习题解答 1

1-T1:

【1-6】 一质点在xy平面上运动,运动方程为$x=3t+5$,$y=\frac{1}{2}t^2+3t-4$,式中,时间t的单位用s,坐标x,y的单位用m。求:

(1) 质点运动的轨迹方程;

(2) 质点位置矢量的表达式;

(3) 从$t_1=1$ s 到$t_2=2$ s 的位移;

(4) 速度矢量的表达式;

(5) 加速度矢量的表达式。

解 (1) 由
$$\begin{cases} x=3t+5 \\ y=\frac{1}{2}t^2+3t-4 \end{cases}$$

消去t得轨迹方程 $y=\frac{1}{18}x^2+\frac{4}{9}x-7\frac{11}{18}$

(2) 位置矢量

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}=(3t+5)\boldsymbol{i}+\left(\frac{1}{2}t^2+3t-4\right)\boldsymbol{j}\ (\text{m})$$

(3) $t=1$ s 和$t=2$ s 时位置矢量分别为

$$\boldsymbol{r}_1=(3\times1+5)\boldsymbol{i}+\left(\frac{1}{2}\times1^2+3\times1-4\right)\boldsymbol{j}=8\boldsymbol{i}-0.5\boldsymbol{j}\ (\text{m})$$

$$\boldsymbol{r}_2=11\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}\ (\text{m})$$

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=(11\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j})-(8\boldsymbol{i}-0.5\boldsymbol{j})=3\boldsymbol{i}+4.5\boldsymbol{j}\ (\text{m})$$

(4) 速度矢量 $\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=3\boldsymbol{i}+(t+3)\boldsymbol{j}\ (\text{m/s})$

(5) 加速度矢量 $\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=1\boldsymbol{j}\ (\text{m/s}^2)$

1-T2 【1-7】 一质点在xy平面上运动,其加速度为$\boldsymbol{a}=5t^2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$。已知$t=0$时,质点静止于坐标原点。求在任一时刻该质点的速度、位置矢量、运动方程和轨迹方程。

解 (1) $\boldsymbol{a}=5t^2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$,又$t=0$时$\boldsymbol{v}_0=0$,$\boldsymbol{r}_0=0$,所以任一时刻该质点的速度

$$\boldsymbol{v}=\int_0^t\boldsymbol{a}\mathrm{d}t+\boldsymbol{v}_0=\frac{5}{3}t^3\boldsymbol{i}+3t\boldsymbol{j}$$

(2) 位置矢量

$$\boldsymbol{r}=\int_0^t\boldsymbol{v}\mathrm{d}t+\boldsymbol{r}_0=\int_0^t\left(\frac{5}{3}t^3\boldsymbol{i}+3t\boldsymbol{j}\right)\mathrm{d}t+0=\frac{5}{12}t^4\boldsymbol{i}+\frac{3}{2}t^2\boldsymbol{j}$$

(3) 运动方程 $x=\frac{5}{12}t^4$, $y=\frac{3}{2}t^2$

(4) 轨迹方程 $x=\frac{5}{27}y^2$

1-T3 【1-15】 一物体沿 x 轴作直线运动，其加速度为 $a=-kv^2$，k 是常数。在 $t=0$ 时，$v=v_0$，$x=0$。

(1) 求速率随坐标变化的规律；

(2) 求坐标和速率随时间变化的规律。

解 (1)
$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v=-kv^2$$

式中，k 为常数。又 $t=0$ 时，$v=v_0$，$x=x_0=0$，故

$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v}=-k\int_0^x\mathrm{d}x,\quad v=v_0\mathrm{e}^{-kx}$$

(2) $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv^2$。当 $t=0$ 时，$v=v_0$，则有

$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v^2}=-k\int_0^t\mathrm{d}t$$

所以
$$v=\frac{v_0}{v_0kt+1}$$

又因为 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，且 $t=0$ 时，$x=0$，则有

$$x=\int_0^t v\mathrm{d}t=\int_0^t\frac{v_0}{v_0kt+1}\mathrm{d}t=\frac{1}{k}\int_0^t\frac{\mathrm{d}(v_0kt+1)}{v_0kt+1}$$

所以
$$x=\frac{1}{k}\ln(v_0kt+1)$$

1-T4 【1-17】 一质点沿半径 $R=2$ m 的圆周运动，其速率 $v=KRt^2$(m/s)，K 为常数。已知第二秒的速率为 32 m/s。求 $t=0.5$ s 时质点的速度和加速度的大小。

解 因为
$$v\Big|_{t=2}=32\ \mathrm{m/s}$$

所以
$$32=KR\times2^2=K\times2\times4=8K$$
$$K=4$$

故
$$v=8t^2$$

又
$$v\Big|_{t=0.5}=8\times0.5^2\ \mathrm{m/s}=2\ \mathrm{m/s}$$

$$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2+\frac{v^2}{R}}=\sqrt{(16t)^2+32t^4}$$

所以
$$a\Big|_{t=0.5}=\sqrt{(16\times0.5)^2+32\times(0.5)^4}\ \mathrm{m/s^2}$$
$$=8.12\ \mathrm{m/s^2}$$

1-75 【1-20】 一架飞机在静止空气中的速率为$v_1=135\ \mathrm{km/h}$。在刮风天气，飞机以$v_2=135\ \mathrm{km/h}$的速率向正北飞行，机头指向北偏东30°。请协助驾驶员判断风向和风速。

解 按题意，作示意图，如图1-6所示，图中$\boldsymbol{v}_3$为风速，

$$\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_3$$

所以 $v_3=\sqrt{v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\cos 30°}$

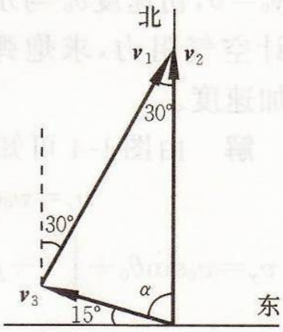


图1-6

$$=\sqrt{135^2+135^2-2\times135\times135\times0.866}\ \mathrm{km/h}=70\ \mathrm{km/h}$$

$$\alpha=\frac{1}{2}(180°-30°)=75°$$

即风向为东风偏北15°，风吹拂的方向为北偏西75°。

2-71 【2-8】 一物体由静止下落，所受阻力与速度成正比：$F=-kv$。求任一时刻的速度及最终速度。

解 取向下为正方向，则

$$mg-kv=ma=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\int_0^v\frac{m}{mg-kv}\mathrm{d}v=\int_0^t\mathrm{d}t$$

故 $$v=\frac{mg}{k}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

在上式中令$t\to\infty$，得最终速度

$$v_\mathrm{f}=\frac{mg}{k}$$

2-T2 某质点质量 $m=2.00\ \mathrm{kg}$，沿 x 轴做直线运动，所受外力为 $F=10+6x^2$（SI 制）。若在 $x_0=0$ 处，速度 $v_0=0$，求该物体移到 $x=4.0\ \mathrm{m}$ 处时速度的大小。

$$F=ma \Rightarrow a=\frac{F}{m}=\frac{10+6x^2}{2}=\frac{dv}{dt}$$

$$5+3x^2=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}$$

$$\int_0^{x=4}(5+3x^2)dx=\int_0^v v\,dv$$

$$\frac{1}{2}v^2=5\times4+4^3,\quad v=12.96\ (\mathrm{m/s})$$

2-T3 **【2-12】** 将质量为 m 的物体以初速度 v_0 竖直上抛。设空气的阻力正比于物体的速度，比例系数为 k。求：

（1）任一时刻物体的速度；

（2）物体达到的最大高度。

解　（1）上抛过程中物体受重力和空气阻力的作用，其方向皆向下，以向上为正建立坐标系。

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-(mg+kv) \qquad ①$$

即

$$-\frac{\mathrm{d}v}{g+\frac{k}{m}v}=\mathrm{d}t \qquad ②$$

由初始条件，$t=0$，$v=v_0>0$，得

$$-\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{g+\frac{k}{m}v}=\int_0^t\mathrm{d}t$$

$$-\frac{m}{k}\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}\left(g+\frac{k}{m}v\right)}{g+\frac{k}{m}v}=\int_0^t\mathrm{d}t$$

$$\ln\frac{g+\frac{k}{m}v}{g+\frac{k}{m}v_0}=-\frac{k}{m}t$$

$$v=v_0\exp\left(-\frac{k}{m}t\right)+\frac{mg}{k}\left[\exp\left(-\frac{k}{m}t\right)-1\right] \qquad ③$$

(2) 将变量代换$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$代入式~~②~~①，有

$$-\frac{v\mathrm{d}v}{g+\frac{k}{m}v}=\mathrm{d}x$$

$$-\frac{m}{k}\mathrm{d}v+\frac{m^2}{k^2}g\frac{\mathrm{d}\left(g+\frac{k}{m}v\right)}{g+\frac{k}{m}v}=\mathrm{d}x \qquad ④$$

由条件 $x_0=0,v=v_0;x=H,v=0$，对式④积分，得

$$-\frac{m}{k}\int_{v_0}^{0}\mathrm{d}v+\frac{m^2}{k^2g}\int_{v_0}^{0}\frac{\mathrm{d}\left(g+\frac{k}{m}v\right)}{g+\frac{k}{m}v}=\int_0^H\mathrm{d}x$$

有
$$H=\frac{m}{k}v_0-\frac{m^2}{k^2}g\ln\left(1+\frac{kv_0}{mg}\right)$$

2-14【2-14】 快艇以速率 v_0 行驶。它受到的摩擦阻力与速度的平方成正比，比例系数为 k。设快艇的质量为 m。求当快艇发动机关闭后，

（1）速度随时间变化的规律；

（2）路程随时间变化的规律；

（3）速度随路程变化的规律。

解 （1）按题意有

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv^2$$

当 $t=0$ 时，$v=v_0$。故有

$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v^2}=-\frac{k}{m}\int_0^t\mathrm{d}t$$

得

$$v=\frac{v_0}{\left(1+\frac{k}{m}v_0t\right)} \quad ①$$

（2）以 $v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ 代入式①，得

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{v_0}{1+\frac{k}{m}v_0t}$$

分离变量积分 $\int_0^s\mathrm{d}s=\int_0^t\left[v_0\Big/\left(1+\frac{k}{m}v_0t\right)\right]\mathrm{d}t$

得

$$s=\frac{m}{k}\ln\left(1+\frac{k}{m}v_0t\right) \quad ②$$

（3）由式①得

$$1+\frac{k}{m}v_0t=\frac{v_0}{v} \quad ③$$

或者：$m\frac{dv}{dt}=m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt}=m\frac{dv}{ds}v$

$=-kv^2$

$\Rightarrow m\frac{dv}{ds}=-kv$

$\Rightarrow \frac{dv}{v}=-\frac{k}{m}ds \Rightarrow$ 积分!!

将式③代入式②，得 $\frac{k}{m}s=\ln\frac{v_0}{v}$

故 $v=v_0\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}s}$

2-T5 【2-18】 在水平直轨道上有一车厢以加速度 $\boldsymbol{a}$ 行进，在车厢中看到有一质量为m 的小球静止地悬挂在顶板下。试以车厢为参考系，求出悬线与竖直方向的夹角。

解 如图2-11 所示。以车厢为参考系，则小球受到重力$m\boldsymbol{g}$，悬线的拉力$\boldsymbol{T}$ 以及惯性力$m\boldsymbol{a}$ 的作用。因小球静止，故

$$\begin{cases} T\cos\theta = mg \\ T\sin\theta = ma \end{cases}$$

解得

$$\tan\theta = \frac{a}{g}$$

$$\theta = \arctan\frac{a}{g}$$

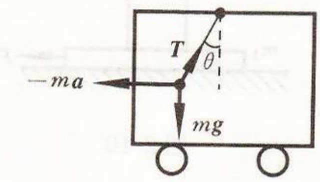


图 2-11

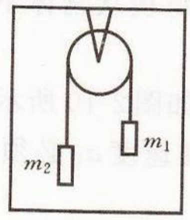


图 2-12

2-T6 【2-19】 如图2-12 所示，一根绳子跨过电梯内的定滑轮，两端悬挂质量不等的物体，$m_1 > m_2$。定滑轮和绳子的质量忽略不计。求当电梯以加速度a 上升时，绳的张力T 和m_1 相对于电梯的加速度a_r。

解 以电梯为参考系，两物体分别受到向下的惯性力 m_1a 和 m_2a 的作用，于是，

$$\begin{cases} m_1g + m_1a - T = m_1a_r \\ T - m_2g - m_2a = m_2a_r \end{cases}$$

消去方程组中的T，得

$$a_r = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(g + a)$$

故绳的张力

$$T = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}(g + a)$$

2-T7【3-11】 一颗子弹由枪口飞出的速度是300 m/s，在枪管内子弹受到的合力为

$$F=\underline{400}-\underline{\frac{4\times10^5}{3}}t$$

其中，F 以 N 为单位，t 以 s 为单位。

(1) 假定子弹到枪口时所受的力变为零，计算子弹行经枪管所需的时间；

(2) 求该力的冲量；

(3) 求子弹的质量。

解 (1) 因为子弹受的合力 F 与时间 t 的关系为

$$F=400-\frac{4\times10^5}{3}t$$

而子弹到达枪口时，所受的力为零，即当 $F=0$ 时，有

$$F=0=400-\frac{4\times10^5}{3}t$$

所以所需时间为 $t=3\times10^{-3}\text{ s}$

(2) $$\int_{t_1}^{t_2}F\mathrm{d}t=\int_0^{3\times10^{-3}}\left(400-\frac{4\times10^5}{6}t\right)\mathrm{d}t$$

$$=\left(400t-\frac{4\times10^5}{3}t^2\right)\Bigg|_0^{3\times10^{-3}}=6\times10^{-1}\text{ N}\cdot\text{s}$$

(3) $$\int_{t_1}^{t_2}F\mathrm{d}t=mv_2-mv_1$$

其中 $v_1=0,\quad v_2=300\text{ m/s}$

则 $$m=\frac{6\times10^{-1}}{300}\text{ kg}=2\times10^{-3}\text{ kg}$$

使用习题册的已知条件：(1)0.003(s)；(2)0.9(N.S)；(3)0.003(kg)。

2-T8 【3-13】 水管有一段弯曲成90°。已知管中水的流量为3×10^3kg/s，流速为10 m/s。求水流对此弯管的压力的大小和方向。

解　如图3-7所示，考虑质量为Δm的一小段水柱临通过直角弯曲处和刚通过直角弯曲处这两个状态。设时间间隔为Δt，水管对Δm的力为$\boldsymbol{f}$，则

$$\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{v}'=v\boldsymbol{j},\quad v=10\text{ m/s}$$

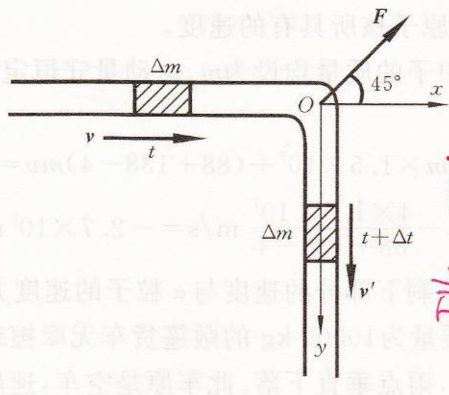
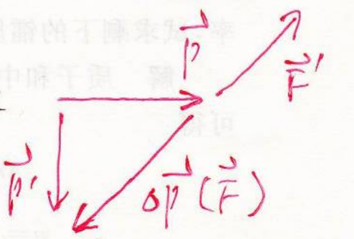


图 3-7



$$\vec{F}=\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}\Rightarrow F=\frac{\Delta m\sqrt{2}v}{\Delta t}$$

$$=3\sqrt{2}\times10^4\text{N}$$

$$\vec{F}'=-\vec{F}$$

由动量定理$\boldsymbol{I}=\Delta\boldsymbol{p}$得

$$\boldsymbol{f}\Delta t=\Delta m(\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v})$$

依牛顿第三定律，水对水管的作用力$\boldsymbol{F}$为

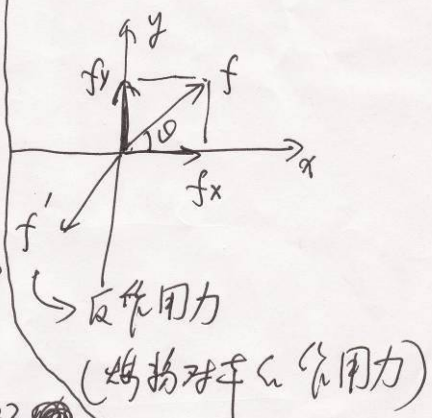
$$\boldsymbol{F}=-\boldsymbol{f}=\frac{\Delta m}{\Delta t}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}')=3\times10^3(10\boldsymbol{i}-10\boldsymbol{j})\text{ N}=3\times10^4(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j})\text{ N}$$

所以，$\boldsymbol{F}$的大小为$3\sqrt{2}\times10^4$ N，方向沿直角的平分线指向右上方

2−T9:

煤粉受力:

$$f_x=\frac{dp_x}{dt}=\frac{v q_m dt}{dt}=v q_m=80\text{N}$$



自由下落速度: $v_0=\sqrt{2gh}=3.13$ m/s

$$f_y=\frac{0-(-v_0 q_m dt)}{dt}=v_0 q_m=125.22\ (\text{N})$$

$$f=\sqrt{f_x^2+f_y^2}=149\text{N}$$

方向: [illegible] $\theta=\tan^{-1}(f_y/f_x)=57.4$度.

