0\alpha_1-\lambda_0\alpha_2=\lambda_0(\alpha_1-\alpha_2).$$

由于 α_1,α_2 是不同的，$\alpha_1-\alpha_2$ 不是零向量，故 $\alpha_1-\alpha_2$ 是 A 的特征向量，且是属于特征值 λ_0 的.故选 (D).

事实上，属于同一特征值的特征向量的非零线性组合仍是属于该特征值的特征向量. (A), (B), (C)中的向量有可能是零向量，故不选(A), (B), (C).

(2)已知三阶矩阵 A 的特征值为 $1,2,-1$，则矩阵 $B=(2A^*)^{-1}$ (其中 A^* 为 A 的伴随阵)的特征值为 (B).

(A) $-1,-2,1$ (B) $-\frac{1}{4},-\frac{1}{2},\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{4},-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}$ (D) $-\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2}$

注意到 $|A|=1\cdot2\cdot(-1)=-2$，得 $B=(2A^*)^{-1}=\left(2|A|A^{-1}\right)^{-1}=\frac{1}{2|A|}A$.

设 λ 是 A 的特征值，则 $\frac{1}{2|A|}\lambda=-\frac{1}{4}\lambda$ 是 B 的特征值. 可知，B 的特征值有 $-\frac{1}{4},-\frac{2}{4},-\frac{-1}{4}$ 或 $-\frac{1}{4},-\frac{1}{2},\frac{1}{4}$.

(3)已知 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为三阶方阵 A 的三个不同的特征值，对应的特征向量依次为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，令 $P=(-\alpha_1\ \ 2\alpha_2\ \ 3\alpha_3)$，则 $P^{-1}AP$ 等于 (B).

(A) $\begin{bmatrix}-\lambda_1&&\\&2\lambda_2&\\&&3\lambda_3\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & 2\lambda_2 & \\ & & 3\lambda_3 \end{bmatrix}$ (D) 不能确定.

$$P=(-\alpha_1\ \ 2\alpha_2\ \ 3\alpha_3)=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix},$$

其中 $Q=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}^{-1}(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)^{-1}A(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

P90 定理 3.6 推论 3.2 若 n 阶矩阵 A 有 n 个相异的特征值，则 A 与对角阵相似.

解法二 或者更简单地，由 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的相异性知 A 可对角化. 特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 分别属于 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，而向量 $-\alpha_1,2\alpha_2,3\alpha_3$ 同样是分别属于 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的特征向量，因此所得矩阵 $P=(-\alpha_1\ \ 2\alpha_2\ \ 3\alpha_3)$ 可作为相似对角变换的矩阵，即

$P^{-1}AP=\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$.

(4)如果下列哪一个成立，则 A 与 B 相似. (D)

(A) $|A|=|B|$ (B) $R(A)=R(B)$ (C) A 与 B 有相同的特征值. (D) A 与 B 有相同的特征值且 n 个特征值各不相同.

选(D). 这时候 A 和 B 都与同一个对角阵 $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ 相似，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 A 和 B 的共同特征值.

习题四

4.1 4.1 设 $\boldsymbol{\alpha}=[10,-8,6,-5]^T$, $\boldsymbol{\beta}=[2,2,0,-5]^T$ ，求 $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}],[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}],[3\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta},2\boldsymbol{\alpha}],\|\boldsymbol{\alpha}\|,\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\|$.

$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]=10\cdot10+(-8)\cdot(-8)+6\cdot6+(-5)\cdot(-5)=225$,

$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=10\cdot2+(-8)\cdot2+6\cdot0+(-5)\cdot(-5)=29$,

$[3\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta},2\boldsymbol{\alpha}]=6[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]-2[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}]=6[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]-2[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=6\cdot225-2\cdot29=1292$,

$\|\boldsymbol{\alpha}\|=\sqrt{[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]}=\sqrt{225}=15$ $\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\|=\|[8,-10,6,0]\|==\sqrt{8^2+(-10)^2+6^2+0^2}=10\sqrt{2}$

4.2 4.2 设有三点 $A(-1,2,1),B(0,3,1),C(0,2,2)$,求 $\angle BAC$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=(0,3,1)-(-1,2,1)=(1,1,0)\\ \overrightarrow{AC}&=(0,2,2)-(-1,2,1)=(1,0,1)\\ \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]&=1\cdot1+1\cdot0+0\cdot1=1\\ \|\overrightarrow{AB}\|&=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2},\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}\\ \angle BAC&=\arccos\frac{\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]}{\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\|}=\arccos\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

4.3 4.3 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角是 $120°$，模分别为 12 和 6，求 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的距离.

利用 p87 例 4.6 的结果，$\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的距离为

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\|&=\sqrt{\|\boldsymbol{\alpha}\|^2+\|\boldsymbol{\beta}\|^2-2\|\boldsymbol{\alpha}\|\cdot\|\boldsymbol{\beta}\|\cos\theta}\\ &=\sqrt{12^2+6^2-2\cdot12\cdot6\cdot\cos120^\circ}=\sqrt{252}\approx15.87\end{aligned}$$

4.4 4.4 作为平面几何定理(平行四边形的对角线与边长的关系)的推广，证明

$$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|^2+\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\|^2=2\left(\|\boldsymbol{\alpha}\|^2+\|\boldsymbol{\beta}\|^2\right).$$

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|^2+\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\|^2&=[\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}]+[\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}]\\ &=([\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]+[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]+[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}]+[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}])+([\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]-[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]-[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}]+[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}])\\ &=2([\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]+[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}])=2\left(\|\boldsymbol{\alpha}\|^2+\|\boldsymbol{\beta}\|^2\right)\end{aligned}$$

4.5 4.5 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,3,1)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(4,-1,0)^T$, 试用施密特正交化方法把这组向量正交规范化.

正交化:

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}-\frac{4}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\frac{5}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}-\frac{2}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}-\frac{-5}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

单位化: $\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}\boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\eta}_3=\frac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_3\|}\boldsymbol{\beta}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

4.6 4.6 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^T$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-2,1)^T$ 正交,试求一个非零向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$,使 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 两两正交.

设 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$. 因为 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 都正交: $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3]=0,[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=0$, 所以 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1-2x_2+x_3=0\end{cases}$.

由 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T\\\boldsymbol{\alpha}_1^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, 得 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k\\0\\-k\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$. 不妨取 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

4.7 4.7 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正交矩阵,证明 $\boldsymbol{AB}$ 也是正交矩阵.

$$(AB)(AB)^T=A(BB^T)A^T=AEA^T=AA^T=E$$

4.8 4.8 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=[5,3,1,1]^T$,$\boldsymbol{\alpha}_2=[-4,18,-2,4]^T$,欲使向量 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{k}\alpha_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 正交,求 k .

由 $[\alpha_1,\beta]=[\alpha_1,\alpha_2+k\alpha_1]=[\alpha_1,\alpha_2]+k[\alpha_1,\alpha_1]=0$,得 $k=-\dfrac{[\alpha_1,\alpha_2]}{[\alpha_1,\alpha_1]}=-\dfrac{36}{36}=-1$

4.9 4.9 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是正交向量组,试证 $\|\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_s\|^2=\|\boldsymbol{\alpha}_1\|^2+\cdots+\|\boldsymbol{\alpha}_s\|^2$.