2-T10 **【3-14】** 水平桌面上盘放着一根不能拉伸的均匀柔软的长绳，今用手将绳的一端以恒定速率v_0竖直上提。试求当提起的绳长为L时，手的提力$\boldsymbol{F}$的大小。设此绳单位长度的质量为λ。

解 如图3-8 所示。设t时刻提起的绳子长度为x，经过$\mathrm{d}t$后增加了$\mathrm{d}x$。则由动量定理得

$$(F-\lambda xg-\lambda\cdot \mathrm{d}x\cdot g)\mathrm{d}t=\lambda(x+\mathrm{d}x)v_0-\lambda xv_0$$

略去二阶无穷小量得

$$(F-\lambda xg)=\lambda v_0\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

即
$$F=\lambda xg+\lambda v_0^2$$

故，当提起的绳子长为L时，手的提力为

$$F=\lambda Lg+\lambda v_0^2$$

$$f=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=\frac{\lambda \mathrm{d}x\, v_0-0}{\mathrm{d}t}=\lambda v_0^2$$

此项可用

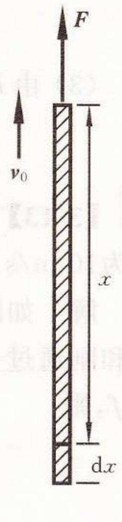


图 3-8

【3-15】 镭原子核含有 88 个质子和 138 个中子，在衰变时放出一个α粒子（α粒子含有 2 个质子和 2 个中子），若质子和中子的质量看作相等，镭原子核原来是静止的，当α粒子离开核时具有1.5×10^7 m/s 的速率，试求剩下的镭原子核所具有的速度。

解 质子和中子的质量均设为m。由动量守恒定律

2-T11 **【3-17】** 我国第一颗人造卫星绕地球沿椭圆轨道运动，地球的中心O为该椭圆的一个焦点，如图 3-9 所示，已知地球的平均半径$R=6378$ km，人造卫星距地面最近距离$l_1=439$ km，最远距离$l_2=2384$ km，若人造卫星的近地点A_1的速度$v_1=8.10$ km/s，求人造卫星在远地点A_2的速度。

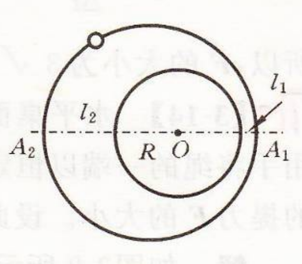


图 3-9

解 因为人造卫星在运动过程中，所受力总指向同一个中心（即O点），即卫星在有心力场中运动，所以它对O点的角动量守恒。人造卫星在近地点A_1的角动量

$$L_1=mv_1(R+l_1)$$

在远地点A_2的角动量

$$L_2=mv_2(R+l_2)$$

因而有
$$mv_1(R+l_1)=mv_2(R+l_2)$$

$$v_2=v_1\frac{R+l_1}{R+l_2}=8.10\times\frac{6378+439}{6378+2384}\ \text{km/s}=6.31\ \text{km/s}$$

2-T12:　C

2-T13 **【4-15】** 设一质点在力 $\boldsymbol{F}=4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$ 的作用下，由原点运动到 $x=8$ m，$y=6$ m处。

（1）如果质点沿直线从原点运动到终点位置，力所作的功是多少？

（2）如果质点先沿 x 轴从原点运动到 $x=8$ m，$y=0$ 处，然后再沿平行于 y 轴的路径运动到终点位置，力在每段路程上所作的功以及总功为多少？

（3）如果质点先沿 y 轴运动到 $x=0$，$y=6$ m 处，然后再沿平行于 x 轴的路径运动到终点位置，力在每段路程上所作的功以及总功为多少？

（4）比较上述结果，说明这个力是保守力还是非保守力？

解　（1）$\boldsymbol{F}=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}=4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$

沿 OQ 连线方向，如图 4-7 所示。故

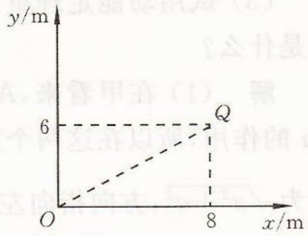


图 4-7

$$A=\int_O^Q \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_O^Q |\boldsymbol{F}|\cdot|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\int_O^Q F\mathrm{d}l$$

$$=\int_0^{10}\sqrt{F_x^2+F_y^2}\mathrm{d}l=\int_0^{10}5\mathrm{d}l=50\ \mathrm{J}$$

（2）从(0,0)到(8,0)，

$$A_1=\int \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_0^8 F_x\cdot\mathrm{d}x=\int_0^8 4\mathrm{d}x=32\ \mathrm{J}$$

从(8,0)到(8,6)，

$$A_2=\int \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_0^6 F_y\cdot\mathrm{d}y=\int_0^6 3\mathrm{d}y=18\ \mathrm{J}$$

$$A=A_1+A_2=50\ \mathrm{J}$$

（3）从(0,0)到(0,6)，

$$A_1=\int \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_0^6 F_y\cdot\mathrm{d}y=\int_0^6 3\mathrm{d}y=18\ \mathrm{J}$$

从(0,6)到(8,6)，

$$A_2=\int \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_0^8 F_x\cdot\mathrm{d}x=\int_0^8 4\mathrm{d}x=32\ \mathrm{J}$$

$$A=A_1+A_2=50\ \mathrm{J}$$

（4）这个力是保守力。

2−T14:

4-T2 解：（1）由 $\vec{r}$ 可知此质点作匀角速的椭圆运动。因为：$\vec{r}=a\cos\omega t\vec{i}+b\sin\omega t\vec{j}$，

所以：$x=a\cos\omega t$　　$y=b\sin\omega t$，　　$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$

（2）因为：　$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-a\omega\sin\omega t, v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=b\omega\cos\omega t$

所以：$v=\sqrt{a^2\omega^2\sin^2\omega t+b^2\omega^2\cos^2\omega t}$，

由于在点 $A(a,0)$ 时，　$\omega t=0$，所以：$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mb^2\omega^2$

而在点 $B(0,b)$ 时，　$\omega t=\frac{\pi}{2}$，所以：$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}ma^2\omega^2$

（3）$\vec{F}=m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}=-ma\omega^2\cos\omega t\vec{i}-mb\omega^2\sin\omega t\vec{j}=-m\omega^2\vec{r}$

即　$F_x=-m\omega^2x, F_y=-m\omega^2y$

所以：

$$A_x=\int_a^0F_x\mathrm{d}x=-\int_a^0m\omega^2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}m\omega^2a^2$$

$$A_y=\int_0^bF_y\mathrm{d}y=-\int_0^bm\omega^2y\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}m\omega^2b^2$$

（4）$\vec{F}$ 是保守力。从（3）中可以看到质点从点 A 运动到点 B，功的大小与路径无关，只与物体始末位置有关。

由于：$A=\int\vec{F}\cdot d\vec{r}=-\int m\omega^2\vec{r}\cdot d\vec{r}=\cancel{\int F(x)dx+\int F(y)dy}=\int F(x)dx+\int F(y)dy$

4-T3　解：

2−T15　**【4-21】** 将一质点沿一个半径为 r 的光滑半球形碗的内表面水平地投射，如图 4-12 所示，碗保持静止，设 v_0 是质点恰好能达到碗口所需的初速率。试求出 v_0 作为 θ_0 的函数的表达式。θ_0 是用角度表示的质点的初位置。（提示：应用角动量守恒定律和机械能守恒定律求解。）

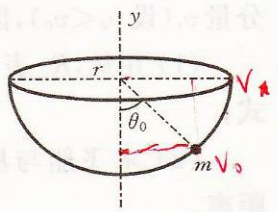


图 4-12

解　分析可知，合外力 $\boldsymbol{F}$ 相对于碗口中心的力矩 $\boldsymbol{M}$ 始终与碗口平面的法线方向垂直，即与 y 轴垂直，故 y 方向上力矩分量 $M_y=0$，由角动量守恒定律知，角动量的 y 分量守恒，所以

$$mvr=mv_0r\sin\theta_0 \qquad ①$$

又机械能守恒，所以

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv^2+mgr\cos\theta_0 \qquad ②$$

联立式①、式②求解，得

$$v_0=\sqrt{\frac{2gr}{\cos\theta_0}}$$

2-T16【4-24】 如图4-15 所示。一飞船环绕某星体作圆轨道运动，半径为 R_0，速率为 v_0，要使飞船从此圆轨道的运动变成近距离为 R_0，远距离为 $3R_0$ 的椭圆轨道的运动，则飞船的速率 v 应变为多大？

解 当飞船作半径为 R_0 的圆轨道运动时，

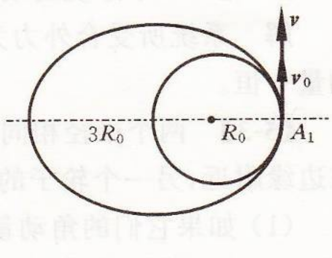


图 4-15

$$G\frac{Mm}{R_0^2}=m\frac{v_0^2}{R_0} \qquad ①$$

设当飞船沿椭圆轨道运动时在近地点和远地点的速率分别为 v,v'，则由角动量守恒和机械能守恒得

$$R_0mv=3R_0mv' \qquad ②$$

$$\frac{1}{2}mv^2-G\frac{Mm}{R_0}=\frac{1}{2}mv'^2-G\frac{Mm}{3R_0} \qquad ③$$

由式①、式②、式③解得

$$v=\frac{\sqrt{6}}{2}v_0$$

3-T1【5-7】 一轮子从静止开始加速，它的角速度在 6 s 内均匀增加到 200 r/min，以这个速度转动一段时间之后，使用了制动装置，再过 5 min 轮子停止，若轮子的转数为 3100 r，试计算总的转动时间。

解 整个转动过程是由静止开始匀加速转动的，尔后匀速转动，再匀减速转动到停止。在匀加速转动中，由

$$\theta_{匀加速}=\theta_0+\bar{\omega}t_1$$

且 $\theta_0=0,\quad \bar{\omega}=\frac{\omega_0+\omega}{2}\quad$ 及 $\quad\omega_0=0$

得 $$\theta_{匀加速}=\frac{1}{2}\omega t_1=\frac{1}{2}\times\frac{2\pi\times 200}{60}\times 6\ \mathrm{rad}=20\pi\ \mathrm{rad}$$

在匀减速转动中，则有

$$\theta_{匀减速}=\bar{\omega}t_2=\frac{1}{2}\omega t_2=\frac{1}{2}\times\frac{2\pi\times 200}{60}\times 5\times 60\ \mathrm{rad}=1000\pi\ \mathrm{rad}$$

在匀速转动中，则有

$$\theta_{匀速}=\theta_{总}-\theta_{匀加速}-\theta_{匀减速}=(3100-10-500)\times 2\pi\ \mathrm{rad}=2590\times 2\pi\ \mathrm{rad}$$

$$t_2=\frac{\theta_{匀速}}{\omega}=\frac{2590\times 2\pi}{200\times 2\pi/60}\ \mathrm{min}=12.95\ \mathrm{min}$$

所以总的转动时间为

$$t_{总}=t_1+t_2+t_3=\left(\frac{6}{60}+12.95+5\right)\ \mathrm{min}=18.1\ \mathrm{min}$$

3-T2【5-8】 一物体由静止(在 $t=0$ 时,$\theta=0$ 和 $\omega=0$)按照方程 $\beta=(120t^2-48t+16)\ (\mathrm{rad/s^2})$ 的规律被加速于一半径为 1.3 m 的圆形路径上。求:

(1) 物体的角速度和角位置关于时间的函数;

(2) 它的加速度的切向分量和法向分量。

解 (1) 由 $\beta=\dfrac{d\omega}{dt}$,又 $t=0$ 时,$\omega=0$,有

$$\int_0^{\omega}d\omega=\int_0^{t}\beta dt$$

$$\omega=\int_0^{t}(120t^2-48t+16)dt=(40t^3-24t^2+16t)\ (\mathrm{rad/s})$$

由 $\omega=\dfrac{d\theta}{dt}$,且 $t=0$ 时,$\theta=0$,有

$$\int_0^{\theta}d\theta=\int_0^{t}(40t^3-24t^2+16t)dt$$

$$\theta=(10t^4-8t^3+8t^2)\ (\mathrm{rad})$$

(2) 因为 $a_n=R\omega^2,\quad a_t=R\beta$

所以 $a_n=1.3\times(40t^3-24t^2+16t)^2=83.2t^2(5t^2-3t+2)^2\ (\mathrm{m/s^2})$

$a_t=1.3\times(120t^2-48t+16)=10.4(15t^2-6t+2)\ (\mathrm{m/s^2})$

3–*T*3: 解:对 m:$mg-T=ma$,对滑轮 $J=MR^2/2$:$TR=J\beta$,牵连方程:$a=R\beta$

解得:$a=mg/(m+M/2)$,$v_0=0\Rightarrow v=at$ $\quad$ $\boldsymbol{v=mgt/(m+M/2)}$

3-T4【5-12】 有一飞轮,其轴成水平方向,轴之半径 $r=2.00$ cm,其上绕有一根细长的绳。在其自由端先系以一质量 $m_1=20.0$ g 的轻物,使此物能匀速下降,然后改系以一质量 $m_2=5.00$ kg 的重物,则此物从静止开始,经过 $t=10.0$ s时间,共下降了 $h=40.0$ cm。忽略绳的质量和空气阻力,并设重力加速度 $g=980\ \mathrm{cm/s^2}$。求:

(1) 飞轮主轴与轴承之间的摩擦力矩的大小;

(2) 飞轮转动惯量的大小;

(3) 绳上张力的大小。

解 (1) 挂轻物时,此物能匀速下降,即飞轮能匀速转动,说明所受力矩平衡,$\boldsymbol{M}_{合}=\boldsymbol{0}$,即摩擦力矩 $\boldsymbol{M}_f$ 与轻物的拉力矩 $\boldsymbol{M}_m$ 大小相等、方向相反,故

$$M_f=M_m=m_1gr=20.0\times10^{-3}\times9.80\times2.00\times10^{-2}\ \mathrm{N\cdot m}$$
$$=3.92\times10^{-3}\ \mathrm{N\cdot m}$$

（2）挂重物M时，M受重力 m_2g 与拉力 T 作用，如图5-3所示，飞轮主轴受力矩 rT 与 M_f 的作用，可列方程组如下：

$$\begin{cases} m_2g-T=m_2a & ① \\ rT-M_f=J\beta & ② \\ a=r\beta & ③ \\ h=\dfrac{1}{2}at^2 & ④ \end{cases}$$

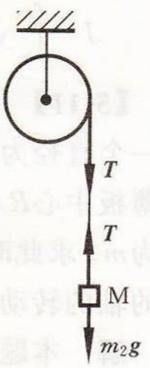


图 5-3

由式④与式③，有 $h=\dfrac{1}{2}r\beta t^2$，即

$$\beta=\frac{2h}{rt^2}=\frac{2\times 40.0\times 10^{-2}}{2.00\times 10^{-2}\times 10.0^2}\ \mathrm{rad/s^2}=4.0\times 10^{-1}\ \mathrm{rad/s^2}$$

再由式①、式②、式③得

$$J=\frac{m_2(g-r\beta)r-M_f}{\beta}$$

$$=\frac{5.00\times(9.80-2.00\times 10^{-2}\times 4.0\times 10^{-1})\times 2.00\times 10^{-2}-3.92\times 10^{-3}}{4.0\times 10^{-1}}\ \mathrm{kg\cdot m^2}$$

$$=2.44\ \mathrm{kg\cdot m^2}$$

（3）由式①、式③得绳上的张力

$$T=m_2(g-r\beta)=5.00\times(9.80-2.00\times 10^{-2}\times 4.0\times 10^{-1})\ \mathrm{N}$$

$$=4.90\times 10\ \mathrm{N}$$

3−T5: 解：受力分析如图所示．

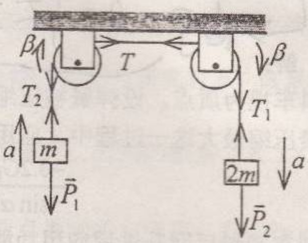
$$2mg-T_1=2ma$$

$$T_2-mg=ma$$

$$T_1r-Tr=\frac{1}{2}mr^2\beta$$

$$Tr-T_2r=\frac{1}{2}mr^2\beta$$

$$a=r\beta$$



解上述5个联立方程得： $\boxed{T=11mg/8}$

3-T6 【5-16】 一个平台以1.0 rad/s 的角速度绕通过其中心且与台面垂直的光滑竖直轴转动。这时，有一人站在平台中心，其两臂伸平，且在每一手中拿着质量相等的重物。人、平台与重物的总转动惯量为6.0 kg·m²。设当他的两臂下垂时，转动惯量减小到2.0 kg·m²。

(1) 问这时转台的角速度为多大?

(2) 转动动能增加多少?