先证 $s=2$ 的情形:

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2\|^2&=[\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1]+[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]+[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1]+[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2]\\&=\|\boldsymbol{\alpha}_1\|^2+0+0+\|\boldsymbol{\alpha}_2\|^2=\|\boldsymbol{\alpha}_1\|^2+\|\boldsymbol{\alpha}_2\|^2.\end{aligned},$$

假设对于 $s-1$ 个向量,公式成立,那么注意到 $\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_s$ 正交,有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_s\|^2&=\|(\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_{s-1})+\boldsymbol{\alpha}_s\|^2=\|\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_{s-1}\|^2+\|\boldsymbol{\alpha}_s\|^2\\&=(\|\boldsymbol{\alpha}_1\|^2+\cdots+\|\boldsymbol{\alpha}_{s-1}\|^2)+\|\boldsymbol{\alpha}_s\|^2=\|\boldsymbol{\alpha}_1\|^2+\cdots+\|\boldsymbol{\alpha}_{s-1}\|^2+\|\boldsymbol{\alpha}_s\|^2\end{aligned}.$$

公式得证.

4.10 4.10 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是正交向量组,且 $\|\boldsymbol{\alpha}_i\|=i$, $i=1,2,3,4$,求 $\|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4\|$;记 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]$,求 $|\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}|$.

利用 4.9 题的结论,得 $\|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4\|=\sqrt{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|^2+\|\boldsymbol{\alpha}_2\|^2+\|\boldsymbol{\alpha}_3\|^2+\|\boldsymbol{\alpha}_4\|^2}=\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}=\sqrt{30}$.

而 $$|A^TA|=\left|\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T\\\boldsymbol{\alpha}_2^T\\\boldsymbol{\alpha}_3^T\\\boldsymbol{\alpha}_4^T\end{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\right|=\left|\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_2&\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_3&\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_4\\\boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_2&\boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_3&\boldsymbol{\alpha}_2^T\boldsymbol{\alpha}_4\\\boldsymbol{\alpha}_3^T\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_3^T\boldsymbol{\alpha}_2&\boldsymbol{\alpha}_3^T\boldsymbol{\alpha}_3&\boldsymbol{\alpha}_3^T\boldsymbol{\alpha}_4\\\boldsymbol{\alpha}_4^T\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_4^T\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_4^T\boldsymbol{\alpha}_3&\boldsymbol{\alpha}_4^T\boldsymbol{\alpha}_4\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}1^2&0&0&0\\0&2^2&0&0\\0&0&3^2&0\\0&0&0&4^2\end{vmatrix}=576.$$

4.11 4.11 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 都是 n 维向量,其中 $\boldsymbol{\alpha}\neq0$,试问 k 为何值时,距离 $\|\boldsymbol{\beta}-k\boldsymbol{\alpha}\|$ 取最小值?

令 $f(k)=\|\boldsymbol{\beta}-k\boldsymbol{\alpha}\|^2$,则 $f(k)=[\boldsymbol{\beta}-k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}-k\boldsymbol{\alpha}]=\|\boldsymbol{\beta}\|^2-2k[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]+k^2\|\boldsymbol{\alpha}\|^2=\left(k\|\boldsymbol{\alpha}\|-\dfrac{[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}\right)^2+\|\boldsymbol{\beta}\|^2-\dfrac{[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]^2}{\|\boldsymbol{\alpha}\|^2}\geq\|\boldsymbol{\beta}\|^2-\dfrac{[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]^2}{\|\boldsymbol{\alpha}\|^2}$.

当 $k=\dfrac{[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]}{\|\boldsymbol{\alpha}\|^2}$ 时,$f(k)=\|\boldsymbol{\beta}-k\boldsymbol{\alpha}\|^2$ 取得最小值 $\|\boldsymbol{\beta}\|^2-\dfrac{[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]^2}{\|\boldsymbol{\alpha}\|^2}$,而距离 $\|\boldsymbol{\beta}-k\boldsymbol{\alpha}\|$ 取最小值 $\dfrac{\sqrt{\|\boldsymbol{\alpha}\|^2\|\boldsymbol{\beta}\|^2-[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]^2}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}$

4.12 4.12 设 $\boldsymbol{A}=\dfrac{1}{19}\begin{pmatrix}15&6&-10\\10&-15&6\\6&10&16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}$,

(1)验证线性变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ 是正交变换.

(2) $\boldsymbol{x}=[3,2,0]^T$,求 $\boldsymbol{y}$；设 $\boldsymbol{y}=[5,2,0]^T$，求 $\boldsymbol{x}$.

(1)因为下列各式成立

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]=\frac{1}{19^2}\left[15\times10+6\times(-15)+(-10)\times6\right]=0$$
$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3]=\frac{1}{19^2}\left[15\times6+6\times10+(-10)\times16\right]=0$$
$$[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=\frac{1}{19^2}\left[10\times6+(-15)\times10+6\times16\right]=0$$

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1]=\frac{1}{19^2}\left[15^2+6^2+(-10)^2\right]=1$$
$$[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2]=\frac{1}{19^2}\left(6^2+10^2+16^2\right)=1$$
$$[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3]=\frac{1}{19^2}\left(6^2+10^2+16^2\right)=1$$

即 A 的行向量组是标准正交向量组，所以 A 是正交矩阵.

或者验证 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\frac{1}{19}\begin{pmatrix}15&10&6\\6&-15&10\\-10&6&16\end{pmatrix}\frac{1}{19}\begin{pmatrix}15&6&-10\\10&-15&6\\6&10&16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{I}$

又或者验证 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T=\frac{1}{19}\begin{pmatrix}15&6&-10\\10&-15&6\\6&10&16\end{pmatrix}\frac{1}{19}\begin{pmatrix}15&10&6\\6&-15&10\\-10&6&16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{I}$.

因为 A 是正交矩阵，所以按定义 $y=Ax$ 是正交变换.

(2) $\boldsymbol{x}=(3,2,0)^T$,求 $\boldsymbol{y}$；设 $\boldsymbol{y}=(5,2,0)^T$，求 $\boldsymbol{x}$.

若 $\boldsymbol{x}=[3,2,0]^T$，则 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\frac{1}{19}\begin{pmatrix}15&6&-10\\10&-15&6\\6&10&16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$

若 $\boldsymbol{y}=[5,2,0]^T$，则 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}=\frac{1}{19}\begin{pmatrix}15&10&6\\6&-15&10\\-10&6&16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\\-2\end{pmatrix}$

4.13 4.13 如果 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 都正交，证明 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 的任意线性组合也正交.

$$[\boldsymbol{\beta},k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r]=k_1[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1]+k_2[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_2]+\cdots+k_r[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_r]=k_1\cdot0+k_2\cdot0+\cdots+k_r\cdot0=0.$$

4.14 4.14 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是一组 n 维线性无关向量，$\boldsymbol{\beta}$ 是一个 n 维向量，且 $[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_i]=0\ (i=1,2,\cdots n)$，证明 $\boldsymbol{\beta}=0$.

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关($n+1$ 个 n 维向量必然线性相关)，所以 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示:

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n.$$

但 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 都正交，于是利用上题结论 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的任意线性组合也正交，因此 $\boldsymbol{\beta}$ 与自己正交. 与自己正交的向量只有零向量.

4.15 4.15 若 $\boldsymbol{A}$ 是奇数阶正交矩阵，$|\boldsymbol{A}|=1$，试证 $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}|=0$.

$$\left|A-E\right|=\left|AE-AA^T\right|=\left|A(E-A^T)\right|=\left|A\right|\left|(E-A^T)\right|=\left|A\right|\left|(E-A)^T\right|=\left|A\right|\left|E-A\right|=\left|A\right|\cdot(-1)^n\left|A-E\right|=\left|A\right|\cdot\left[-\left|A-E\right|\right]$$

现 n 是奇数，$\left|A\right|=1$，故 $\left|A-E\right|=-\left|E-A\right|$，于是 $\left|A-E\right|=0$.

4.16 4.16 已知矩阵 $\boldsymbol{A}$，试求一个正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ (2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&4\\2&0&2\\4&2&3\end{pmatrix}$

(1)解特征方程 $\left|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1\\-1&\lambda-1&-1\\-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}\overset{r_2-r_2}{\underset{r_3-r_2}{=}}\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1\\-\lambda&\lambda&0\\-\lambda&0&\lambda\end{vmatrix}\overset{\frac{1}{\lambda}r_2,\ \frac{1}{\lambda}r_3}{\underset{r_1+r_2+r_3}{=}}\lambda^2\begin{vmatrix}\lambda-3&0&0\\-1&1&0\\-1&0&1\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-3)$

得特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=3$.

对于 $\lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，得特征向量 $k_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ (k_1,k_2 不全为 0). 选

$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交化: $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\dfrac{[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_3=3$，$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，得特征向量 $k_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}(k_3\neq0)$. 选 $\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 单位化: $\boldsymbol{\gamma}_1=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}\boldsymbol{\beta}_1=\dfrac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}\boldsymbol{\beta}_2=\dfrac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3=\dfrac{1}{\|\boldsymbol{\beta}_3\|}\boldsymbol{\beta}_3=\dfrac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\0&\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\-\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}$ 是正交的，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&3\end{pmatrix}$.

4.17 *4.17 设三阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$，对应于 λ_1 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，求对应于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的特征向量及 $\boldsymbol{A}$.

设 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 为对应于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的特征向量，则 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ 正交，满足

$$x_2+x_3=0$$

解得 $\boldsymbol{x}=k_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ (k_2,k_3 不全为零). 可选 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$. 注意到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是两两正交的, 将之单位化后构成矩阵

$$\boldsymbol{P}=\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|}\ \frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{\|\boldsymbol{\alpha}_2\|}\ \frac{\boldsymbol{\alpha}_3}{\|\boldsymbol{\alpha}_3\|}\right)=\begin{pmatrix}0&1&0\\ \frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2}&0&-\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{P}$ 是正交的, 且

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}.$$

于是

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\ \frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2}&0&-\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\ \frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2}&0&-\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

4.18 4.18 求下列二次型的矩阵和秩.

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1x_2-6x_1x_3-x_2x_3-3x_3^2$

(2) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=-5x_1^2+2x_3^2+x_2x_3-5x_2x_4-10x_3x_4$

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&\frac32&-3\\ \frac32&0&-\frac12\\ -3&-\frac12&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[2c_2]{2r_2}\begin{pmatrix}0&3&-3\\3&0&-1\\-3&-1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac13c_1]{\frac13r_1}\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&-1\\-1&-1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_1+r_2}\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&-1\\0&0&-5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},R(\boldsymbol{A})=3$

(2)

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-5&0&0&0\\0&0&\frac12&-\frac52\\0&\frac12&2&-5\\0&-\frac52&-5&0\end{pmatrix}\xrightarrow[2c_2]{2r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&-5\\0&1&2&-5\\0&-5&-5&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac15c_4]{\frac15r_4}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&-1\\0&1&2&-1\\0&-1&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac15c_4]{r_3-r_2+r_4}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\\0&-1&-1&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},R(\boldsymbol{A})=3$$

4.19 4.19 (1)设二次型 f 的矩阵为 $\begin{pmatrix}5&0.25\\0.25&-1\end{pmatrix}$, 求 $f(20,10)$

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha}=[6,4,2,0]^T$, $\boldsymbol{\beta}=[1,-3,-5,7]^T$, 二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$,求 $f(\boldsymbol{\beta})$.

(1) $f(x_1,x_2)=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}5&0.25\\0.25&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}f(20,10)=(20,10)\begin{pmatrix}5&0.25\\0.25&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}20\\10\end{pmatrix}=2000$

(2) $$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T=\begin{pmatrix}6\\4\\2\\0\end{pmatrix}(6,4,2,0)=\begin{pmatrix}36&24&12&0\\24&16&8&0\\12&8&4&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{x},$$

$$f(1,-3,-5,7)=(1,-3,-5,7)\begin{pmatrix}36&24&12&0\\24&16&8&0\\12&8&4&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-3\\-5\\7\end{pmatrix}=256$$

4.20 4.20 用正交变换化下列二次型为标准形

(1) $f=6x_1^2+24x_1x_2-x_2^2$

(2) $f=3x_1^2+x_2^2+x_3^2-6x_1x_2-6x_1x_3-2x_2x_3$

(1) 二次型 f 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}6&12\\12&-1\end{pmatrix}$. 现要对实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 加以正交对角化，即：找出一个正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^{T}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是对角阵(注意正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 满足 $\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}^{T}$). 为此，先求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

解 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-6&-12\\-12&\lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda-6-144=0,$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=-10$, $\lambda_2=15$.

对于特征值 $\lambda_1=-10$，解齐次方程组 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})x=0$. 方程组的系数矩阵

$$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-16&-12\\-12&-9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}4&3\\0&0\end{pmatrix}$$

得特征向量 $\boldsymbol{x}=k_1\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$ $(k_1\neq0)$. 取 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$.

对于特征值 $\lambda_2=15$，相应的齐次方程组的系数矩阵

$$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}9&-12\\-12&16\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-3&4\\0&0\end{pmatrix}$$

得特征向量 $\boldsymbol{x}=k_2\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ $(k_2\neq0)$. 取 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是正交的，将之单位化后构造正交矩阵

$$\boldsymbol{P}=\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|},\frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{\|\boldsymbol{\alpha}_2\|}\right)=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\-\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}.$$

作正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$，即

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\-\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}.$$

则二次型

$$f=6x_1^2+24x_1x_2-x_2^2$$

化为标准形

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2=-10y_1^2+15y_2^2.$$

(2)二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-3&-3\\-3&1&-1\\-3&-1&1\end{pmatrix}$. 解特征方程

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&3&3\\3&\lambda-1&1\\3&1&\lambda-1\end{vmatrix}=0,$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=-3$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=6$.

对于特征值 $\lambda_1=-3$，$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-6&3&3\\3&-4&1\\3&1&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，取特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

对于特征值 $\lambda_2=2$，$\lambda E-A=\begin{pmatrix}-1&3&3\\3&1&1\\3&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. 取特征向量 $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

对于特征值 $\lambda_3=6$，$\lambda E-A=\begin{pmatrix}3&3&3\\3&5&1\\3&1&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$. 取特征向量 $\alpha_3=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$.

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是正交的. 令

$$P=\left(\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|},\frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|},\frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&0&-\frac{2}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix},$$

则 P 是正交的. 作正交变换 $x=Py$，则给出的二次型化为标准形

$$f=-3y_1^2+2y_2^2+6y_3^2.$$

4.21 4.21 设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&-4\\-2&4&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix}$，试用正交变换化二次型 $f=x^TAx$ 为标准形.