解 (1) 因为人站在中心，故两臂的力指向中心转轴，其力矩为零，整个过程角动量守恒，即

$$J_1\omega_1=J_2\omega_2$$

$$\omega_2=\frac{J_1}{J_2}\omega_1=\frac{6.0}{2.0}\times 1.0\ \mathrm{rad/s}=3.0\ \mathrm{rad/s}$$

(2) $$\Delta E_{\mathrm{k}}=E_{\mathrm{k2}}-E_{\mathrm{k1}}=\frac{1}{2}J_2\omega_2^2-\frac{1}{2}J_1\omega_1^2$$

$$=\left(\frac{1}{2}\times 2.0\times 3.0^2-\frac{1}{2}\times 6.0\times 1.0^2\right)\ \mathrm{J}=6.0\ \mathrm{J}$$

即转动动能增加6.0 J。

$$\frac{E_{\mathrm{k2}}}{E_{\mathrm{k1}}}=\frac{\frac{1}{2}J_2\omega_2^2}{\frac{1}{2}J_1\omega_1^2}=\frac{2.0\times(3.0)^2}{6.0\times(1.0)^2}=3.0$$

即转动动能增加到两臂伸平时的3.0倍。

3-T7 【5-17】 如图5-6所示，一质量为m，长度为l的匀质细杆，可绕通过其一端且与杆垂直的水平轴O转动，且杆对端点转轴的转动惯量$J=ml^2/3$。若将此杆水平横放时由静止释放，求当杆转到与铅直方向成30°角时的角速度。

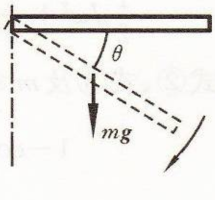


图5-6

解 由机械能守恒有

$$\frac{1}{2}J\omega^2=mg\,\frac{l}{2}\sin\theta$$

因为$J=\dfrac{1}{3}ml^2$，$\theta=90°-30°=60°$，所以

$$\omega=\left(\frac{mgl\sin\theta}{J}\right)^{1/2}=\left(\frac{mgl\sin 60°}{\frac{1}{3}ml^2}\right)^{1/2}=\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{g}{l}\right)^{1/2}$$

3−T8: 解：人在盘边时，$J_人=mR^2$，设人走到盘心时盘的角速度ω'。

$$(J+J_人)\omega=J\omega' \qquad \omega'=\frac{J+mR^2}{J}\omega$$

动能变化：
$$\Delta E_k=\frac{1}{2}J\omega'^2-\frac{1}{2}(J+J_人)\omega^2=\frac{J+mR^2}{2J}mR^2\omega^2$$

3−T9: 一条长 $l=0.4$ m 的均匀木棒，质量 $M=1.0$ kg，可绕水平轴 O 在铅垂面内转动，开始时棒自然地铅直悬垂，有质量 $m=8$ g 的子弹以 $v=200$ m/s的速率从 A 点射入棒中，假定 A 点与 O 点的距离为 $3l/4$（图 5-7）。求：

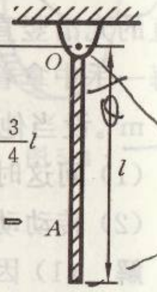


图 5-7

（1）棒开始转动时的角速度；

（2）棒的最大偏转角。

解 （1）子弹射入过程，棒及子弹角动量守恒，即

$$mvr=J\omega+mr^2\omega \qquad ①$$

由题意有
$$r=\frac{3}{4}l \qquad ②$$

$$J=\frac{1}{3}Ml^2 \qquad ③$$

将式②、式③代入式①，化简得

$$\omega=\frac{36mv}{(16M+27m)l}=\frac{36\times8\times10^{-3}\times2\times10^2}{(16\times1+27\times8\times10^{-3})\times4\times10^{-1}}\ \text{rad/s}$$
$$=8.89\ \text{rad/s}$$

（2）当棒与子弹整体转动时，系统机械能守恒，即

$$\frac{1}{2}J\omega^2+\frac{1}{2}m(r\omega)^2=\frac{l}{2}Mg(1-\cos\theta)+\frac{r}{2}mg(1-\cos\theta)$$

应为r

由式②、式③及 $m\ll M$，有

M>>m

$$1-\cos\theta=\frac{J\omega^2}{Mgl}\approx\frac{l\omega^2}{3g}=\frac{4\times10^{-1}\times8.9^2}{3\times9.8}=1.07$$

影响很小

$$\theta=94°27'$$

3-T10【5-19】 如图 5-8 所示，一质量 M、长 l 的均匀细杆，以 O 点为轴，从静止在与竖直方向成 θ_0 角处自由下摆，到竖直位置时，与光滑桌面上一质量为 m 的静止物体（可视为质点）发生弹性碰撞，求碰撞后 M 的角速度 ω_M 和 m 的线速度 v_m。$\left(\text{其中}, J=\frac{1}{3}Ml^2\text{。}\right)$

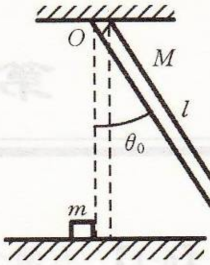


图 5-8

解　细杆自由下摆，能量守恒，即

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}Ml^2\cdot\omega^2=Mg\,\frac{l}{2}(1-\cos\theta_0)$$

得
$$\omega=\sqrt{\frac{3g}{l}(1-\cos\theta_0)} \qquad ①$$

杆与物体在弹性碰撞过程中对转轴的角动量守恒，有

$$\frac{1}{3}Ml^2\omega=\frac{1}{3}Ml^2\omega_M+mlv_m \qquad ②$$

由机械能守恒，有

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}Ml^2\omega^2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}Ml^2\omega_M^2+\frac{1}{2}mv_m^2 \qquad ③$$

由式①、式②、式③，可得

$$\omega_M=\frac{M-3m}{M+3m}\sqrt{\frac{3g}{l}(1-\cos\theta_0)}$$

$$v_m=\frac{2M}{M+3m}\sqrt{3gl(1-\cos\theta_0)}$$

4-T1（6）．假设水在不均匀的水平管道中作稳定流动。已知出口处截面积是管中最细处截面积的 3 倍，出口处的流速为 2.0 m/s，求最细处的流速和压强各为多少？若在最细处开一小孔，请判断水是否能够流出来？

4-T1．解：已知 $h_1=h_2$，$S_2=3S_1$，$v_2=2.0$ m/s，$p_2=p_0$，根据连续性方程和伯努利方程知：

$S_1v_1=S_2v_2$，解得 $v_1=6.0$ m/s

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho gh_1+p_1=\frac{1}{2}\rho v_2^2+\rho gh_2+p_2$$

$$p_1=p_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2-\frac{1}{2}\rho v_1^2=1.013\times10^5+\frac{1}{2}\times10^3\times(2^2-6^2)(\text{Pa})\approx8.5\times10^4\ (\text{Pa})$$

因为 $p_1<p_0$，所以水不会流出。

4-T2（11）．水从一截面为 10 cm^2 的水平管 *A*，流入两根并联的水平支管 *B* 和 *C*，它们的截面积分别为 8 cm^2 和 6 cm^2。如果水在管 *A* 中的流速为 1.00 m/s，在管 *C* 中的流速为 0.50 m/s。问：（1）水在管 *B* 中的流速是多大；（2）*B*、*C* 两管中的压强差是多少；（3）哪根管中的压强最大。

4-T2．解：已知 S_A=10 cm^2，S_B=8 cm^2，S_C=6 cm^2，v_A=100 cm/s=1.00 m/s，v_C=50 cm/s=0.50 m/s

（1） 根据连续性方程知：$S_A v_A = S_B v_B + S_C v_C$

$$v_B = \frac{S_A v_A - S_C v_C}{S_B} = 0.875 \text{（m/s）}$$

（2） 根据伯努利方程知：

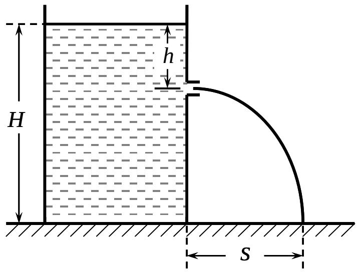
***A*、*B* 两处：** $\frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g h_A + p_A = \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g h_B + p_B$

***A*、*C* 两处：** $\frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g h_A + p_A = \frac{1}{2}\rho v_C^2 + \rho g h_C + p_C$

因此，$p_B - p_C = \frac{1}{2}\rho(v_C^2 - v_B^2) = -258$ （Pa）

（3）由以上两个方程知：$v_A > v_B > v_C$ 则：$p_A < p_B < p_C$，即 ***C*** 管压强最大。

4-T3（13）．如图所示，一开口水槽中的水深为 H，在水槽侧壁水面下 h 深处开一小孔。问：（1）从小孔射出的水流在地面上的射程 s 为多大；（2）能否在水槽侧壁水面下的其他深度处再开一小孔，使其射出的水流有相同的射程；（3）分析小孔开在水面下多深处射程最远；（4）最远射程为多少。



习题 4-T3 图

4-T3．解：（1）根据小孔流速和平抛运动规律可得

$$v=\sqrt{2gh} \text{ 和 } H-h=\frac{1}{2}gt^2$$

从小孔射出的水流在地面上的射程为 $s=vt=\sqrt{2gh}\cdot\sqrt{\dfrac{2(H-h)}{g}}=2\sqrt{h(H-h)}$

（2）设在水槽侧壁水面下 h' 处再开一小孔，其射出的水流有相同的射程，同样推导得：$s=2\sqrt{h'(H-h')}=2\sqrt{h(H-h)}$

解得　　$h'=H-h$

（3）根据 $s=2\sqrt{h'(H-h')}$ 得，$h'=\dfrac{1}{2}H$，水流射程最远

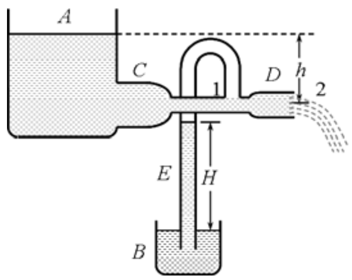
（4）当 $h'=\dfrac{1}{2}H$ 时，最远射程为 $s_{\max}=H$

4-T4（15）．在一个顶部开启、高度为 0.1 m 的直立圆柱型水箱内装满水，水箱底部开有一小孔，已知小孔的横截面积是水箱的横截面积的 1/400。求通过水箱底部的小孔将水箱内的水流尽需要多少时间？

4-T4．解：已知：$h_1=0.1$ m，$S_2=S_1/400$，随着水的流出，水位不断下降，流速逐渐减小，根据小孔流速规律知在任意水位处水的流速为：$v_2\approx\sqrt{2gh}$，该处厚度为 $-\mathrm{d}h$ 的一薄层从小孔流出时间为 $\mathrm{d}t=\dfrac{-S_1\mathrm{d}h}{S_2v_2}=\dfrac{-S_1\mathrm{d}h}{S_2\sqrt{2gh}}$，整个水箱的水流尽所需时间为

$$t=\int_{h_1}^{0}\frac{-S_1\mathrm{d}h}{S_2\sqrt{2gh}}=\int_{0.1}^{0}\frac{-400\mathrm{d}h}{\sqrt{2\times9.8\times h}}(\mathrm{s})=\frac{-400}{\sqrt{2\times9.8}}\times2\sqrt{h}\Big|_{0.1}^{0}(\mathrm{s})=57\text{（s）}$$

4-T5（16）．如图所示，两个很大的开口容器 A 和 B，盛有相同的液体。由容器 A 底部接一水平非均匀管 CD，水平管的较细部分 1 处连接到一倒 U 形管 E，并使 E 管下端插入容器 B 的液体内。假设液流是理想流体作稳定流动，且 1 处的横截面积是 2 处的一半，水平管 2 处比容器 A 内的液面低 h，问 E 管中液体上升的高度 H 是多少？



习题 4-T5 图

4-T5．解：已知截面积 $S_1=\dfrac{1}{2}S_2$，由连续性方程得

$v_1=\dfrac{S_2}{S_1}v_2=2v_2$，考虑到 A 槽中的液面流速相对于出口处的流速很小，由伯努利方程求得

$$v_2=\sqrt{2gh}$$

对 1、2 两点列伯努利方程：$p_1+\dfrac{1}{2}\rho v_1^2=p_2+\dfrac{1}{2}\rho v_2^2$

因为，$p_2=p_0$(大气压），所以，$p_1=p_0-3\rho gh$，即 1 处的压强小于 p_0，又因为 B 槽液面的压强也为 p_0，故 E 管中液柱上升的高度 H 应满足：　$p_1+\rho gH=p_0$

解得　　　　　　　　　　　$H=3h$

4-T6（21）．在一开口的大容器中装有密度 $\rho=1.9\times10^3$ kg/m³ 的硫酸。硫酸从液面下 H=5 cm 深处的水平细管中流出，已知细管半径 R=0.05 cm、长 L=10 cm。若测得 1 min 内由细管流出硫酸的质量 $m=6.54\times10^{-4}$ kg，试求此硫酸的黏度？

4-T6．解：已知硫酸密度 $\rho=1.9\times10^3$ kg/m³。水平细管在液面下 H=5 cm 深处，细管半径 R=0.05 cm、长 L=10 cm，水平细管两端的压强差为

$$\Delta p=p_0+\rho gh-p_0=\rho gh=1.9\times10^3\times9.8\times0.05(\text{Pa})=931(\text{Pa})$$

由于测得 1 min 内由细管流出硫酸的质量 $m=6.54\times10^{-4}$ kg，则其体积流量为

$$Q=\frac{m}{\rho t}=\frac{6.54\times10^{-4}}{1.9\times10^3\times60}(\text{m}^3/\text{s})=5.74\times10^{-9}(\text{m}^3/\text{s})$$

再根据泊肃叶定律可得硫酸的黏度

$$\eta=\frac{\pi R^4}{8QL}(p_1-p_2)=\frac{\pi\times(0.05\times10^{-2})^4}{8\times5.74\times10^{-9}\times0.1}\times931\ (\text{Pa·s})=3.98\times10^{-2}\ \text{Pa·s}$$

4-T7（20）. 一条半径 r_1=3.0×10^{-3} m 的小动脉被一硬斑部分阻塞，此狭窄处的有效半径 r_2=2.0×10^{-3} m，血流平均速度 v_2=0.50 m/s。已知血液黏度 $\eta = 3.00\times10^{-3}$ Pa·s，密度 $\rho = 1.05\times10^{3}$ kg/m^3。试求：（1）未变狭窄处的平均血流速度？（2）狭窄处会不会发生湍流？（3）狭窄处的血流动压强？

4-T7． 解：已知血液黏度 $\eta = 3.00\times10^{-3}$ Pa·s，密度 $\rho = 1.05\times10^{3}$ kg/m^3，小动脉的半径 r_1=3.0×10^{-3} m，狭窄处的有效半径 r_2=2.0×10^{-3} m，血流平均速度 v_2=0.50 m/s

（1） 根据连续性方程知：$S_1v_1=S_2v_2$

$$v_1 = \frac{S_2 v_2}{S_1} = \frac{r_2^2}{r_1^2}v_2 = \frac{2^2}{3^2}\times 0.50(s) = 0.22 \quad \text{(m/s)}$$

（2） $$Re = \frac{\rho v d_2}{\eta} = \frac{1.05\times10^3\times0.5\times4\times10^{-3}}{3\times10^{-3}} = 700 < 2000$$，不会发生湍流。

（3） $$P_{动} = \frac{1}{2}\rho v_2^2 = \frac{1}{2}\times1.05\times10^3\times0.5^2 = 131 \quad \text{(Pa)}$$

4-T8（24）． 一个半径 r=1.0×10^{-3} m 的小钢球在盛有甘油的量筒中下落，已知钢和甘油的密度分别为 $\rho = 8.5\times10^3$ kg/m^3，$\rho' = 1.32\times10^3$ kg/m^3，甘油黏度 $\eta = 0.83$ Pa·s。求小钢球的收尾速度是多少？

4-T8． 解：已知小钢球的半径 r=1.0×10^{-3} m，钢和甘油的密度分别为 $\rho = 8.5\times10^3$ kg/m^3，$\rho' = 1.32\times10^3$ kg/m^3，甘油黏度 $\eta = 0.83$ Pa·s，则小钢球的收尾速度为

$$v_T = \frac{2}{9}\frac{gr^2}{\eta}(\rho-\rho') = \frac{2}{9}\times\frac{9.8\times(1.0\times10^{-3})^2}{0.83}\times(8.5\times10^3 - 1.32\times10^3) \quad \text{(m/s)}$$

=1.88×10^{-2} m/s =1.88 cm/s

习题解答 2

5-T1 【6-6】 假定一个粒子在S'系的$x'y'$平面内以$\frac{c}{2}$的恒定速度运动，$t'=0$时，粒子通过原点O'，其运动方向与x'轴成$60°$角。如果S'系相对于S系沿x轴方向运动的速度为$0.6c$，试求由S系所确定的粒子的运动方程。

解　在S'系中的观测者所确定的运动方程为

$$x'=u'_x t'=\frac{c}{2}\cos 60°\cdot t' \tag{①}$$

$$y'=u'_y t'=\frac{c}{2}\sin 60°\cdot t' \tag{②}$$

由洛伦兹变换，可知式①变换为

$$\frac{x-vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=\frac{c}{2}\cos 60°\cdot\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

得

$$x=0.739ct$$

式②变换为

$$y=y'=\frac{c}{2}\sin 60°\cdot\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

得

$$y=0.302ct$$

因而由S系所确定的粒子的运动方程是

$$\begin{cases}x=0.74ct\\ y=0.30ct\end{cases}$$

5-T2 【6-8】 一高速列车以 0.6c 的速率沿平直轨道运动，车上 A、B 两人相距 $L=10$ m，B 在车前，A 在车后。当列车通过一站台的时候，突然发生枪战事件，站台上的人看到 A 先向 B 开枪，过了 12.5 ns，B 才向 A 开枪，因而站台上的人作证：这场枪战是由 A 挑起的。假如你是车中的乘客，你看见的情况是怎样的？

解 设列车为 S' 系，站台为 S 系，用洛伦兹坐标变换式的逆变换式得

$\Delta t=\gamma(\Delta t'+\frac{v}{c^2}\Delta x')$

$\Delta t=t_B-t_A=12.5ns$

$\Delta x'=x_B'-x_A'=10m$

$\Delta t'=t_B'-t_A'=-10ns$

$$t_B-t_A=\frac{t'_B+\frac{v}{c^2}x'_B}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}-\frac{t'_A+\frac{v}{c^2}x'_A}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

将 $t_B-t_A=12.5\times10^{-9}$ s，$x'_B-x'_A=10$ m，$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-0.6^2}}=1.25$ 代入上式，得

$$t'_B-t'_A=-10\times10^{-9}\text{ s}=-10\text{ ns}$$

可见，$t'_A>t'_B$，即车中乘客认为 B 先开枪，过了 10 ns 后 A 才开枪。

5-T3 【6-14】 某种介子静止时的寿命是 10^{-8} s。若它在实验室中的速度为 2×10^8 m/s，则在它的一生中能飞行多少米？

解 介子静止时的寿命是固有时间，由于它相对于实验室运动，因而从实验室观测得此介子的寿命为

$$t'=\frac{t}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=\frac{10^{-8}}{\sqrt{1-\left(\frac{2\times10^8}{3\times10^8}\right)^2}}\text{ s}=\frac{3\times10^{-8}}{\sqrt{5}}\text{ s}$$

所以 $$s=vt'=2\times10^8\times\frac{3\times10^{-8}}{\sqrt{5}}\text{ m}=\frac{6}{\sqrt{5}}\text{ m}=2.68\text{ m}$$

5-T4【6-16】 在 S 系中有一个静止的正方形，其面积为 $100\ \mathrm{m}^2$，观察者 S' 以 $0.8c$ 的速度沿正方形的对角线运动，S' 测得的该面积是多少？

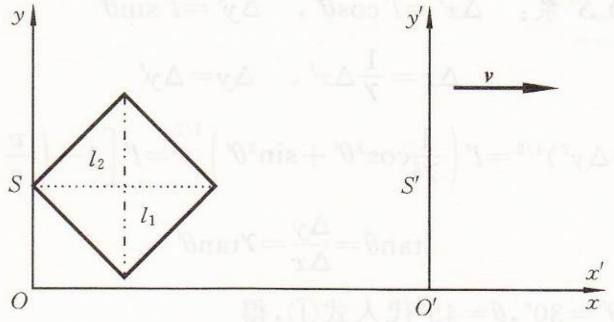


图 6-2

解 设正方形在 S 系中每边长为 L，其对角线长为 $\sqrt{2}L$，如图 6-2 所示。因是相对运动，在 S' 系中对角线 l_2 不变，等于 $\sqrt{2}L$，而对角线 l_1 收缩为

$$l_1' = \sqrt{2}L\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

于是在 S' 系中观测得的面积

$$S' = \frac{1}{2}l_2' l_1' = \frac{1}{2}(\sqrt{2}L)^2\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = L^2\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

$$= 100\sqrt{1-(0.8)^2}\ \mathrm{m}^2 = 60\ \mathrm{m}^2$$

5－T5：S系与S'系是坐标轴相互平行的两个惯性系，S'系相对S系沿X轴正向匀速运动。一根刚性尺静止在S'系中与X'轴成30°角，今在S系中观察得该尺与X轴成45°角，则S'系相对S系的速度是多少？

解： 在S系： $\Delta y = \Delta y'$

$$tg45^o = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \Delta x = \Delta x'\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}$$

在 S' 系：

$$tg30^o = \frac{\Delta y'}{\Delta x'} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\sqrt{1-\left(v/c\right)^2} = tg45^o\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}$$

解得：$v = \sqrt{\frac{2}{3}}c$ 尺子的长度同样在S系中缩短。

5-T6 【6-9】 在静止于实验室的放射性物质样品中，有两个电子从放射性原子中沿相反的方向射出。由实验室观察者测得每一个电子的速度为0.67c，根据相对论，两个电子的相对速度应该等于多少？

解 将一个电子视为S系，样品视为S'系，另一个电子视为物体，来求物体相对S系的速度，于是

$$u'=0.67c,\quad v=0.67c$$

$$u=\frac{u'+v}{1+\frac{v}{c^2}u'}=\frac{0.67c+0.67c}{1+0.67^2}=0.92c$$

5-T7 【6-10】 一原子核以0.5c的速度离开一观察者而运动，原子核在它运动方向上向前发射一电子，该电子相对于核有0.8c的速度；此原子核又向后发射了一光子，该光子指向观察者，对静止的观察者来讲，

(1) 电子具有多大的速度？

(2) 光子具有多大的速度？

解 (1) $u_{电子}=\dfrac{u'+v}{1+\frac{v}{c^2}u'}=\dfrac{0.8c+0.5c}{1+\frac{0.5c}{c^2}\times 0.8c}=0.93c$

(2) 由狭义相对论的两个基本假设之一——光速不变原理可知，光子速度仍为c。

5-T8 【6-11】 在$t=0$时，S系观察者发射一个与x轴成60°角的方向上飞行的光子，S'系以0.6c的速度沿公共轴x, x'飞行。问S'系的观察者测得光子与x'轴所成的角度是多大？速度是多大？

解 (1) $u_x=c\cdot\cos 60°=0.500c,\quad u_y=c\cdot\sin 60°=0.866c$

$$u'_x=\frac{u_x-u}{1-\frac{v}{c^2}u_x}=\frac{0.5c-0.6c}{1-\frac{0.6c\times 0.5c}{c^2}}=-\frac{1}{7}c=-0.143c$$

$$u'_y=\frac{u_y\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1-\frac{v}{c^2}u_x}=\frac{0.866c\times\sqrt{1-\left(\frac{0.6c}{c}\right)^2}}{1-\frac{0.6c\times 0.5c}{c^2}}=\frac{4\sqrt{3}}{7}c=0.990c$$

所以 $$\tan\phi'=\frac{u'_y}{u'_x}=\frac{0.990c}{-0.143c}=-6.92$$

即光子与x'轴负方向夹$\phi'=81.8°$，也就是与x'轴成98.2°的角度。

(2) 根据光速不变原理，S'系中光子速度依然为c，或者按下式求

$$u'=\sqrt{(u'_x)^2+(u'_y)^2}=\sqrt{(-0.143c)^2+(0.990c)^2}=c$$

这是必然的结果。

5-T9 **【6-19】** 两飞船，在自己的静止参考系中测得各自的长度均为 100 m。飞船甲上仪器测得飞船甲的前端驶完飞船乙的全长需$\frac{5}{3}\times10^{-7}$s。求两飞船的相对速度的大小。

解 由运动的相对性可知，乙船全长驶过甲船前端所需时间为$\frac{5}{3}\times10^{-7}$s。100 m 是乙船固有长度，由甲船上来观测，乙船的长度收缩为 $l=\frac{l_0}{\gamma}$，即

$$l=l_0\sqrt{1-(v/c)^2}$$

所以

$$t=\frac{l_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{v}$$

$$v=\frac{l_0c}{\sqrt{t^2c^2+l_0^2}}=\frac{100c}{\sqrt{\left(\frac{5}{3}\times10^{-7}\times3\times10^8\right)^2+100^2}}=\frac{2c}{\sqrt{5}}=0.894c$$

5-T10 **【6-23】** 一个粒子，(1) 从静止加速到 $0.100c$ 时，(2) 从 $0.900c$ 加速到 $0.980c$ 时，各需要外力对粒子作多少功？

解 (1)
$$A=mc^2-m_0c^2=(\gamma-1)m_0c^2$$

$$\gamma=\left[1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-1/2}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2=1.005\qquad\left(\frac{v}{c}=0.1\right)$$

$$A=\frac{1}{2}\times10^{-2}m_0c^2=5.00\times10^{-3}m_0c^2$$

(2)
$$A=m_2c^2-m_1c^2=(\gamma_2-\gamma_1)m_0c^2$$

$$\gamma_2=(1-0.98^2)^{-1/2}=5.025,\quad \gamma_1=(1-0.9^2)^{-1/2}=2.294$$

$$A=(5.025-2.294)m_0c^2=2.73m_0c^2$$

5-T11 **【6-27】** 试计算动能为1 MeV 的电子的动量。(1 MeV$=10^6$eV。)

解 由动量能量关系式，有

$$E^2=(E_k+m_0c^2)^2=(pc)^2+(m_0c^2)^2 \tag{①}$$

式中，一个电子的静止能是

$$m_0c^2=9.109\times10^{-31}\times(2.998\times10^8)^2\,\text{J}=8.187\times10^{-14}\,\text{J}=0.511\text{ MeV}$$

将数值代入式①，得

$$(1\text{ MeV}+0.511\text{ MeV})^2=(pc)^2+(0.511\text{ MeV})^2$$

得到
$$p=\frac{1.42\text{ MeV}}{c}=\frac{1.42\times10^6\times1.60\times10^{-19}}{3\times10^8}\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$
$$=7.57\times10^{-22}\text{kg}\cdot\text{m/s}$$

5-T12【6-28】 一个质量数为42 u 的静止粒子，蜕变成两个碎片，其中一个碎片的静质量数为20 u，以速率$\frac{3}{5}c$ 运动，求另一碎片的动量 p、能量 E、静质量 m_0。($1\ \mathrm{u}=1.66\times10^{-27}\ \mathrm{kg}$。)

解 由能量守恒，有

$$m_0'c^2=m_1c^2+E_2$$

$$\begin{aligned}E_2&=m_0'c^2-m_1c^2\\&=\left[42\times1.66\times10^{-27}\times(3\times10^8)^2-\frac{20\times1.66\times10^{-27}\times(3\times10^8)^2}{\sqrt{1-(3/5)^2}}\right]\mathrm{J}\\&=2.536\times10^{-9}\ \mathrm{J}\end{aligned}$$

由动量守恒，有

$$m_1v+p=0$$

得

$$|p|=|-m_1v|=\frac{20\times1.66\times10^{-27}\times\frac{3}{5}c}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}}$$

$$=7.47\times10^{-18}\ \mathrm{kg\cdot m/s}$$

由动量能量关系 $E^2=(pc)^2+(m_0c^2)^2$，其中，$E=E_2=2.536\times10^{-9}$ J，得

$$m_0=\frac{\sqrt{E^2-(pc)^2}}{c^2}=\frac{\sqrt{(2.536\times10^{-9})^2-(7.47\times10^{-18}\times3\times10^8)^2}}{(3\times10^8)^2}\ \mathrm{kg}$$

$$=1.32\times10^{-26}\ \mathrm{kg}=8\ \mathrm{u}$$

6-T1【9-10】 如图 9-4 所示的一个细的带电塑料圆环，半径为 R，所带线电荷密度 λ 和 θ 有 $\lambda=\lambda_0\sin\theta$ 的关系。求在圆心处的电场强度的方向和大小。

解 在圆环上与角度 θ 相应的点的附近取一长度 $\mathrm{d}l$，其上电量

$$\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}l=\lambda_0\sin\theta\mathrm{d}l$$

该电荷在 O 点产生的场强大小为

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\lambda_0 \sin\theta dl}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

注意到 $dl = Rd\theta$，则

$$dE = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\sin\theta d\theta$$

$d\boldsymbol{E}$ 的方向与 θ 有关，在图9-4 中，$d\boldsymbol{E}$ 的方向与电荷 dq 对 O 点的径矢方向相反。$d\boldsymbol{E}$ 在二坐标轴上的分量分别为

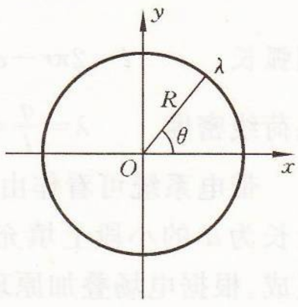


图 9-4

$$dE_x = -dE\cos\theta = -\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\sin\theta\cos\theta d\theta$$

$$dE_y = -dE\sin\theta = -\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\sin^2\theta d\theta$$

整个圆环上电荷在圆心处产生的场强的两个分量分别为

$$E_x = \int dE_x = -\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta d\theta = 0$$

$$E_y = \int dE_y = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta = \frac{\lambda_0}{4\varepsilon_0 R}$$

所以圆心处场强为

$$\boldsymbol{E} = E_y\boldsymbol{j} = -\frac{\lambda_0}{4\varepsilon_0 R}\boldsymbol{j}$$

6-T2 【9-9】 一无限大带电平面，带有密度为 σ 的面电荷，如图9-3 所示。试证明：在离开平面为 x 处一点的场强有一半是由图中半径为 $\sqrt{3}x$ 的圆内电荷产生的。

解　带电圆面在轴线上的场强为

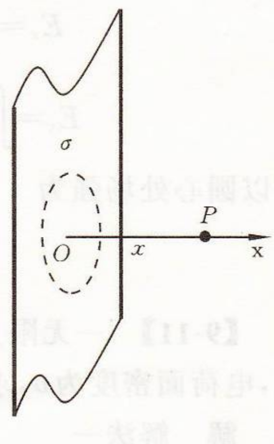


图 9-3

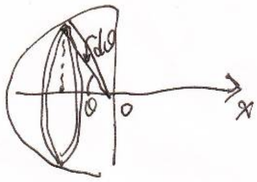
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right]$$

当 $R = \sqrt{3}x$ 时，

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}E'$$

E' 为无限大均匀带电平面外的场强，$E' = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$。证毕。

6-T3.



$$dq = \sigma\, 2\pi(R\sin\theta)\cdot R\,d\theta = 2\pi\sigma R^2 \sin\theta\, d\theta$$

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta = \frac{2\pi\sigma R^2 \sin\theta\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\, d\theta$$

$$E = \int dE = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\, d\theta = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$$，方向沿 x 轴正向。

6-T4【9-13】 一厚度为 d 的非导体平板，具有均匀电荷密度 ρ，求板内及板外各处的电场强度值。

解 如图 9-7(a)所示，在平板内取一厚度为 dx 且与板面平行的薄层，这就是一个无限大均匀带电平面，其面电荷密度为 $\sigma=\rho dx$。它在板外右侧的任意点 P 产生的场强是

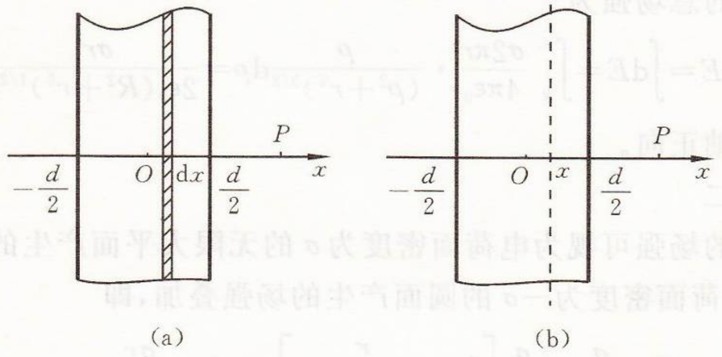


图 9-7

$$dE=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}dx$$

整个带电平板是由无限多平行均匀带电薄层连续组成的，每一带电薄层在 P 点产生的电场方向相同，根据场强叠加原理，P 点的场强大小为

$$E=\int dE=\int_{-d/2}^{d/2}\frac{\rho}{2\varepsilon_0}dx=\frac{\rho d}{2\varepsilon_0} \quad ①$$

由式①可知，在板外右侧的电场是均匀电场。同理可得在板外左侧的场强大小与右侧相同，但方向相反。

在板内部坐标为x处作一平面与x轴垂直(图9-7(b)),这一平面把平板分为左、右两部分,根据式①,左部分电荷在平面上任意一点的场强为

$$E_1=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(\frac{d}{2}+x\right)$$

右部分电荷在平面上同一点的场强为

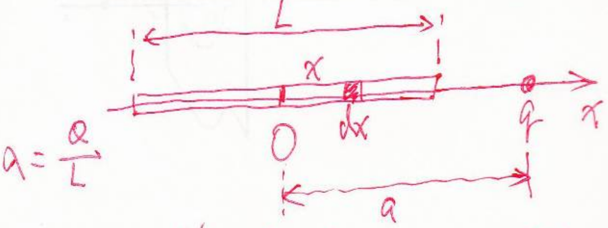
$$E_2=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(\frac{d}{2}-x\right)$$

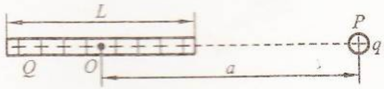
$\boldsymbol{E}_1$与$\boldsymbol{E}_2$方向相反,该点合场强为

$$E=E_1-E_2=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}x \times 2=\frac{\rho}{\varepsilon_0}x$$

当$x>0$时,$\boldsymbol{E}$与x轴同向;当$x<0$时,$\boldsymbol{E}$与x轴反向。

6-T5 电量$Q(Q>0)$均匀分布在长为L的细棒上,在细棒的延长线上至细棒中心O距离为a的P点处放一带电量为$q(q>0)$的点电荷。求带电细棒对该点电荷的静电力。





$$\lambda=\frac{Q}{L}$$

$$F=\int_{-L/2}^{L/2}\frac{q\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0(a-x)^2}=-\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 L}\int_{a+\frac{L}{2}}^{a-\frac{L}{2}}\frac{d(a-x)}{(a-x)^2}$$

$$=\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0\left(a+\frac{L}{2}\right)\left(a-\frac{L}{2}\right)}$$