解特征方程

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&4\\2&\lambda-4&2\\4&2&\lambda-1\end{vmatrix}=0,$$

得特征值 $\lambda_1=-4,\lambda_2=\lambda_3=5$.

对于特征值 $\lambda_1=-4$，$\lambda E-A=\begin{pmatrix}-5&2&4\\2&-8&2\\4&2&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$. 取特征向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$.

对于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=5$, $\lambda E-A=\begin{pmatrix}4&2&4\\2&1&2\\4&2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. 取特征向量 $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$.

α_2,α_3 不是正交的，将之正交化: $\beta_2=\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\beta_3=\alpha_3-\frac{[\alpha_3,\beta_2]}{[\beta_2,\beta_2]}\beta_2=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}-\frac{4}{5}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-4\\-2\\5\end{pmatrix}$..

将 $\beta_1=\alpha_1,\beta_2,\beta_3$ 单位化后构成 $P=\left(\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|},\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|},\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}\right)=\begin{pmatrix}\frac23&\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{4}{3\sqrt5}\\\frac13&-\frac{2}{\sqrt5}&-\frac{2}{3\sqrt5}\\\frac23&0&\frac{5}{3\sqrt5}\end{pmatrix}$，则 P 是正交的. 作正交变换 $x=Py$，则二次型化为标准形

$$f=-4y_1^2+5y_2^2+5y_3^2.$$

† 上面对于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=5$，可取特征向量 $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$. 这样 α_2,α_3 是正交的. 可令

$$P=\left(\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|},\frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|},\frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}\right)=\frac13\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&-2\\2&-2&-1\end{pmatrix}.$$

这样，得到不同的变换矩阵，但标准形仍然同上，因为构造 P 所用的特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 仍然依次对应着特征值 $\lambda_1=-4,\lambda_2=\lambda_3=5$.

4.22 4.22 用可逆线性变换将如下二次型化为标准形，并求出正惯性指标：

(1) $f = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$

(2) $f = x_1^2 + 2x_2^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$

(1) 二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

解特征方程

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix} \overset{r_2-r_1}{\underset{r_3-r_1}{=}} \begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}-\lambda & \lambda+\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2}-\lambda & 0 & \lambda+\frac{1}{2} \end{vmatrix},$$

$$= \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 \begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_1+\frac{1}{2}r_2+\frac{1}{2}r_3}{=} \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 (\lambda - 1) = 0$$

得特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2}, \lambda_2 = 1$.

对于特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2}$，$\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 取特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 不是正交的，将之正交化： $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$..

对于特征值 $\lambda_2 = 1, \lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 取特征向量 $\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P} = \left(\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}, \frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}, \frac{\boldsymbol{\beta}_3}{\|\boldsymbol{\beta}_3\|}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$. 则 $\boldsymbol{P}$ 是正交的. 作正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，则二次型化为标准形

$$f = -\frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + y_3^2.$$

正惯性指标是 1.

解法二 本题的变换矩阵不要求是正交的，可用配方法.

取

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases},$$

则

$$\begin{aligned} f &= x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 \\ &= (y_1+y_2)(y_1-y_2)+(y_1+y_2)y_3+(y_1-y_2)y_3 \\ &= y_1^2-y_2^2+2y_1y_3 \\ &= (y_1+y_3)^2-y_2^2-y_3^2 \\ &= z_1^2-z_2^2-z_3^2, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{cases} z_1 = y_1+y_3 \\ z_2 = y_2 \\ z_3 = y_3 \end{cases}.$$

而

$$\begin{cases} y_1 = z_1-z_3 \\ y_2 = z_2 \\ y_3 = z_3 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_1 = (z_1-z_3)+z_2 = z_1+z_2-z_3 \\ x_2 = (z_1-z_3)-z_2 = z_1-z_2-z_3 \\ x_3 = z_3 \end{cases}.$$

可见作可逆线性变换

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{z},$$

则给出的二次型就化为标准形

$$f = z_1^2-z_2^2-z_3^2.$$

(2) 二次型 f 的矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

特征方程

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 & -1 \\ -2 & \lambda-2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \overset{r_4-r_1+r_2-r_3}{=} \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 & -1 \\ -2 & \lambda-2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & \lambda & -1 \\ -\lambda & \lambda & -\lambda & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 & -1 \\ -2 & \lambda-2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & \lambda & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -3 \\ -3 & \lambda-1 & -2 \\ -3 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0,$$

的根不容易求. 下面的结果是用 matlab 得到的.

特征值 $\lambda_1 = -\dfrac{1640}{987}, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \dfrac{301}{650}, \lambda_4 = \dfrac{6337}{1219}$.

正交变换矩阵

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \dfrac{646}{995} & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{178}{4561} & \dfrac{219}{383} \\ \dfrac{583}{3205} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{634}{1067} & \dfrac{377}{625} \\ \dfrac{633}{865} & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{285}{1307} & \dfrac{610}{1493} \\ -\dfrac{371}{3734} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1715}{2218} & \dfrac{347}{920} \end{pmatrix}.$$

则作正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$, 二次型就化为标准形 $f = -\dfrac{1640}{987}y_1^2+0\cdot y_2^2+\dfrac{301}{650}y_3^2+\dfrac{6337}{1219}y_4^2$. 显见正惯性指标 $p=2$.

解法二 下面用配方法计算

$$\begin{aligned}f&=x_1^2+2x_2^2+x_4^2+4x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4\\&=\left(x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4\right)+2x_2^2+x_4^2+2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4\\&=\left(x_1+2x_2+2x_3+x_4\right)^2-\left(2x_2+2x_3+x_4\right)^2+2x_2^2+x_4^2+2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4\\&=y_1^2-2\left(x_2^2+3x_2x_3+x_2x_4\right)-4x_3^2-2x_3x_4\\&=y_1^2-2\left(x_2+\frac{3}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4\right)^2+2\left(\frac{3}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4\right)^2-4x_3^2-2x_3x_4\\&=y_1^2-2y_2^2+\frac{1}{2}\left(x_3^2+2x_3x_4+x_4^2\right)\\&=y_1^2-2y_2^2+\frac{1}{2}\left(x_3+x_4\right)^2\\&=y_1^2-2y_2^2+\frac{1}{2}y_3^2\end{aligned}$$

其中

$$\begin{cases}y_1=x_1+2x_2+2x_3+x_4\\y_2=x_2+\frac{3}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4\\y_3=x_3+x_4\\y_4=x_4\end{cases}\quad \text{或 } \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&1&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}.$$

可见作是可逆线性变换

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&1&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}1&-2&1&-1\\0&1&-\frac{3}{2}&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{y}$$

则二次型化成标准形 $f=y_1^2-2y_2^2+\frac{1}{2}y_3^2$. 正惯性指标 $p=3$.

4.23 4.23 判别下列二次型的正定性:

(1) $f=2x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$

(2) $f=x_1^2+3x_2^2+9x_3^2+19x_4^2-2x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4-6x_2x_4-12x_3x_4$

(1)二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&-6&0\\1&0&-4\end{pmatrix}$ 的各阶主子式依次为

$$\Delta_1=2>0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}2&1\\1&-6\end{vmatrix}=-14<0,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&-6&0\\1&0&-4\end{vmatrix}=58>0.$$

故二次型是负定的.