6-T6 **【9-16】** (1) 点电荷q位于边长为a的正立方体的中心，通过此立方体的每一面的电通量各是多少？

(2) 若点电荷移至正立方体的一个顶点上，那么通过每个面的电通量又各是多少？

解 (1) 点电荷q位于正立方体的中心，正立方体的六个面对该电荷来说都是等同的。因此通过每个面的电通量相等，且等于总电通量的1/6。对正立方体的某一面，其电通量为

$$\Phi_{E1}=\int_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{1}{6}\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

根据高斯定理，有

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

所以 $$\Phi_{E1}=\frac{q}{6\varepsilon_0}$$

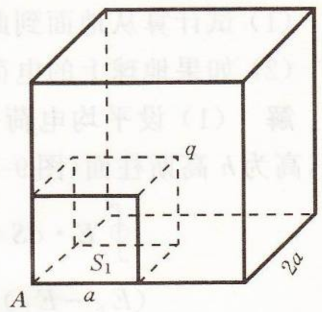


图 9-9

(2) 当点电荷移至正立方体的一个顶点上时，设想以此顶点为中心，作边长为$2a$且与原边平行的大正方体，如图9-9所示。与(1)相同，这个大正方体的每个面上的电通量都相等，且均等于$\frac{q}{6\varepsilon_0}$，对原正方体而言，只有交于A点的三个面上有电场线穿过，每个面的面积是大正方体一个面的面积的$\frac{1}{4}$，则每个面的电通量也是大正方体一个面的电通量的$\frac{1}{4}$，即$\frac{q}{24\varepsilon_0}$，原正方体的其他不与$A$点相交的三个面上的电通量均为零。

6-77 **【9-21】** 一半径为R的带电球，其电荷体密度为$\rho=\rho_0\left(1-\dfrac{r}{R}\right)$，$\rho_0$为一常量，$r$为空间某点至球心的距离。试求：

(1) 球内、外的场强分布；

(2) r为多大时，场强最大？等于多少？

解 由于电荷球对称分布，故电场也球对称分布。利用高斯定理，取半径为r的同心高斯球面。

(1) 当$r<R$时，有

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r \rho_0\left(1-\frac{r}{R}\right)4\pi r^2\mathrm{d}r$$

则

$$E\cdot 4\pi r^2=\frac{4\pi\rho_0 r^3}{3\varepsilon_0}\left(1-\frac{3r}{4R}\right)$$

所以球内的场强为

$$E=\frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\left(1-\frac{3r}{4R}\right)$$

当$r>R$时，有

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^R \rho_0\left(1-\frac{r}{R}\right)4\pi r^2\mathrm{d}r$$

则

$$E\cdot 4\pi r^2=\frac{\pi\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0}$$

所以球外的场强为

$$E=\frac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 r^2}$$

(2) 球外无极值，在球内令$\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r}=0$，得

$$r=\frac{2}{3}R$$

即在球内$\dfrac{2}{3}R$处有最大场强

$$E_{\max}=\frac{\rho_0 R}{9\varepsilon_0}$$

6-T8 【9-22】 电荷均匀分布在半径为R的无限长圆柱体内，求证：离柱轴r ($r<R$)远处的E值由下式给出：

$$E=\frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$$

式中，ρ是电荷体密度(C/m^3)。当$r>R$时，结果如何？

解 由于电荷分布是轴对称的，所以电场具有轴对称性。取半径为r、高为h的共轴圆柱面为高斯面，根据高斯定理，当$r<R$时，有

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=E\cdot 2\pi rh=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho\pi r^2 h$$

即
$$E=\frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$$

当$r>R$时，有

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=E\cdot 2\pi rh=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho\pi R^2 h$$

即
$$E=\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

式中，$\lambda=\rho\pi R^2$为单位长度上的电荷密度。可见无限长均匀带电圆柱体在其体外产生的场强，相当于全部电荷集中分布在轴线上的无限长带电直线产生的场强。

6-T9 【9-24】 在两个同心球面之间($a<r<b$)，电荷体密度$\rho=\frac{A}{r}$，式中A为常量。在带电区域所围空腔的中心($r=0$)，有一个点电荷Q，问A应为何值，才能使$a<r<b$的区域中电场强度的大小为常数？

解 作半径为$r(a<r<b)$的球面，并将此球面作为高斯面，根据高斯定理，有

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\int_a^r \frac{A}{r'}4\pi r'^2 dr'+Q\right)$$

$$E\cdot 4\pi r^2=\frac{1}{\varepsilon_0}\left[Q+4\pi A\cdot\frac{1}{2}(r^2-a^2)\right]$$

即
$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[2\pi A-\underbrace{2\pi A\frac{a^2}{r^2}+\frac{Q}{r^2}}_{=0\text{ 即可}}\right]$$

要在$a<r<b$区间使E不随r的变化而变化，必须$\frac{dE}{dr}=0$，则必有

$$-\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r^3}+\frac{Aa^2}{\varepsilon_0 r^3}=0$$

故有
$$A=\frac{Q}{2\pi a^2}$$

6-T10【9-5】 两根无限长的均匀带电直线相互平行，相距为 $2a$，线电荷密度分别为 $+\lambda$ 和 $-\lambda$，求每单位长度的带电直线所受的作用力。

解 设带电直线 1 的线电荷密度为 $+\lambda$，带电直线 2 的线电荷密度为 $-\lambda$。根据教材中例题 9-4，可得带电直线 1 在带电直线 2 处产生的场强为

$$\boldsymbol{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(2a)}\boldsymbol{e}_r$$

在带电直线 2 上取电荷元 $\mathrm{d}q$，由场强的定义得该电荷元受的作用力为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=\mathrm{d}q\cdot\boldsymbol{E}$$

带电直线 1 对带电直线 2 单位长度上的电荷的作用力为

$$\boldsymbol{F}_{12}=\int\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}q=\int_0^1\frac{\lambda\boldsymbol{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 a}(-\lambda)\mathrm{d}l=-\frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\boldsymbol{e}_r$$

同理，带电直线 2 对带电直线 1 单位长度上的电荷的作用力为

$$\boldsymbol{F}_{21}=-\boldsymbol{F}_{21}=\frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\boldsymbol{e}_r$$

可见，两带电直线相互吸引。

6-T11【9-26】 (1) 一个球形雨滴半径为 0.40 mm，带有电量 1.6 pC，它表面的电势多大？

(2) 两个这样的雨滴相碰后合成一个较大的球形雨滴，这个雨滴表面的电势又是多大？

解 (1) 假设电荷在雨滴表面均匀分布，则它表面上的电势为

$$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{9\times10^9\times1.6\times10^{-12}}{0.40\times10^{-3}}\ \mathrm{V}=36\ \mathrm{V}$$

(2) 两个雨滴合成一个大的雨滴后，大雨滴上的电量 $q'=2q$，大雨滴的体积 $V'=2V$。设大雨滴的半径为 R'，则

$$\frac{4}{3}\pi R'^3=2\times\frac{4}{3}\pi R^3$$

于是

$$R'=2^{1/3}R$$

所以大雨滴表面的电势为

$$V=\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R'}=\frac{2\times9\times10^9\times1.6\times10^{-12}}{2^{1/3}\times0.40\times10^{-3}}\ \mathrm{V}=57\ \mathrm{V}$$

6-T12【9-28】 如图 9-15 所示，一个均匀分布的正电荷球层，电荷体密度为 ρ，球层内表面半径为 R_1，外表面半径为 R_2。试求：

(1) A 点的电势；

(2) B 点的电势。

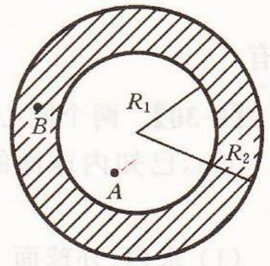


图 9-15

解 由电荷的球对称分布，用高斯定理可求出各区域的电场强度 E。

当 $r<R_1$ 时，

$$E=0$$

当 $R_1<r<R_2$ 时，

$$E\cdot 4\pi r^2=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi(r^3-R_1^3)$$

$$E=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\cdot\frac{r^3-R_1^3}{r^2}$$

当 $r>R_2$ 时，

$$E=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\cdot\frac{R_2^3-R_1^3}{r^2}$$

根据电势的定义，A、B 两点的电势分别为

$$V_A=\int_{r_A}^{R_1}0\cdot \mathrm{d}r+\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\cdot\frac{r^3-R_1^3}{r^2}\mathrm{d}r+\int_{R_2}^{\infty}\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\cdot\frac{R_2^3-R_1^3}{r^2}\mathrm{d}r=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R_2^2-R_1^2)$$

$$V_B=\int_{r_B}^{R_2}\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\cdot\frac{r^3-R_1^3}{r^2}\mathrm{d}r+\int_{R_2}^{\infty}\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\cdot\frac{R_2^3-R_1^3}{r^2}\mathrm{d}r=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left[R_2^2-\frac{1}{3r_B}(r_B^3+2R_1^3)\right]$$

6-T13【9-30】 两个同心的均匀带电球面，半径分别为$R_1=5.0$ cm，$R_2=20.0$ cm，已知内球面的电势为$V_1=60$ V，外球面的电势为$V_2=-30$ V。

(1) 求内、外球面上所带电量；

(2) 在两个球面之间何处的电势为零？

解 (1) 设内、外两球面分别带电荷q_1、q_2，则内球电势为

$$V_1=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \quad ①$$

外球电势为

$$V_2=\frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \quad ②$$

式①、式②联立求解可得内、外球上电量分别为

$$q_1=6.7\times10^{-10}\,\mathrm{C},\quad q_2=-1.3\times10^{-9}\,\mathrm{C}$$

(2) 在两球面之间距球心r处的电势为

$$V=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

令$V=0$，则可解得

$$r=\frac{q_1}{|q_2|}R_2=\frac{6.7\times10^{-10}}{1.3\times10^{-9}}\times0.20\ \mathrm{m}=0.10\ \mathrm{m}$$

6-T14【9-33】 电量q均匀分布在长为$2l$的细直线上，求下列各处的电势：

(1) 中垂面上离带电线段中心O为r处，并利用梯度关系求E_r；

(2) 延长线上离中心O为z处，并利用梯度关系求E_z。

解 (1) 如图9-17(a)所示，当P点在中垂面上时，取电荷元

$$\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}z$$

其在P点处产生的电势为

$$\mathrm{d}V=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$\int\frac{du}{\sqrt{u^2\pm a^2}}=\ln(u+\sqrt{u^2\pm a^2})$

则P点的电势为

$$V=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-l}^{l}\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}\mathrm{d}z=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{l+\sqrt{r^2+l^2}}{r}$$

由电场与电势的梯度关系得

$$E_r=-\frac{\partial V}{\partial r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r\sqrt{r^2+l^2}}$$

(2) 如图9-17(b)所示，当P点在延长线上时，取电荷元

$$\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}x=\frac{q}{2l}\mathrm{d}x$$

其在P点处产生的电势为

$$\mathrm{d}V=\frac{q\mathrm{d}x}{8\pi\varepsilon_0(z-x)l}$$

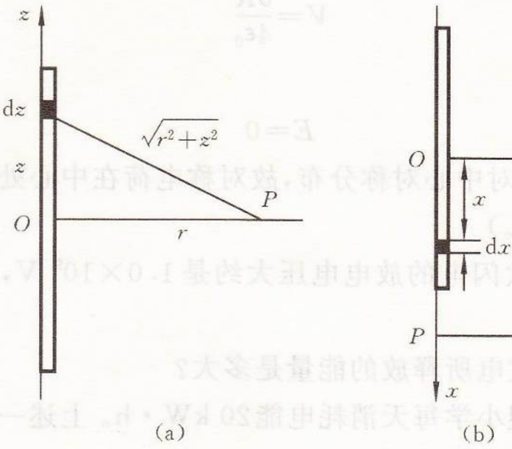


图 9-17

则 P 点的电势为

$$V=\int \mathrm{d}V=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{z+l}{z-l}$$

由电场与电势的梯度关系得

$$E_z=-\frac{\partial V}{\partial z}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(z^2-l^2)}$$

讨论：如果 P 点在 Ox 轴负向，则 $E_z<0$，故

$z<-l$

$$E_z=\pm\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(z^2-l^2)}\quad(z>l,\text{取}+\text{号}；z<l,\text{取}-\text{号})$$

6-T15 **【9-36】** 如图9-18 所示，三块互相平行的均匀带电大平面，电荷面密度分别为 $\sigma_1=1.2\times10^{-4}\ \mathrm{C/m^2}$，$\sigma_2=2.0\times10^{-5}\ \mathrm{C/m^2}$，$\sigma_3=1.1\times10^{-4}\ \mathrm{C/m^2}$。$a$ 点与平面Ⅱ相距为 5.0 cm，b 点与平面Ⅱ相距为 7.0 cm。

(1) 计算 a、b 两点的电势差；

(2) 设把电量 $q_0=-1.0\times10^{-8}\mathrm{C}$ 的点电荷从 a 点移到 b 点，外力克服电场力作多少功？

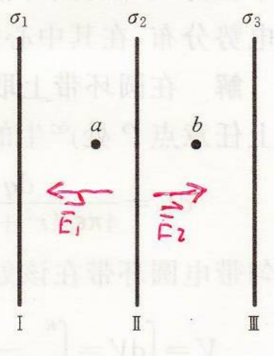


图 9-18

解 (1) 在平面Ⅰ、Ⅱ之间和平面Ⅱ、Ⅲ之间都是均匀电场。根据场强叠加原理，平面Ⅰ、Ⅱ之间的场强大小为

$$E_1=\frac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma_2+\sigma_3-\sigma_1)\quad(\text{方向指向平面Ⅰ})$$

平面Ⅱ、Ⅲ之间的场强大小为

$$E_2=\frac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma_1+\sigma_2-\sigma_3)\quad \text{(方向指向平面Ⅲ)}$$

因为电场线都垂直于平面Ⅱ，所以平面Ⅱ是一等势面。a、b 两点的电势差为

$$V_a-V_b=(V_a-V_{\mathrm{II}})+(V_{\mathrm{II}}-V_b)=-E_1d_1+E_2d_2$$

式中，d_1、d_2 分别为 a、b 两点到平面Ⅱ的距离。因此，a、b 两点的电势差

$$V_a-V_b=-\frac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma_2+\sigma_3-\sigma_1)d_1+\frac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma_1+\sigma_2-\sigma_3)d_2=9.0\times10^4\ \mathrm{V}$$

(2) 把电量 q_0 从 a 点移到 b 点，外力克服电场力作的功为

$$A=-q_0(V_a-V_b)=(1.0\times10^{-8}\times9.0\times10^4)\ \mathrm{J}=9.0\times10^{-4}\ \mathrm{J}$$

6-T16 **【10-2】** 如图 10-2(a)所示，有三块互相平行的导体板，外面的两块用导线连接，原来不带电。中间一块上所带总电荷面密度为 $1.3\times10^{-5}\mathrm{C/m^2}$。求每块板的两个表面的电荷面密度各是多少？(忽略边缘效应。)

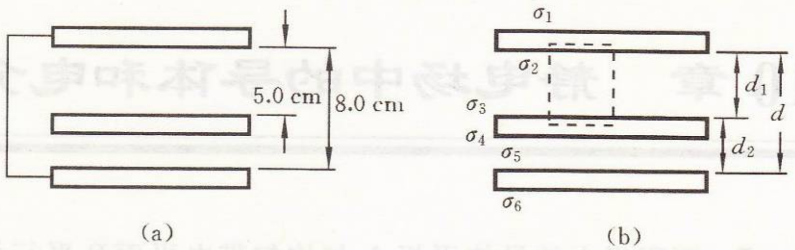


图 10-2

解 从上到下，设各导体板表面上电荷面密度分别为 σ_1、σ_2、σ_3、σ_4、σ_5、σ_6，相邻两板距离分别为 d_1、d_2(图10-2(b))。在上板和中板之间电场方向垂直于板面，作底面为单位面积的闭合圆柱面，两底分别位于二导体板内，圆柱面轴线与板面垂直，则此闭合圆柱面的电通量为零。根据高斯定理，可得

$$\sigma_2=-\sigma_3 \quad ①$$

同理可得

$$\sigma_5=-\sigma_4 \quad ②$$

忽略边缘效应，则导体板可看成是无限大的，具有屏蔽性，在相邻导体板之间的电场只由相对二表面上的电荷决定。因此，上板和中板之间的场强为

$$E_1=\frac{\sigma_3}{\varepsilon_0}$$

下板和中板之间的场强为

$$E_2=\frac{\sigma_4}{\varepsilon_0}$$

上板和下板相连接，因此相邻两板的电势差相等，即 $E_1d_1=E_2d_2$，由此可得

$$\sigma_3 d_1=\sigma_4 d_2 \quad ③$$

中板的总电荷面密度为 σ，则

$$\sigma_3+\sigma_4=\sigma \quad ④$$

由式③、式④两式可得

$$\sigma_3=\frac{d_2}{d_1+d_2}\sigma=\frac{d-d_1}{d}\sigma=\frac{8.0-5.0}{8.0}\times1.3\times10^{-5}\ \mathrm{C/m^2}=4.9\times10^{-6}\ \mathrm{C/m^2}$$

$$\sigma_4=\sigma-\sigma_3=8.1\times10^{-6}\ \mathrm{C/m^2}$$

代入式①、式②两式中，分别得

$$\sigma_2=-4.9\times10^{-6}\ \mathrm{C/m^2}$$

$$\sigma_5=-8.1\times10^{-6}\ \mathrm{C/m^2}$$

在上板内任意一点场强为零，它是6个无限大均匀带电平面在该点产生的场强叠加的结果，即

$$\frac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3-\sigma_4-\sigma_5-\sigma_6)=0$$

将式①、式②两式代入上式，则有

$$\sigma_1=\sigma_6 \quad ⑤$$

上、下两块导体板原来是不带电的。根据电荷守恒定律，两导体板表面出现感应电荷后，总电量仍然为零。因此有

$$\sigma_1+\sigma_2+\sigma_5+\sigma_6=0 \quad ⑥$$

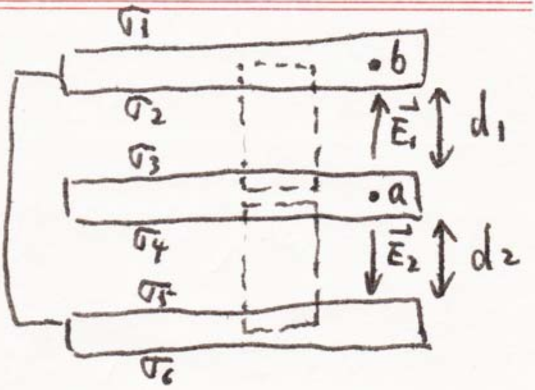
由式⑤、式⑥两式得到

$$\sigma_1=\sigma_6=-\frac{1}{2}(\sigma_2+\sigma_5)=6.5\times10^{-6}\ \mathrm{C/m^2}$$

6-T16:

解:

$$\begin{cases} \sigma_2+\sigma_3=0 & \cdots\cdots ① \\ \sigma_4+\sigma_5=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$



① a点场强为零:

$$\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=\sigma_4+\sigma_5+\sigma_6$$

$$\left.\begin{aligned} E_1&=\frac{\sigma_3+\sigma_4+\sigma_5+\sigma_6-\sigma_1-\sigma_2}{2\varepsilon_0}=\frac{\sigma_3}{\varepsilon_0} \\ E_2&=\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4-\sigma_5-\sigma_6}{2\varepsilon_0}=\frac{\sigma_4}{\varepsilon_0} \end{aligned}\right\}$$ E_1、E_2 由 σ_3、σ_4 确定。

② $E_1 d_1 = E_2 d_2 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_3 d_1=\sigma_4 d_2 & \cdots\cdots ③ \\ \sigma_3+\sigma_4=\sigma & \cdots\cdots ④ \end{cases}$

$\Rightarrow \sigma_3$、σ_4、σ_2、σ_5

③ b点场强为0:

$$\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3-\sigma_4-\sigma_5-\sigma_6=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_1-\sigma_6=0 & \cdots\cdots ⑤ \\ \sigma_1+\sigma_2+\sigma_5+\sigma_6=0 & \cdots\cdots ⑥ \end{cases}$$

$\Rightarrow \sigma_1$、σ_6

6-T17【10-3】 半径为R_1的导体球带有电荷q，球外有一个内、外半径分别为R_2、R_3的同心导体球壳，壳上带有电荷Q，如图10-3所示。

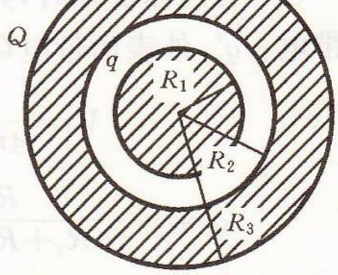


图 10-3

(1) 求两球的电势V_1及V_2；

(2) 求两球的电势差ΔV；

(3) 用导线把球和壳连接在一起后，V_1、V_2及ΔV分别是多少？

(4) 在情形(1)、(2)中，若外球接地，则V_1、V_2及ΔV分别是多少？

(5) 设外球离地面很远，若内球接地，情况如何？

解 (1) 由高斯定理，可得各区域的电场分布：

当$R_1<r<R_2$时，$$E_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

当$R_2<r<R_3$时，$$E_2=0$$

当$r>R_3$时，$$E_3=\frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

两球的电势分别为

$$V_1=\int_{R_1}^{R_2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r+\int_{R_3}^{\infty}\frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{R_1}-\frac{q}{R_2}+\frac{q+Q}{R_3}\right)$$

$$V_2=\int_{R_3}^{\infty}\frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

(2) 两球的电势差为

$$\Delta V=V_1-V_2=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

(3) 用导线将球和球壳连接在一起后，则有

$$V_1=V_2=\int_{R_3}^{\infty}\frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3},\qquad \Delta V=0$$

(4) 当外球接地时，$V_2=0$

$$V_1=\int_{R_1}^{R_2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

$$\Delta V=V_1-V_2=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

(5) 当内球接地时，其电势$V_1=0$。设此时内球带电q'，则球壳内表面带电$-q'$，外表面带电$Q+q'$。故有

$$V_1=\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R_1}-\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R_2}+\frac{q'+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}=0$$

$$q'=-\frac{R_1R_2}{R_1R_2+R_2R_3-R_1R_3}Q<0 \quad \text{（即内球带负电）}$$

$$V_2=\frac{Q+q'}{4\pi\varepsilon_0 R_3}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{R_2-R_1}{R_1R_2+R_2R_3-R_1R_3}。$$

$$\Delta V=V_1-V_2=-V_2$$

6-T18 **【10-5】** 一球形导体A含有两个球形空腔，这导体本身的总电荷为零，但在两空腔中心分别有一个点电荷q_b和q_c，导体球外距导体球很远的r处有另一个点电荷q_d（图10-5）。试求q_b、q_c和q_d各受多大的力？哪个答案是近似的？

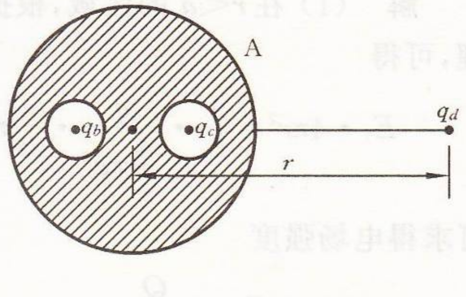


图10-5

解 由于静电屏蔽的原因，点电荷q_b和q_d不能在点电荷q_c所在空腔内产生电场。因此q_c受到的作用力

$$f_c=0$$

同理，q_b受到的作用力

$$f_b=0$$

在导体内作一闭合曲面包围q_b所在空腔。由于导体内场强处处为零，因此闭合曲面的电通量为零。根据高斯定理，空腔壁上有电量$-q_b$。同理，在q_c所在空腔壁上也有电量$-q_c$。这导体本身的总电荷为零，因此在导体外表面上电荷的电量为q_b+q_c。由于q_d距导体球很远，忽略它对导体球外表面电荷的影响，则电荷在外表面上是均匀分布的，它在q_d处产生的场强

$$E=\frac{q_b+q_c}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

q_d受到的作用力

$$f_d=q_dE=\frac{q_d(q_b+q_c)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

显然，这个力的计算是近似的。

6-T19 **【10-7】** 如图10-7所示，球形金属腔带电量为$Q(Q>0)$，内半径为a，外半径为b，腔内距球心O为r处有一点电荷q，求球心O的电势。

解 由高斯定理可得球壳内表面电荷为$-q$。用电势叠加法，球心处电势为

$$V_O = V_q + V_{-q} + V_{Q+q} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

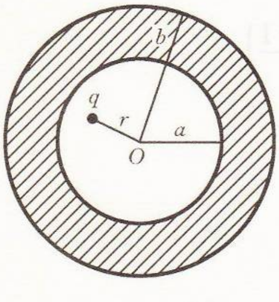


图10-7

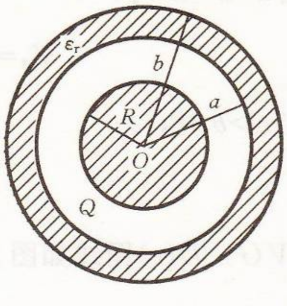


图10-8

6-T20 **【10-8】** 半径为R的导体球，带有电荷Q，球外有一均匀电介质的同心球壳，球壳的内、外半径分别为a和b，相对介电常量为ε_r，如图10-8所示。求：

(1) 各区域的电场强度$\boldsymbol{E}$，电位移矢量$\boldsymbol{D}$及电势V，绘出$E(r)$、$D(r)$及$V(r)$图线；

(2) 介质内的电极化强度$\boldsymbol{P}$和介质表面上的极化电荷面密度σ'。

解 (1) 由电荷的对称分布可知，电场为球对称分布，根据电场的高斯定理，可求得各区域的电场分布。

当$r<R$时，　　$D_1 = 0$，　$E_1 = 0$

当$R<r<a$时，　$D_2=\dfrac{Q}{4\pi r^2}$，　$E_2=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

当$a<r<b$时，　$D_3=\dfrac{Q}{4\pi r^2}$，　$E_3=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$

当$r>b$时，　$D_4=\dfrac{Q}{4\pi r^2}$，　$E_4=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

取$V_\infty=0$,则各区域的电势分布分别为

当$r<R$时，

$$V_1=\int_R^a\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r+\int_a^b\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\mathrm{d}r+\int_b^\infty\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$$
$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R}-\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\right]$$

当$R<r<a$时，

$$V_2=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}-\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\right]$$

当$a<r<b$时，

$$V_3=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon_r-1}{b}\right)$$

当$r>b$时，

$$V_4=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$E(r)$、$V(r)$、$D(r)$图线如图10-9所示。

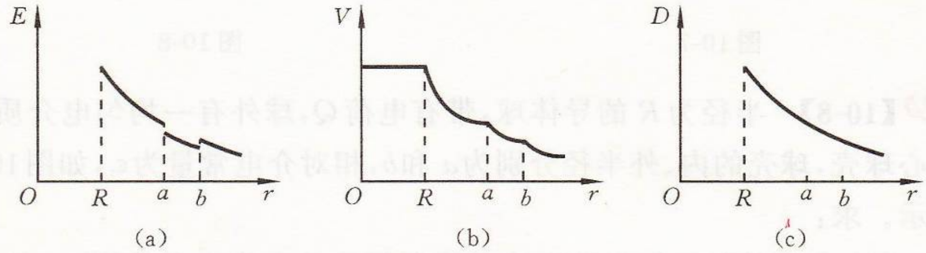


图10-9

(2) 由电场强度可得介质中的电极化强度为

$$P=(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0 E_3=\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)\frac{Q}{4\pi r^2}\quad\text{（方向沿径向）}$$

则介质表面上的极化电荷为

$$\sigma'_{r=a}=P\cos\pi=-\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)\frac{Q}{4\pi a^2},\quad \sigma'_{r=b}=P\cos0=\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)\frac{Q}{4\pi b^2}$$

6-72【10-10】 两共轴的导体圆筒，内筒半径为R_1，外筒的内半径为R_2（$R_2<2R_1$），其间有两层均匀介质，分界面的半径为r，内层介电常量为ε_1，外层介电常量为ε_2（$\varepsilon_1=2\varepsilon_2$），两介质的击穿场强都是$E_m$，当电压升高时，哪层介质先击穿？证明：两筒最大电势差为

$$V_m=\frac{1}{2}E_m r\ln\frac{R_2^2}{rR_1}$$

解 设两导体圆筒上电荷线密度分别为λ和$-\lambda$，则空间电场分布为

当$R_1<r_1<r$时，$$E_1=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_1 r_1}$$

当$r<r_2<R_2$时，$$E_2=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_2 r_2}$$

故 $$\frac{E_1}{E_2}=\frac{r_2}{2r_1}$$

又 $$R_2<2R_1,\quad r_2<R_2<2R_1<2r_1$$

故 $$\frac{E_1}{E_2}<1,\quad E_1<E_2$$

外层先击穿，此时r处有

$$E_m=\frac{\lambda_m}{2\pi\varepsilon_2 r}$$

那么 $$V_m=\int_{R_1}^{r}\frac{\lambda_m}{2\pi\varepsilon_1 r_1}dr_1+\int_{r}^{R_2}\frac{\lambda_m}{2\pi\varepsilon_2 r_2}dr_2=\frac{1}{2}E_m r\ln\frac{R_2^2}{rR_1}$$

6-T22【10-11】 空气的介电强度为 3 kV/mm，问：空气中半径分别为 1.0 cm、1.0 mm、0.1 mm 的长直导线上单位长度最多能带多少电荷？

解 设长直导线上电荷线密度为λ，则导线外表面处的电场强度为

$$E_R=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

当此处的场强达到空气的介电强度，即 $E_R=E_m$ 时，导线上电荷线密度最大，设为λ_m，则

$$\lambda_m=E_m 2\pi\varepsilon_0 R$$

当$R=1.0$ cm 时，

$\lambda_m=3\times10^6\times2\times3.14\times8.85\times10^{-12}\times1\times10^{-2}\,\mathrm{C/m}=1.67\times10^{-6}\,\mathrm{C/m}$

当$R=1.0$ mm 时，

$\lambda_m=3\times10^6\times2\times3.14\times8.85\times10^{-12}\times1\times10^{-3}\,\mathrm{C/m}=1.67\times10^{-7}\,\mathrm{C/m}$

当$R=0.1$ mm 时，

$\lambda_m=3\times10^6\times2\times3.14\times8.85\times10^{-12}\times1\times10^{-4}\,\mathrm{C/m}=1.67\times10^{-8}\,\mathrm{C/m}$

6-T23【10-24】 如图 10-20 所示，一平行板电容器两极板的面积都是S，相距为d，今在其间平行地插入厚度为t，相对介电常量为ε_r 的均匀介质，其面积为 $S/2$，设两极板分别带有电量Q与$-Q$，略去边缘效应。求：

(1) 两板电势差ΔV；

(2) 电容C。

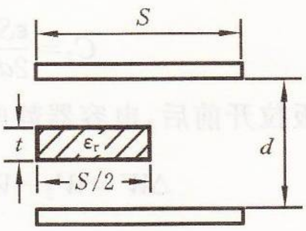


图 10-20

解 设极板上电荷面密度左半部分为$\pm\sigma_1$，右半部分为$\pm\sigma_2$，由电荷守恒得

$$(\sigma_1+\sigma_2)S/2=Q \tag{1}$$

由电势差相等得

$$\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}d=\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}(d-t)+\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0\varepsilon_r}t \qquad ②$$

式①、式②两式联立，解得

$$\sigma_1=\frac{2Q\varepsilon_r d}{S[2\varepsilon_r d+(1-\varepsilon_r)t]}$$

$$\sigma_2=\frac{2Q[\varepsilon_r d+(1-\varepsilon_r)t]}{S[2\varepsilon_r d+(1-\varepsilon_r)t]}$$

（1）由上面的电荷分布可求得两极板的电势差

$$V=\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}d=\frac{2Qd[\varepsilon_r d+(1-\varepsilon_r)t]}{S\varepsilon_0[2\varepsilon_r d+(1-\varepsilon_r)t]}$$

（2）插入介质板后电容器的电容为

$$C=\frac{Q}{V}=\frac{S\varepsilon_0[2\varepsilon_r d+(1-\varepsilon_r)t]}{2d[\varepsilon_r d+(1-\varepsilon_r)t]}$$

6-T24 **【10-20】** 将一个电容为4 μF的电容器和一个电容为6 μF的电容器串联起来接到200 V的电源上，充电后，将电源断开并将两电容器分离。在下列两种情况下，每个电容器的电压各变为多少？

（1）将每一个电容器的正板与另一个电容器的负板相连；

（2）将两电容器的正板与正板相连，负板与负板相连。

解 设$C_1=4\ \mu$F，$C_2=6\ \mu$F，$U=200$ V。当C_1和C_2串联时，它们的总电容为

$$C=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}=\frac{4\times6}{4+6}\ \mu\text{F}=2.4\ \mu\text{F}$$

极板上的电量为

$$Q=CU=2.4\times10^{-6}\times200\ \text{C}=4.8\times10^{-4}\ \text{C}$$

（1）当两电容器串联时，它们的电量是相等的。电源断开，电容器分离，每个电容器仍保持原有电荷。当每个电容器的正板与另一个电容器的负板相连时，正、负电荷完全中和，每个电容器的电压都变为零。

（2）将两电容器同极相连时，它们就是并联组合，总电容为

$$C'=C_1+C_2=(4+6)\ \mu\text{F}=10\ \mu\text{F}$$

总电量为

$$Q'=2Q=9.6\times10^{-4}\ \text{C}$$

两电容的电压相等

$$U'=\frac{Q'}{C'}=\frac{9.6\times10^{-4}}{10\times10^{-6}}\ \text{V}=96\ \text{V}$$

6-T25 **【10-28】** 两个同轴的圆柱面，长度均为l，半径分别为a、b，两圆柱面之间充有介电常量为ε的均匀电介质。当两个圆柱面带有等量异号电荷$+Q$、$-Q$时，求：