(2) 二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\-1&3&0&-3\\2&0&9&-6\\1&-3&-6&19\end{pmatrix}$ 的各阶主子式依次为

$$\Delta_1=1>0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}1&-1\\-1&3\end{vmatrix}=2>0,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}1&-1&2\\-1&3&0\\2&0&9\end{vmatrix}=6>0,\quad \Delta_4=|\boldsymbol{A}|=24>0.$$

故二次型是正定的.

4.24 4.24 λ 取何值时，下列二次型是正定的:

(1) $f=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$

(2) $f=x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2\lambda x_1x_2+10x_1x_3+6x_2x_3$

(1)二次型是正定的，当且仅当它的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&\lambda&-1\\\lambda&1&2\\-1&2&5\end{pmatrix}$ 的各阶主子式都是正的:

$$\Delta_1=1>0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}1&\lambda\\ \lambda&1\end{vmatrix}=1-\lambda^2>0,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}1&\lambda&-1\\ \lambda&1&2\\ -1&2&5\end{vmatrix}=-5\lambda^2-4\lambda>0,$$

即 $\begin{cases}1-\lambda^2>0\\ -5\lambda^2-4\lambda>0\end{cases}$. 解得 $-4/5<\lambda<0$.

(2)二次型是正定的，当且仅当它的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&\lambda&5\\ \lambda&4&3\\ 5&3&1\end{pmatrix}$ 的各阶主子式都是正的:

$$\Delta_1=1>0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}1&\lambda\\ \lambda&4\end{vmatrix}=4-\lambda^2>0,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}1&\lambda&5\\ \lambda&4&3\\ 5&3&1\end{vmatrix}=-\lambda^2+30\lambda-105>0,$$

即 $\begin{cases}4-\lambda^2>0\\ -\lambda^2+30\lambda-105>0\end{cases}$, 或 $\begin{cases}-2<\lambda<2\\ -\lambda^2+30\lambda-105>0\end{cases}$. 当 $\lambda<2$ 时，$-\lambda^2+30\lambda-105<0$. 这说明无论 λ 取何值，f 皆非正定.

4.25 4.25 验证二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=4x_1^2+5x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3$ 是正定二次型；用正交变换把椭球面方程 $f(x_1,x_2,x_3)=24$ 标准化，并求出它的三个轴长.

二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&1&0\\ 1&5&1\\ 0&1&4\end{pmatrix}$ 的各阶主子式都是正的:

$$\Delta_1=4>0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}4&1\\ 1&5\end{vmatrix}=19>0,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}4&1&0\\ 1&5&1\\ 0&1&4\end{vmatrix}72>0.$$

故二次型是正定的.

$\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=3,\lambda_2=4,\lambda_3=6$ 可通过解特征方程 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\lambda-4&-1&0\\ -1&\lambda-5&-1\\ 0&-1&\lambda-4\end{vmatrix}=0$ 得到，相应的特征向量通过求解齐次方程组 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0$ 分别可取为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}\\ -\frac{1}{\sqrt3}\\ \frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}\\ 0\\ \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\\ \sqrt{\frac{2}{3}}\\ \frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}$.

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 构成标准正交向量组，由它们构成正交矩阵

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\ -\frac{1}{\sqrt3}&0&\sqrt{\frac{2}{3}}\\ \frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}\sqrt2&-\sqrt3&1\\ -\sqrt2&0&2\\ \sqrt2&\sqrt3&1\end{pmatrix}.$$

作正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，则有 $f=3y_1^2+4y_2^2+6y_3^2$. 于是在新的坐标系 $\boldsymbol{O}\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2\boldsymbol{y}_3$ 下椭球面 $f(x_1,x_2,x_3)=24$ 的方程为 $f=3y_1^2+4y_2^2+6y_3^2=24$，或标准化为 $\frac{y_1^2}{(2\sqrt2)^2}+\frac{y_2^2}{(\sqrt6)^2}+\frac{y_3^2}{2^2}=1$. 椭球面的三个半轴的长度依次为 $a=2\sqrt2,b=\sqrt6,c=2$.

4.26 4.26 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3\ (a>0)$，通过正交变换化成标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求参数 a 及所用正交变换矩阵.

给出的二次型的矩阵是 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\ 0&3&a\\ 0&a&3\end{pmatrix}$.

因为二次型经正交变换后所得标准形的系数是二次型的矩阵的特征值，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$．由 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$，或 $2(9-a^2)=1\cdot2\cdot5$ 可确定 $a=\pm2$．

下面先对 $a=2$ 进行讨论.

对于 $\lambda_1=1$，$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-2&-2\\0&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$．得特征向量 $k_1\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}(k_1\neq0)$．

对于 $\lambda_2=2$，$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-2\\0&-2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$．得特征向量 $k_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}(k_2\neq0)$．

对于 $\lambda_3=5$，$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&-2\\0&-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$．得特征向量 $k_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}(k_3\neq0)$．

这三组相互正交的特征向量的单位向量分别是 $\boldsymbol{\alpha}_1=\pm\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\pm\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\pm\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$．以之构成矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则 $\boldsymbol{P}$ 是所求的正交变换矩阵．$\boldsymbol{P}$ 不是唯一的，可取

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}.$$

对 $a=-2$，类似可算得三个两两正交的单位特征向量：$\boldsymbol{\alpha}_1=\pm\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\pm\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\pm\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$．可取

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&0&-\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$$

4.27 4.27 证明：二次型 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ 时的最大值为实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征值.

有正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，使二次型化成标准形 $f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值(按由小到大的次序排列).

正交变换不改变向量的模，故 $\|\boldsymbol{y}\|=\|\boldsymbol{x}\|=1$．于是在 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ 时，

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2\le\lambda_n(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)\le\lambda_n\|\boldsymbol{y}\|^2=\lambda_n.$$

取 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varepsilon}_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$，当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 时，$f(\boldsymbol{x})=\lambda_n$，这是 f 的最大值.

4.28 *4.28 设 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，试证 $\boldsymbol{A}^2$，$\boldsymbol{A}^*$ 也均为正定矩阵.

当 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵时，$\boldsymbol{A}^2$，$\boldsymbol{A}^*$ 也都是对称矩阵：

$$(\boldsymbol{A}^2)^T=(\boldsymbol{A}^T)^2=\boldsymbol{A}^2,$$

$$(\boldsymbol{A}^*)^T=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^T=|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}^T)^{-1}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^*.$$

$\boldsymbol{A}$ 的所有特征值 $\lambda_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 都大于零．从而 $|\boldsymbol{A}|>0$．

$\boldsymbol{A}^2$ 的所有特征值 $\lambda_i^2\ (i=1,2,\cdots,n)$ 也都大于零，所以 $\boldsymbol{A}^2$ 是正定的.

$A^*=|A|A^{-1}$ 的所有特征值 $|A|\lambda_i^{-1}\ (i=1,2,\cdots,n)$ 也都大于零，所以 A^* 是正定的.

4.29 4.29 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正定矩阵，证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也是正定矩阵.

$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是正定矩阵，所以二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 都是正定的，即

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0\ (\boldsymbol{x}\neq 0),$$
$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}>0\ (\boldsymbol{x}\neq 0).$$

于是

$$\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}>0\ (\boldsymbol{x}\neq 0),$$

这说明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也是正定矩阵.

4.30 4.30 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，证明存在实数 c，对一切 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$，有 $|\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}|\leq c\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}$.