(1) 半径为$r(a<r<b)$处的电场能量密度；

(2) 电介质中的总能量，并由此推算出圆柱形的电容器的电容。

解 (1) 由于电荷分布是轴对称的，故电场分布也是轴对称的。设两圆柱面单位长度上的电量为

$$\lambda=\pm\frac{Q}{l}$$

则在$a<r<b$区域电场强度为

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon l}\cdot\frac{1}{r}$$

能量密度为
$$w=\frac{1}{2}\varepsilon E^2=\frac{Q^2}{8\pi^2\varepsilon l^2}\cdot\frac{1}{r^2}$$

(2) 取圆柱状同轴薄壳微元$\mathrm{d}V=2\pi rl\mathrm{d}r$，则介质中的总能量为

$$W=\int w\mathrm{d}V=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon l}\int_a^b\frac{1}{r}\mathrm{d}r=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon l}\ln\frac{b}{a}$$

又$W=\dfrac{Q^2}{2C}$，故得圆柱形电容器的电容为

$$C=\frac{2\pi\varepsilon l}{\ln(b/a)}$$

习题解答 3

6-T26 【9-37】 假设某一瞬时，氦原子的两个电子正在核的两侧，它们与核的距离都是0.2×10^{-10} m。这种配置状态的静电势能是多少？（把电子与原子核看作点电荷。）

解　电子电量为$-e$，氦核的电量为$2e$。设两个电子和原子核所在位置的电势分别为V_1、V_2、V_3，电子与原子核相距为r，则

$$V_1=V_2=\frac{2e}{4\pi\varepsilon_0 r}-\frac{e}{8\pi\varepsilon_0 r}=\frac{3e}{8\pi\varepsilon_0 r}$$

$$V_3=2\frac{-e}{4\pi\varepsilon_0 r}=-\frac{e}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

电荷系统的静电势能为

$$W=\frac{1}{2}(-eV_1-eV_2+2eV_3)=-\frac{7e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}=-4.0\times10^{-17}\ \mathrm{J}$$

6-T27 【9-38】 如果把质子当成半径为1.0×10^{-15} m 的均匀带电球体，它的静电势能是多大？这势能是质子的相对论静能的百分之几？

解　视质子为一均匀带电球体，其电场分布为

$$\boldsymbol{E}=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\boldsymbol{r} & (r\leqslant R)\\[2ex] \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r} & (r\geqslant R)\end{cases}$$

球体内距球心为r处的电势为

$$V=\int_r^R \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int_R^\infty \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_r^R\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int_R^\infty\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(3R^2-r^2)$$

在半径为r、厚度为$\mathrm{d}r$的球壳内电量为

$$\mathrm{d}q=\rho\cdot4\pi r^2\mathrm{d}r=\frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\cdot4\pi r^2\mathrm{d}r=\frac{3qr^2\mathrm{d}r}{R^3}$$

均匀带电球体的静电势能为

$$W=\frac{1}{2}\int_q V\mathrm{d}q=\int_0^R\frac{3q^2(3R^2-r^2)r^2}{16\pi\varepsilon_0 R^6}\mathrm{d}r=\frac{3q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}$$

令$q=e$，则得质子的静电势能

$$W=\frac{3q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}=8.6\times10^5\ \mathrm{eV}$$

质子的相对论静能为

$$W_0=m_0c^2=1.67\times10^{-27}\times(3\times10^8)^2\ \mathrm{J}=1.5\times10^{-10}\ \mathrm{J}=9.4\times10^8\ \mathrm{eV}$$

则有

$$\frac{W}{W_0}=\frac{8.6\times10^5}{9.4\times10^8}=0.092\%$$

7-T1 **【11-32】** 一长直载流导线沿 Oy 轴正方向放置，在原点 O 处取一电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，求该电流元在 $(a,0,0)$、$(0,a,0)$、$(0,0,a)$、$(a,a,0)$、$(0,-a,a)$、(a,a,a) 各点处的磁感应强度。

解 由 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\cdot\dfrac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$ 可知：

在 $(a,0,0)$ 处，

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\mathrm{d}l\cdot\boldsymbol{j}\times a\boldsymbol{i}}{a^3}=-\frac{\mu_0 I\mathrm{d}l}{4\pi a^2}\boldsymbol{k}$$

同理，在 $(0,a,0)$ 处，

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$$

在 $(0,0,a)$ 处，

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 I\mathrm{d}l}{4\pi a^2}\boldsymbol{i}$$

在 $(a,a,0)$ 处，

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=-\frac{\mu_0\sqrt{2}\,I\mathrm{d}l}{16\pi a^2}\boldsymbol{k}$$

在 $(0,-a,a)$ 处，

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\mathrm{d}l\boldsymbol{j}\times(-a\boldsymbol{j}+a\boldsymbol{k})}{a^3}=\frac{\mu_0\sqrt{2}\,I\mathrm{d}l}{16\pi a^2}\boldsymbol{i}$$

在 (a,a,a) 处，

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\mathrm{d}l\boldsymbol{j}\times(a\boldsymbol{i}+a\boldsymbol{j}+a\boldsymbol{k})}{a^3}=\frac{\mu_0\sqrt{3}\,I\mathrm{d}l}{36\pi a^2}(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k})$$

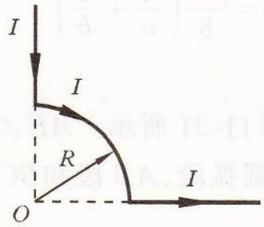


图 11-28

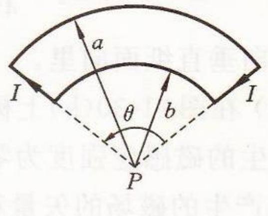


图 11-29

7-T2 **【11-35】** 如图11-29 所示的回路，曲线部分是半径为 a 和 b 的圆周的一部分，而直线部分沿着半径方向，假设回路载有电流 I，求 P 点处的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$。

解 因回路中两段直线电流的延长线均过 P 点，所以它们在 P 点产生的磁感应强度为零。P 点的磁场 $\boldsymbol{B}$ 是由两圆弧电流产生的磁感应

强度 $\boldsymbol{B}$ 的矢量和。即

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2$$

因 $\boldsymbol{B}_1$ 与 $\boldsymbol{B}_2$ 方向相反，故

$$B=B_1-B_2=\int_{外圆弧}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{|I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}|}{r^3}-\int_{内圆弧}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{|I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}|}{r^3}$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{\theta}\frac{a\mathrm{d}\theta}{a^2}-\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{\theta}\frac{b\mathrm{d}\theta}{b^2}=\frac{\mu_0 I\theta}{4\pi}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

$\boldsymbol{B}$ 的方向垂直纸面向外。

7-T3 **【11-33】** 如图11-27 所示，一根无限长的直导线，通有电流 I，中部一段弯成半径为 a 的圆弧形，求图中 P 点的磁感应强度。

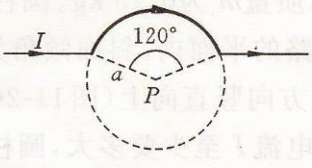


图11-27

解 设左边直导线、圆弧、右边直导线在 P 点处产生的磁感应强度分别为 $\boldsymbol{B}_1$、$\boldsymbol{B}_2$、$\boldsymbol{B}_3$，则

$$B_1=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi\cdot\frac{a}{2}}(\cos 0°-\cos 30°)=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$B_2=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{I\mathrm{d}l}{r^2}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\frac{Ia\mathrm{d}\theta}{a^2}=\frac{\mu_0 I}{6a}$$

$$B_3=B_1$$

因为 $\boldsymbol{B}_1$、$\boldsymbol{B}_2$、$\boldsymbol{B}_3$ 方向相同，所以

$$B=B_1+B_2+B_3=\frac{\mu_0 I}{\pi a}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{\mu_0 I}{6a}=0.21\frac{\mu_0 I}{a}$$

$\boldsymbol{B}$ 的方向垂直纸面向里。

7-T4 **【11-41】** 一个塑料圆盘，半径为R，圆盘的表面均匀分布有电荷q。如果使该圆盘以角频率ω绕其过圆心且垂直于盘面的轴线旋转，试证：

（1）在圆盘中心处的磁感应强度的大小为$B=\dfrac{\mu_0\omega q}{2\pi R}$；

（2）圆盘的磁偶极矩大小为$p_{\mathrm{m}}=\dfrac{\omega qR^2}{4}$。

解 如图 11-37 所示，小圆环的电流为

$$\mathrm{d}I=2\pi r\mathrm{d}r\cdot\sigma\cdot\frac{\omega}{2\pi}=\sigma\omega r\mathrm{d}r$$

（1）此电流在环心O点产生的磁场为

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0\mathrm{d}I}{2r}$$

$$B=\int\mathrm{d}B=\int\frac{\mu_0\mathrm{d}I}{2r}=\int_0^R\frac{\mu_0\sigma\omega r}{2r}\mathrm{d}r=\frac{\mu_0\sigma\omega R}{2}$$

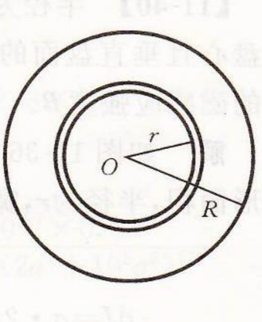


图 11-37

因$\sigma=\dfrac{q}{\pi R^2}$，故

$$B=\frac{\mu_0\omega q}{2\pi R}$$

（2）$\mathrm{d}I$ 的磁偶极矩为

$$\mathrm{d}p_{\mathrm{m}}=\pi r^2\mathrm{d}I=\pi\sigma\omega r^3\mathrm{d}r$$

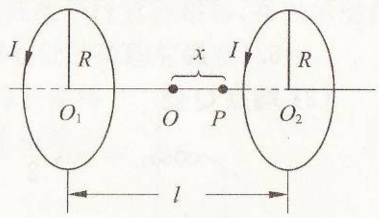
则

$$p_{\mathrm{m}}=\int\mathrm{d}p_{\mathrm{m}}=\int_0^R\pi\sigma\omega r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}\omega\sigma R^4=\frac{\omega qR^2}{4}$$

$$B = B_{acb} - B_{adb} = 0$$

7-15 **13.14** 两个半径为 R 的线圈平行地放置，相距为 l，并通以相等的同向电流，如图所示. 求：(1) 两线圈中心 O_1 和 O_2 的磁感强度；(2) 距中心 O 点（$\overline{O_1O_2}$ 的中点）为 x 的 P 点的磁感强度；(3) 如线圈间的距离是一变量，证明当 $l=R$ 时（这样的线圈组合称为亥姆霍兹线圈），O 点附近的磁场最为均匀.

提示：由 $\left.\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=0$ 和 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2B}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=0$ 证明之.



题 13.14 图

解 (1) 两圆电流在轴线上各点产生的磁场方向相同，都向右. 由圆电流轴线上各点的磁场公式，得

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2R} + \frac{\mu_0 R^2 I}{2(R^2+l^2)^{3/2}} = B_2$$

(2)
$$B = \frac{\mu_0 IR^2}{2\left[R^2+\left(\dfrac{l}{2}+x\right)^2\right]^{3/2}} + \frac{\mu_0 IR^2}{2\left[R^2+\left(\dfrac{l}{2}-x\right)^2\right]^{3/2}}$$

(3) **证** 由(2)的结果，$B=B(x)$ 是离中心 O 点距离 x 的函数，O 点附近区域磁场最均匀要求 $\left(\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x}\right)_{x=0}=0$，$\left(\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x}\right)$ 的变化$\left[\text{即}\left(\dfrac{\mathrm{d}^2B}{\mathrm{d}x^2}\right)\right]$，在 $x=0$ 附近最小.

以 $l=R$ 代入 $B(x)$ 表达式，求 $\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2B}{\mathrm{d}x^2}$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x} = \frac{\mu_0 IR^2}{2}\left\{\frac{3\left(\dfrac{R}{2}-x\right)}{\left[R^2+\left(\dfrac{R}{2}-x\right)^2\right]^{5/2}} - \frac{3\left(\dfrac{R}{2}+x\right)}{\left[R^2+\left(\dfrac{R}{2}+x\right)^2\right]^{5/2}}\right\}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2B}{\mathrm{d}x^2} = 6\mu_0 IR^2\left\{\frac{\left(\dfrac{R}{2}-x\right)^2-\left(\dfrac{R}{2}\right)^2}{\left[R^2+\left(\dfrac{R}{2}-x\right)^2\right]^{7/2}} - \frac{\left(\dfrac{R}{2}+x\right)^2-\left(\dfrac{R}{2}\right)^2}{\left[R^2+\left(\dfrac{R}{2}+x\right)^2\right]^{7/2}}\right\}$$

在 $x=0$ 处，有

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x}=0,\quad \frac{\mathrm{d}^2B}{\mathrm{d}x^2}=0$$

这就表示，当 $l=R$ 时，在 $x=0$ 处，即 O 点附近 B 是最均匀的.

7-T6 **【11-50】** 已知磁感应强度 $B=2.0\ \mathrm{Wb/m^2}$ 的均匀磁场，方向沿 x 轴正向，如图 11-48 所示。试求：

(1) 通过图中 $abcd$ 面的磁通量；

(2) 通过图中 $befc$ 面的磁通量；

(3) 通过图中 $aefd$ 面的磁通量。

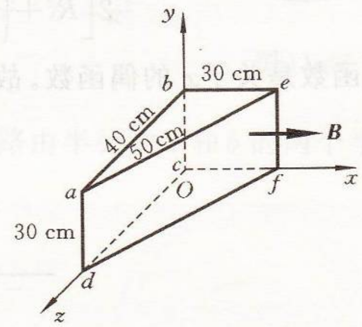


图 11-48

解 通过 $abcd$ 面的磁通量为

$$\Phi_{abcd}=\int \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=-B\cdot S_{abcd}$$

$$=-2\times 0.4\times 0.3\ \mathrm{Wb}$$

$$=-0.24\ \mathrm{Wb}$$

通过 $befc$ 面的磁通量为

$$\Phi_{befc}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S}=BS\cos\frac{\pi}{2}=0\ \mathrm{Wb}$$

通过 $aefd$ 面的磁通量为

$$\Phi_{aefd}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S}=BS\cos\alpha=0.24\ \mathrm{Wb}$$

7-T7 **【11-51】** 一根很长的铜导线载有电流 10 A，在导线内部作一平面 S，如图 11-49 所示。试计算通过 S 平面的磁通量（沿导线长度方向取长为 1 m 的一段计算），铜的磁导率取 μ_0。

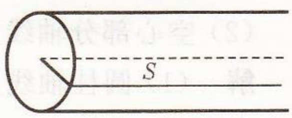


图 11-49

解 由安培环路定律，可求出铜导线内部 $\boldsymbol{B}$ 的分布。

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0\cdot\frac{I}{\pi R^2}\cdot \pi r^2$$

$$B\cdot 2\pi r=\mu_0 I\,\frac{r^2}{R^2}$$

$$B=\mu_0 I\,\frac{r}{2\pi R^2}$$

故通过 S 面的磁通量为

$$\Phi_B=\int \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_0^R \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2}r\cdot 1\cdot \mathrm{d}r=\frac{\mu_0 I}{4\pi}=\frac{4\pi\times 10^{-7}\times 10}{4\pi}\ \mathrm{Wb}=10^{-6}\ \mathrm{Wb}$$

7-T8 【11-44】 一根很长的同轴电缆，由一导体圆柱（半径为 a）和一同轴的导体圆管（内、外半径分别为 b 和 c）构成，使用时，电流 I 从一导体流出，从另一导体流回。设电流都是均匀地分布在导体的横截面上，求 $r<a$，$a<r<b$，$b<r<c$ 及 $r>c$ 各区间的磁感应强度大小，r 为场点到轴线的垂直距离。

解 如图 11-41 所示。取半径为 r 的圆周，将安培环路定理 $\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0 i$ 用于该圆周环路，即有

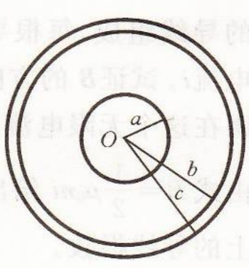


图 11-41

$$B\cdot 2\pi r=\mu_0 i,\quad B=\frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

当 $r<a$ 时，

$$B=\frac{\mu_0}{2\pi r}\frac{I}{\pi a^2}\pi r^2=\frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}$$

当 $a<r<b$ 时，

$$i=I,\quad B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

当 $b<r<c$ 时，

$$i=I-\frac{I}{\pi c^2-\pi b^2}(\pi r^2-\pi b^2)$$

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(\frac{c^2-r^2}{c^2-b^2}\right)$$

当 $r>c$ 时，

$$i=I-I=0,\quad B=0$$

7-T9 【11-49】 图 11-47 所示的是一个外半径为 R_1 的无限长的圆柱形导体管，管内空心部分的半径为 R_2，空心部分的轴与圆柱的轴相平行但不重合，两轴间距离为 a，且 $a>R_2$，现有电流 I 沿导体管流动，电流均匀分布在管的横截面上，而电流方向与管的轴线平行。求：

（1）圆柱轴线上的磁感应强度的大小；

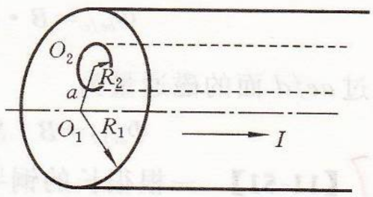


图 11-47

（2）空心部分轴线上的磁感应强度的大小。

解 （1）圆柱轴线上的 $\boldsymbol{B}$ 可视为一实心导体柱的 $\boldsymbol{B}_1$ 与沿空心柱的反向电流的 $\boldsymbol{B}_2$ 的叠加，即