存在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，使二次型

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2.$$

设 $\tilde{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的绝对值最大的特征值，则 $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}|&=|\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2|\\&\leq|\lambda_1|y_1^2+|\lambda_2|y_2^2+\cdots+|\lambda_n|y_n^2\\&\leq|\tilde{\lambda}|(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)\\&=|\tilde{\lambda}|\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y}.\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 是正交变换，所以 $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}$. 于是 $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,|\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}|\leq|\tilde{\lambda}|\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}$. 取 $c=|\tilde{\lambda}|$ 即得证.

4.31 4.31 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵，$\boldsymbol{I}$ 是 n 阶单位矩阵，证明：$\det(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})>1$.

由 $\boldsymbol{A}$ 的正定性知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$. 于是 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 的特征值 $1+\lambda_i>1\ (i=1,2,\cdots,n)$，从而 $|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}|=(1+\lambda_1)\cdot(1+\lambda_2)\cdot\cdots\cdot(1+\lambda_n)>1$.

4.32 4.32 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}^3-3\boldsymbol{A}^2+5\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}=0$. 证明：$\boldsymbol{A}$ 正定.

$\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 满足 $\lambda^3-3\lambda^2+5\lambda-3=(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+3)=0$，或 $\lambda=1,1\pm i\sqrt{2}$. 但实对称矩阵的特征值都是实数，故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$. 从而 $\boldsymbol{A}$ 是正定的.

4.33 4.33 填空题:

(1) 设向量 $\boldsymbol{\alpha}=[-1,x,2]^T$ 与 $\boldsymbol{\beta}=[3x,x,-5]^T$ 正交，则 $x=$ <u>$-2,5$</u>.

(2) 向量 $\boldsymbol{\alpha}=[-1,4,0,2]^T$ 与 $\boldsymbol{\beta}=[2,-2,1,3]^T$ 的距离和内积分别为 <u>-4</u> 和 <u>$5\sqrt{2}$</u>.

(3) 向量 $\boldsymbol{\alpha}=[1,2,2,3]^T$ 与 $\boldsymbol{\beta}=[3,1,5,1]^T$ 的夹角为 <u>$\dfrac{\pi}{4}$</u>.

(4) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=[0,0,1]^T,\boldsymbol{\alpha}_2=[0,1,1]^T,\boldsymbol{\alpha}_3=[1,1,1]^T$ 经施密特方法正交规范化为 <u>$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$</u>.

(5) 若矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}x&0&0\\0&y&z\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$ 是正交矩阵，则 x,y,z 的值分别为 <u>$x=\pm1,y=-z=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$</u>.

(1) $-3x+x^2-10=0,x=-2,5$

(2) 向量 $\boldsymbol{\alpha}=[-1,4,0,2]^T$ 与 $\boldsymbol{\beta}=[2,-2,1,3]^T$ 内积为

$$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=\left[\begin{pmatrix}-1\\4\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-2\\1\\3\end{pmatrix}\right]=(-1)\cdot 2+4\cdot(-2)+0\cdot 1+2\cdot 3=-4;$$

距离为

$$\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\|=\left\|\begin{pmatrix}-1\\4\\0\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-2\\1\\3\end{pmatrix}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}-3\\6\\-2\\-1\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{(-3)^2+6^2+(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}.$$

(3)向量 $\boldsymbol{\alpha}=[1,2,2,3]^T$ 与 $\boldsymbol{\beta}=[3,1,5,1]^T$ 的夹角为

$$\arccos\frac{[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|}=\arccos\frac{18}{\sqrt{36}\sqrt{18}}=\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

(4)向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=[0,0,1]^T,\boldsymbol{\alpha}_2=[0,1,1]^T,\boldsymbol{\alpha}_3=[1,1,1]^T$ 经施密特方法正交规范化为

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{1}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{1}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{1}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

得到的 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ 已经是单位向量，为所求的正交规范组.

(5) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}x&0&0\\0&y&z\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}$ 的行向量组是标准正交向量组，满足 $\begin{cases}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1]=x^2=1\\[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2]=y^2+z^2=1\\[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=y\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+z\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=0\end{cases}$.

解得 $x=\pm1,y=-z=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

(6) 设三阶实对称方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=2$，则 $R(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=$ <u>2</u>. $R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=$ <u>1</u>.

定理 3.10 若 λ_i 是实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 重特征值，则存在 k 个属于 λ_i 的线性无关的特征向量.

$\lambda_3=2$ 是 1 重特征值，$\boldsymbol{A}$ 有 1 个属于 $\lambda_3=2$ 的线性无关的特征向量，即齐次方程组 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=0$ 的基础解系含 1 个解向量. 于是 $n-R(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=1$. 现 $n=3$，故 $R(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=2$. 类似地，$\lambda_1=\lambda_2=1$ 是 2 重特征值，方程组 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=0$ 的基础解系含 2 个解向量. 于是 $n-R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=2$，而 $R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=1$.

(7) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_2x_3$ 的矩阵是 $\begin{pmatrix}1&2&0\\2&2&1\\0&1&3\end{pmatrix}$，该二次型的秩为 3.

(8) 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&4\\2&2&-1\\4&-1&3\end{pmatrix}$ 对应的二次型是 $f=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+8x_1x_3-2x_2x_3$.

(9) 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2，则参数 $c=$ 3.

$$A=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&c\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&-1\\0&0&c-3\end{pmatrix}$$

(10) 设 $\boldsymbol{A}$ 是实对称可逆矩阵，则将 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 化为 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}$ 的线性变换为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}$.

解法一 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})$，令 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，即作线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}$，则 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 化为 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}$.

解法二 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{A}^T)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{A}^{-1})^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y})^T\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y})$. 作线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}$，则 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}$

(11) 设 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 $1,2,\cdots,n$，则当 t $>n$ 时，$t\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵.

当 $t>0$ 时，$t\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的特征值 $t-1,t-2,\cdots t-n$ 都大于零.

4.34 4.34 选择题

(1) 设 $\boldsymbol{\alpha}=[-1,1,5,-3]^T$，$\boldsymbol{\beta}=[-9,-2,3,-5]^T$，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的距离为(B).

(A)81 (B)9 (C)7 (D)8

(2) 设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的模分别是 6 和 9，$\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的距离是 12，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角的余弦为(A).

(A) $-\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{1}{2}$.

书上 p87 例 4.6 的公式: $\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\|=\sqrt{\|\boldsymbol{\alpha}\|^2+\|\boldsymbol{\beta}\|^2-2\|\boldsymbol{\alpha}\|\cdot\|\boldsymbol{\beta}\|\cos\theta}$

$$12=\sqrt{6^2+9^2-2\cdot6\cdot9\cdot\cos\theta}144,\quad \cos\theta=-\frac{1}{4},$$

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，则下列 4 个式子中表明 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵的式子为(C).

(A) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{I}$ (B) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$ (C) $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}^{-1}$ (D) $|\boldsymbol{A}|=\pm1$.

(4) 设 $\boldsymbol{\alpha}=[8,-4,1]^T$，若 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 是同方向的向量，且 $\|\boldsymbol{\beta}\|=6$，$\|\boldsymbol{\beta}\|=$(D).

(A) $[16,-8,2]^T$ (B) $-[16,-8,2]^T$ (C) $-\left[\frac{16}{3},-\frac{8}{3},\frac{2}{3}\right]^T$ (D) $\left[\frac{16}{3},-\frac{8}{3},\frac{2}{3}\right]^T$.

$\boldsymbol{\beta}$ 等于 $\boldsymbol{\alpha}$ 方向上的单位向量的 $\|\boldsymbol{\beta}\|$ 倍: $\boldsymbol{\beta}=\|\boldsymbol{\beta}\|\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}\boldsymbol{\alpha}\right)=6\left(\frac{1}{9}[8,-4,1]^T\right)=\left[\frac{16}{3},-\frac{8}{3},\frac{2}{3}\right]^T$.

(5) 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 是 n 维向量，则等式 $\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|^2=\|\boldsymbol{\alpha}\|^2+\|\boldsymbol{\beta}\|^2$ 成立的充分必要条件是(C).

(A) $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]>0$ (B) $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]<0$ (C) $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=0$ (D) $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]\neq0$.

(6) 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，$\boldsymbol{x}=(\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_n)^T$，且 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$，当(D)时，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$

(A)秩($\boldsymbol{A}$)=秩($\boldsymbol{B}$) (B) $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$

(C) $\boldsymbol{B}^T=\boldsymbol{B}$ (D) $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$ 且 $\boldsymbol{B}^T=\boldsymbol{B}$

当 $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$ 且 $\boldsymbol{B}^T=\boldsymbol{B}$ 时，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是同一个二次型的矩阵，而二次型的矩阵是唯一的，故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

(7) 下列矩阵为正定的是(D)

(A) $\begin{pmatrix}1&2&0\\2&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}1&2&0\\2&4&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&5&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&2\\0&2&5\end{pmatrix}$

(A)的矩阵不是正定的，因其二阶主子式$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-1<0$.

(B)的矩阵不是正定的，因其二阶主子式$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=0$.

(C)的矩阵不是正定的，因其三阶主子式$\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 5 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 5\end{vmatrix}=-2\cdot 1<0$.

(D) 的矩阵不是正定的，因其各阶主子式都大于零:

$$\Delta_1=2>0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2>0,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 5\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{vmatrix}=2\cdot 1=2>0.$$

(8) 实二次型 $f(\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_n)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定的充分必要条件是(**B**).

(A) $|\boldsymbol{A}|>0$ (B)存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C}$

(C)负惯性指标为零 (D)对某一 $\boldsymbol{x}\neq 0$，有 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$

(A)只是必要条件.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指标 p 与负惯性指标 $\tilde{p}$ 之和等于 $\boldsymbol{A}$ 的秩 r : $p+\tilde{p}=r$. 而 $\tilde{p}=0$ 时 $p=r$，但这不保证正惯性指标为 n. 故不选(C).

(D)中"对某一 $\boldsymbol{x}\neq 0$"要改为"对任一 $\boldsymbol{x}\neq 0$"才符合正定二次型的定义. 故不选(D).

根据定理 5.6 选(B).

定理 4.6 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，则下列命题等价: (1) $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是正定二次型(或 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵); (2) $\boldsymbol{A}$ 的正惯性指标为 n; (3) 存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}$; (4) $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 全大于零.

(9) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶实对称矩阵，且都正定，那么 $\boldsymbol{AB}$ 是(**C**).

(A)实对称矩阵 (B)正定矩阵

(C)可逆矩阵 (D)正交矩阵

$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是实对称矩阵，因此 $(\boldsymbol{AB})^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{BA}$，但这不保证 $(\boldsymbol{AB})^T=\boldsymbol{AB}$，即不保证 $\boldsymbol{AB}$ 是对称的. 故不选(A).

$\boldsymbol{AB}$ 不一定是对称的，因此不一定是正定的.(按定义，正定矩阵都是对称矩阵). 故不选(B).

(D)显然不可选.

$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是正定矩阵，因此都是可逆矩阵，它们的乘积 $\boldsymbol{AB}$ 也是可逆矩阵. 选(C).

注意:

- 矩阵与行列式不要混淆.矩阵是数表,行列式是数. 矩阵用圆括号 (A) 或方括号 $[A]$,行列式用竖括号 $|A|$.

- 矩阵与向量组的联系与区别

  - $A_{m\times n}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}$

    矩阵的秩 $R(A)=$ 向量组的秩 $R\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}=R\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$.

  - 矩阵 $A(m=n)$ 是正交的，即 $A^TA=E$ 或 $AA^T=E$

    $\Leftrightarrow A$ 的列向量组是标准正交向量组，即

    $$[\alpha_i,\alpha_j]=\begin{cases}1, i=j,\\ 0, i\neq j.\end{cases}$$

    $\Leftrightarrow A$ 的行向量组是标准正交向量组，即

    $$[\beta_i,\beta_j]=\begin{cases}1, i=j,\\ 0, i\neq j.\end{cases}$$

习题六

6.1 6.1 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$, $n=3$

(1)在Matlab软件中输入 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},n$

(2)求 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\mathrm{inv}(\boldsymbol{B});\boldsymbol{A}^n;\boldsymbol{A}.*\boldsymbol{B}$.

```
(1)A=[1,2,3;2,2,1;3,4,3],B=[1,1,1;0,1,1;0,0,1],n=3
(2)A+B =
      2          3          4
      2          3          2
      3          4          4
inv(B)=
      1         -1          0
      0          1         -1
      0          0          1
A^n =
     92        120        102
     66         86         72
    138        180        152
A.*B =
      1          2          3
      0          2          1
      0          0          3
```

6.2 6.2 已知 $\boldsymbol{a}=(1,2,3,4),\boldsymbol{b}=(4,3,2,1),n=3$，求 $(\boldsymbol{a}.*\boldsymbol{b});\boldsymbol{a}^n,\sqrt{\boldsymbol{a}}$

```
>> a=[1 2 3 4];b=[4 3 2 1];n=3;
>> a.*b =
      4          6          6          4
>> a.^n =
      1          8         27         64
>> sqrt(a) =
1.0000    1.4142    1.7321    2.0000
```

6.3 6.3 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&1\\5&3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{bmatrix}$

求矩阵 $\boldsymbol{X}$ 使其满足方程: $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$.

```
>> A=[1 2 3;2 2 1;3 4 3];B=[2 1;5 3];C=[1 3;2 0;3 1];
>> X=A\C/B
   -2.0000    1.0000
   10.0000   -4.0000
  -10.0000    4.0000
```

6.4 6.4 简述“,”在 Matlab 软件中的作用.

隔开矩阵的元素；隔开函数的参数

6.5 6.5 在 Matlab 软件中建立 5 阶零矩阵，单位矩阵. 全 1 矩阵，随机矩阵.

```
>> zeros(5),eye(5),ones(5),rand(5,5)
```

6.6 6.6 计算行列式 (1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

```
(1) >> A=[1 1 1 1;1 -1 1 1;1 1 -1 1;1 1 1 -1];det(A)
    ans =     -8
(2) >>A=[1 2 3 4;1 0 1 2;3 -1 -1 0;1 2 0 -5];det(A)
    ans =    -24
```

6.7 6.7 求下列矩阵的秩，迹和标准阶梯形.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 10 & 0 \\ 7 & 8 & 18 & 4 \\ 17 & 18 & 40 & 10 \\ 3 & 7 & 17 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{bmatrix}$

```
(1) >> A=[1 5 10 0;7 8 18 4;17 18 40 10;3 7 17 1];
    >> rank(A)
    ans =      3
    >> trace(A)
    ans =     50
    >> rref(A)
    ans =     1.0000         0         0    0.7692
                   0    1.0000         0         0
                   0         0    1.0000   -0.0769
                   0         0         0         0
(2) >> A=[1 0 0 1 4;0 1 0 2 5;0 0 1 3 6;1 2 3 14 32;4 5 6 32 77];
    >> rank(A)
    ans =      3
    >> trace(A)
    ans =     94
    >> rref(A)
    ans =      1     0     0     1     4
               0     1     0     2     5
```

```
        0         0         1         3         6
        0         0         0         0         0
        0         0         0         0         0
```

6.8 6.8 已知方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4=0 \\ 4x_1+5x_2+3x_3+3x_4=0 \end{cases}$.求它的基础解系及通解.

```
>> A=[1 1 1 1;2 3 1 1;4 5 3 3];format rat;B=null(A,'r');syms k1 k2;
>> X=k1*B(:,1)+k2*B(:,2); pretty(X)
                          [-2 k1 - 2 k2]
                          [            ]
                          [  k1 + k2   ]
                          [            ]
                          [     k1     ]
                          [            ]
                          [     k2     ]
```

6.9 6.9 求下列非齐次线性方程组$\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6 \\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4 \\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2 \end{cases}$的通解.

```
>> A=[2 7 3 1;3 5 2 2;9 4 1 7];b=[6 4 2]';
>> rank(A)
ans =       2
>> rank([A,b])
ans =       2
>> X=A\b
X =
     -2/11
     10/11
       0
       0
>> C=null(A,'r')
C =
       1/11          -9/11
      -5/11           1/11
        1              0
        0              1
```

通解 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{11}\\ \frac{10}{11}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}\frac{1}{11}\\ -\frac{5}{11}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-\frac{9}{11}\\ \frac{1}{11}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\quad (k_1,k_2\in\mathbb{R})$.

6.10 6.10 非齐次线性方程组 $\begin{cases}(2-a)x_1+2x_2-2x_3=1\\ 2x_1+(5-a)x_2-4x_3=2\\ -2x_1-4x_2+(5-a)x_3=-a-1\end{cases}$

问当 a 为何值时，此方程组有唯一解，无解，无穷多解？并在有无穷多解时求通解.

```
>> syms a;A=[2-a 2 -2;2 5-a -4;-2 -4 5-a];b=[1 2 -a-1].';
>> det(A)
 ans = 10-21*a+12*a^2-a^3
>> roots([-1 12 -21 10])
ans =
     10
      1         +      1/73058877i
      1         -      1/73058877i
```

当 $a\neq 10$ 时,系数行列式 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，方程组有唯一解. 当 $a=10$ 时,

```
>> a=10;A=[2-a 2 -2;2 5-a -4;-2 -4 5-a];b=[1 2 -a-1].';
>> rank(A)
ans =       2
>> rank([A,b])
ans =       3
```

增广矩阵的秩与系数矩阵的秩不相等，方程组无解.

6.11 6.11 求下列矩阵的特征值和特征向量.

(1) $\begin{bmatrix}5 & 6 & -3\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 3 & 6\end{bmatrix}$

(1)

```
>> A=[5 6 -3;-1 0 1;1 2 1];
>> [B,C]=eigensys(A)
B =
[ -2,   1]
[  1,   0]
[  0,   1]


C =
[ 2,  0,  0]
```

```
[ 0,  2,  0]
[ 0,  0,  2]
```

特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$，特征向量 $k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ (k_1,k_2 不全为零).

(2)

```
>> A=[1 2 3;2 1 3;3 3 6];
>> [B,C]=eigensys(A)
B =
[ -1,  -1,   1]
[ -1,   1,   1]
[  1,   0,   2]

C =
[  0,   0,   0]
[  0,  -1,   0]
[  0,   0,   9]
```

特征值 $\lambda_1=0$，特征向量 $k_1\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}(k_1\neq 0)$；

特征值 $\lambda_2=-1$，特征向量 $k_2\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}(k_2\neq 0)$；

特征值 $\lambda_3=9$，特征向量 $k_3\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}(k_3\neq 0)$.

6.12 6.12　求下列向量组的一组标准正交向量组.

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,3,-1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(7,4,3,-3)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,-6,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_4=(5,7,7,8)^T$$

```
>> a1=[2 1 3 -1]';a2=[7 4 3 -3]';a3=[1 1 -6 0]';a4=[5 7 7 8]';
>> A=[a1,a2,a3,a4];
>> orth(A)
ans =
  -452/913       1648/2843      1996/6857
  -361/699        191/1795       519/1300
  -608/1025      -509/6716      -648/809
 -4855/13149     -485/603        807/2387
```

与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 等价的标准正交向量组只含3个向量，这说明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是线性相关的. 事实上

```
>> null(A,'r')
ans =
     3
    -1
     1
     0
```

方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 有非零解 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}3\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$，这意味着 $3\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+0\boldsymbol{\alpha}_4=0$.

6.13 6.13 用正交变换把下列二次型化为标准形，并写出所作的正交变换.

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$$

在编辑器中建立文件p7_14.m

```
A=[1 -2 -4;-2 4 -2;-4 -2 1]
[U,T]=schur(A);
syms y1 y2 y3;
y=[y1; y2; y3];
X=vpa(U,2)*y %取U的2位有效数字近似值
f=y.'*T*y
```

运行后结果显示

```
>> p7_13
A =
     1    -2    -4
    -2     4    -2
    -4    -2     1

X =
[      .67*y1-.46*y2-.59*y3]
[      .33*y1+.89*y2-.32*y3]
[ .67*y1+.17e-1*y2+.75*y3]

f = - 4*y1^2+5*y2^2+5*y3^2
```

6.14 6.14 求正交矩阵 $\boldsymbol{T}$,使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}$ 为对角矩阵.

(1) $\begin{bmatrix}3&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&1\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}4&0&0\\0&3&1\\0&1&3\end{bmatrix}$

(1)

```
>> A=[3 -2 0;-2 2 -2;0 -2 1];
>> format rat
```

```
>> [T,D]=schur(A)
T =
    -1/3          2/3         -2/3
    -2/3          1/3          2/3
    -2/3         -2/3         -1/3

D =
      -1            0            0
       0            2            0
       0            0            5
```

$$T=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\text{是正交的且}T^{-1}AT=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 2 & \\ & & 5\end{pmatrix}.$$

(1)

```
>> A=[4 0 0;0 3 1;0 1 3];
>> [C,D]=schur(A);T=sym(C),D
 T =
[          0,          0,          1]
[ -sqrt(1/2),  sqrt(1/2),          0]
[  sqrt(1/2),  sqrt(1/2),          0]

D =
       2            0            0
       0            4            0
       0            0            4
```

$$T=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{pmatrix}\text{是正交的且}T^{-1}AT=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 4 & \\ & & 4\end{pmatrix}.$$

6.15 6.15 填空题

(1)在Matlab软件中，“;”的三个作用分别为 矩阵行间的分隔符 ； 指令之间的分隔符 ； 在赋值指令后阻止赋值结果在屏幕显示 .

(2)在Matlab软件中，每条指令输入行结束后，必须按 回车键 ，该行才能执行.

(3)在Matlab软件中，矩阵的三种基本输入方式分别为 以直接列出元素的形式输入 ； **利用MATLAB函数和语句创建数值矩阵** ； **利用M文件创建和保存矩阵** .

(4)在Matlab软件中，求行列式，特征值的指令分别为 **det(A)** ； **eig(A)** .