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{0}+\frac{\mu_0 I'}{2\pi a}\boldsymbol{e}_\theta$$

式中，$\boldsymbol{e}_\theta$ 为切向的单位矢量，它与圆柱轴线垂直。

$$I'=\frac{I}{\pi(R_1^2-R_2^2)}\cdot\pi R_2^2=\frac{IR_2^2}{R_1^2-R_2^2}$$

故 $$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{2\pi a}\cdot\frac{R_2^2}{R_1^2-R_2^2}I\boldsymbol{e}_\theta$$

（2）同理，空心部分轴线上一点的 $\boldsymbol{B}$ 为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{0}=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}(-\boldsymbol{e}_\theta)+\boldsymbol{0}=(-\boldsymbol{e}_\theta)\frac{\mu_0}{2\pi a}\cdot\frac{I}{\pi(R_1^2-R_2^2)}\pi a^2$$

$$=-\frac{\mu_0 Ia}{2\pi(R_1^2-R_2^2)}\boldsymbol{e}_\theta$$

7-T10【11-45】 两个无限大的平行平面上，有均匀分布的面电流，面电流密度大小分别为i_1及i_2。试求下列情况下两面之间的磁感应强度与两面之外空间的磁感应强度。

(1) 两电流平行；

(2) 两电流反平行；

(3) 两电流相互垂直。

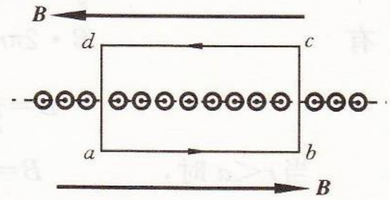


图 11-42

解 对于一个无限大均匀分布的面电流，其磁场是对称的，如图 11-42 所示。由安培环路定理

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0 I$$

有
$$B\cdot 2\cdot ab=\mu_0\cdot i\cdot ab$$

$$B=\frac{1}{2}\mu_0 i$$

当有两平面电流时，则空间任一点磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2$$

(1) 当两电流平行时

在两电流之间：$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2|=\left|\frac{1}{2}\mu_0 i_1-\frac{1}{2}\mu_0 i_2\right|=\frac{1}{2}\mu_0|i_1-i_2|$

在两电流之外：$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2|=\frac{1}{2}\mu_0(i_1+i_2)$

(2) 当两电流反平行时

在两电流之间：$B=B_1+B_2=\frac{1}{2}\mu_0(i_1+i_2)$

在两电流之外：$|B|=|B_1-B_2|=\frac{1}{2}\mu_0|i_1-i_2|$

(3) 当两电流相互垂直时

在两电流之间：$|\boldsymbol{B}|=\sqrt{B_1^2+B_2^2}=\sqrt{\frac{1}{4}\mu_0^2 i_1^2+\frac{1}{4}\mu_0^2 i_2^2}=\frac{1}{2}\mu_0\sqrt{i_1^2+i_2^2}$

在两电流之外：$|\boldsymbol{B}|=\sqrt{B_1^2+B_2^2}=\frac{1}{2}\mu_0\sqrt{i_1^2+i_2^2}$

7-T11 **【11-6】** 已知磁场$\boldsymbol{B}$的大小为0.4 T，方向在Oxy平面内，且与y轴成$\frac{\pi}{3}$角。试求以速度$\boldsymbol{v}=10^7\boldsymbol{k}$ (m/s)运动，电量为$q=10$ pC 的电荷所受的磁场力。

解 $\boldsymbol{F}_{磁}=q(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$

$$=10\times10^{-12}\times(10^7\boldsymbol{k})\times\left[\left(0.4\sin\frac{\pi}{3}\right)\boldsymbol{i}+\left(0.4\cos\frac{\pi}{3}\right)\boldsymbol{j}\right]$$

$$=(-2\times10^{-5})\boldsymbol{i}+(2\sqrt{3}\times10^{-5}\boldsymbol{j})\ (\mathrm{N})$$

7-T12 **【11-10】** 飞行时间谱仪。歌德斯密特设计过测量重离子质量的准确方法，这个方法可测量重离子在已知磁场中的旋转周期。一个单独的带电碘离子，在4.5×10^{-2} Wb/m^2 的磁场中旋转 7 圈所需要的时间约为1.29×10^{-3} s。试问这个碘离子的质量有多少千克(近似值)？

解 一个单独的带电碘离子所带电量

$$q=1.6\times10^{-19}\mathrm{C}$$

由$T=\frac{2\pi m}{qB}$可知，

$$m=\frac{TqB}{2\pi}=\frac{\frac{1.29\times10^{-3}}{7}\times1.6\times10^{-19}\times4.5\times10^{-2}}{2\times3.14}\ \mathrm{kg}$$

$$=2.11\times10^{-25}\,\mathrm{kg}$$

7-T13 **【11-25】** 一圆环，半径为4.0 cm，放在磁场内，如图11-19 所示，各处磁场的方向对环而言是对称发散的。圆环所在处的磁感应强度的量值为0.10 T，磁场的方向与环面法向成60°角。当环中通有电流$I=$ 15.8 A时，求圆环所受合力的大小和方向。

解 如图11-20所示，取右端电流元，所受磁力为

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{F}|=|I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}|=IB\sin 90^\circ\mathrm{d}l=IB\mathrm{d}l$$

方向垂直于$I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$与$\boldsymbol{B}$所成平面。

由对称性可知，平行于环面的$\mathrm{d}F_{/\!/}$的合力为零，垂直于环面的分量$\mathrm{d}F_{\perp}$的和为

$$\begin{aligned}F_{\perp}&=\int\mathrm{d}F_{\perp}=\int IB\cos\theta\mathrm{d}l=IB\cos\theta\cdot 2\pi R\\&=15.8\times0.10\times\cos30^\circ\times2\times3.14\times(4.0\times10^{-2})\ \mathrm{N}\\&=0.34\ \mathrm{N}\end{aligned}$$

圆环所受合力$F=F_{\perp}=0.34\ \mathrm{N}$，方向垂直环面向上。

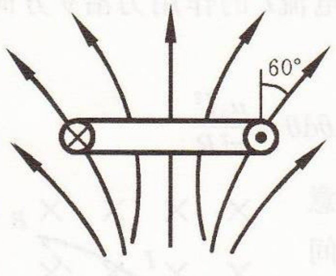


图11-19

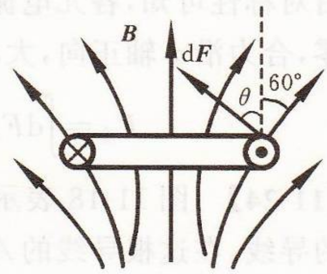


图11-20

7-T14 **【11-30】** 如图11-25所示，一平面塑料圆盘，半径为R，表面带有面密度为σ的剩余电荷。假定圆盘绕其轴线AA'以角速度ω (rad/s)转动，磁场$\boldsymbol{B}$的方向垂直于转轴AA'。试证磁场作用于圆盘的力矩大小为：$M=\dfrac{\pi\sigma\omega R^4B}{4}$。（提示：将圆盘分成许多同心圆环来考虑。）

解 在圆盘上取半径为r、宽为$\mathrm{d}r$的小圆环，小圆环的磁偶极矩为

$$\mathrm{d}p_{\mathrm{m}}=IS=\frac{\sigma\cdot2\pi r\mathrm{d}r}{T}\cdot\pi r^2=\pi\omega\sigma r^3\mathrm{d}r$$

$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$

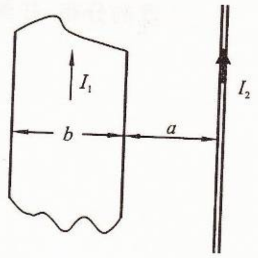
所受磁力矩为

$$\mathrm{d}M=B\mathrm{d}p_{\mathrm{m}}\cdot\sin\theta=B\pi\omega\sigma r^3\mathrm{d}r\cdot1$$

磁场作用于圆盘的力矩大小为

$$M=\int\mathrm{d}M=\int_0^R\pi\omega\sigma Br^3\mathrm{d}r=\frac{\pi\sigma\omega R^4B}{4}$$

7-T15 如图所示，一长直导线和一宽为 b 的无限长导体片共面，它们分别载有电流 I_2 和 I_1，相距为 a。求导线单位长度上所受的磁场力。



平面电流在长直导线处产生的磁场：（参考书、或PPT）

$$B=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi b}\ln\frac{a+b}{a}$$

$$\vec{F}=\int I_2 d\vec{l}\times\vec{B}=I_2Bl\quad,\ F/l=I_2B=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b}\ln\frac{a+b}{a}$$

7-T16【12-3】 螺绕环中心周长 $l=10\ \text{cm}$，环上线圈匝数 $N=200$，线圈中通有电流 $I=100\ \text{mA}$。

（1）求管内的磁感应强度 B_0 和磁场强度 H_0；

（2）若管内充满相对磁导率 $\mu_r=4200$ 的磁介质，则管内的 B 和 H 是多少？

（3）磁介质内由导线中电流产生的 B_0 和由磁化电流产生的 B' 各是多少？

解 （1）$B_0=\mu_0 nI=\mu_0 NI/l=(4\pi\times10^{-7}\times200\times0.1/0.1)\ \text{T}$
$=2.5\times10^{-4}\ \text{T}$

$H_0=nI=NI/l=(200\times0.1/0.1)\ \text{A/m}=200\ \text{A/m}$

（2）$B=\mu_r B_0=4200\times2.5\times10^{-4}\ \text{T}=1.1\ \text{T}$

$H=H_0=200\ \text{A/m}$

（3）$B_0=2.5\times10^{-4}\ \text{T}$

$B'=B-B_0=(1.1-2.5\times10^{-4})\ \text{T}\approx1.1\ \text{T}$

7-T17

【12-5】 一无限长直圆柱形导线外包一层相对磁导率为μ_r的圆筒形磁介质。设导线半径为R_1，磁介质外半径为R_2，导线内有电流I通过。

（1）求介质内、外的磁场强度和磁感应强度的分布，并画出H-r曲线和B-r曲线；

（2）求介质内、外表面的磁化面电流密度。

解 （1）以半径r绕圆柱形导体的轴线作圆周，将$\boldsymbol{H}$表述的安培环路定理$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=I$用于该圆周，由于电流和磁介质分布都呈轴对称性，可推断$\boldsymbol{H}$沿圆周切向，而且在圆周上各点的大小都相等，故

当$r<R_1$时，
$$2\pi rH=\frac{I}{\pi R_1^2}\pi r$$

则
$$H=\frac{I}{2\pi R_1^2}r,\quad B=\mu_0 H=\frac{\mu_0 I}{2\pi R_1^2}r$$

当$R_1<r<R_2$时，
$$2\pi rH=I$$

则
$$H=\frac{I}{2\pi r},\quad B=\mu_0\mu_r H=\frac{\mu_0\mu_r I}{2\pi r}$$

当$r>R_2$时，
$$2\pi rH=I$$

则
$$H=\frac{I}{2\pi r},\quad B=\mu_0 H=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

H-r、B-r曲线如图12-2所示。

（2）介质内表面$r=R_1$处的磁化强度为
$$M=(\mu_r-1)H=(\mu_r-1)\frac{I}{2\pi R_1}$$

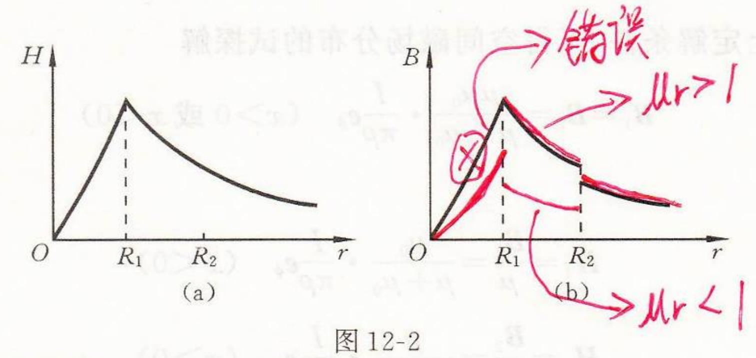


图12-2

磁化面电流密度
$$i'_{r=R_1}=|\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{n}|=M=\frac{(\mu_r-1)I}{2\pi R_1}$$

同理，介质外表面的磁化面电流密度为
$$i'_{r=R_2}=M=(\mu_r-1)H=\frac{(\mu_r-1)I}{2\pi R_2}$$

7-T18 【12-4】 螺绕环的导线内通有电流20 A。假定环内磁感应强度的大小是1.0 Wb・m^2。已知环中心周长为40 cm,绕线圈400 匝。计算环的

(1) 磁场强度;

(2) 磁化强度;

(3) 磁化率;

(4) 磁化面电流和相对磁导率。

解 (1) 根据安培环路定理,可求得螺绕环内的磁场强度为

$$H=nI=\frac{N}{2\pi R}I=\frac{400}{0.4}\times 20\ \text{A/m}=2\times 10^4\ \text{A/m}$$

(2) 根据$\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M}$,则有$\boldsymbol{M}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{H}$,环内各点磁感应强度$\boldsymbol{B}$与磁场强度$\boldsymbol{H}$方向相同,因此有

$$M=\frac{B}{\mu_0}-H=\left(\frac{1.0\times 10^7}{4\pi}-2\times 10^4\right)\ \text{A/m}=7.76\times 10^5\ \text{A/m}$$

(3) 环内磁介质的磁化率为

$$\chi_m=\frac{M}{H}=\frac{7.76\times 10^5}{2\times 10^4}=38.8$$

(4) 磁化面电流密度为

$$i'=|\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{n}|=M=7.76\times 10^5\ \text{A/m}$$

介质环表面的总磁化面电流为

$$I'=2\pi Ri'=0.4\times 7.76\times 10^5\ \text{A}=3.10\times 10^5\ \text{A}$$

螺绕环内介质的相对磁导率为

$$\mu_r=1+\chi_m=1+38.8=39.8$$

7-T19 【12-8】 有一根磁铁棒,其矫顽力为4×10^3 A/m,欲把它插入长为12 cm 绕有60 匝线圈的螺线管中使它去磁。此螺线管应通以多大电流?

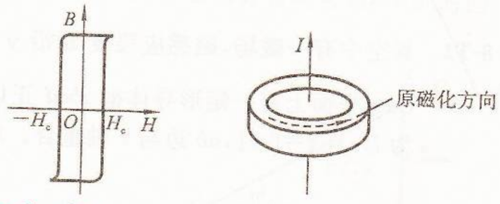
解 传导电流产生的磁场强度在数值上至少应等于矫顽力H_c,即

$$H=\frac{NI}{l}=H_c$$

故

$$I=\frac{H_c l}{N}=\frac{4\times 10^3\times 0.12}{60}\ \text{A}=8\ \text{A}$$

7-T20 图(a)为铁氧体材料的 B-H 磁滞曲线，图(b)为此材料制成的计算机存储元件的环形磁芯。磁芯的内、外半径分别为 0.5 mm、0.8 mm，矫顽力为 $H_c=\frac{500}{\pi}\ \mathrm{A\cdot m^{-1}}$。设磁芯的磁化方向如图(b)所示，欲使磁芯的磁化方向翻转，试问：(1)轴向电流如何加？至少加至多大时，磁芯中磁化方向开始翻转？(2)若加脉冲电流，则脉冲峰值至少多大时，磁芯中从内而外的磁化方向全部翻转？



(a) (b)

① 安培环路定理：

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I$$

$$H=\frac{I}{2\pi r}$$

所加电流应向下，才能使磁化反向。

$r_1 = 0.5\times10^{-3}\ \mathrm{m}$，$r_2 = 0.8\times10^{-3}\ \mathrm{m}$

磁芯内表面先被反向磁化：

$I_1 = 2\pi r_1 H_c = 0.5\mathrm{A}$

② $I_2 = 2\pi r_2 H_c = 0.8\mathrm{A}$

8−T1： 解：(1) 设长直导线与 AB 相距 x，则 ABCD 的磁通量为

$$\Phi=\int_x^{x+b}\frac{\mu_0 Il}{2\pi r}\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\ln(1+\frac{b}{x})$$

$$\varepsilon_i=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\cdot\frac{bv}{x(x+b)}$$

(2)

$$\varepsilon_i=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=\frac{\mu_0 l\ln(1+\frac{b}{a})}{2\pi}\cdot\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-\frac{\omega\mu_0 I_0 l\ln(1+\frac{b}{a})\cos\omega t}{2\pi}$$

(3)

$$\varepsilon_i=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\cdot\frac{\mathrm{d}\ln(1+\frac{b}{x})}{\mathrm{d}t}-\frac{\mu_0 l\ln(1+\frac{b}{x})}{2\pi}\cdot\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{\mu_0 I_0 l}{2\pi}\left[\frac{bv\sin\omega t}{x(b+x)}-\omega\cos\omega t\ln\frac{x+b}{x}\right]$$

8−T2:

$$\phi=\int \vec{B}\cdot d\vec{S}=\int_{vt}^{vt+l_2} B_0\cos\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)l_1\,dx$$

$$=-\frac{B_0 l_1 c}{\omega}\left[\sin\omega\left(t-\frac{vt+l_2}{c}\right)-\sin\omega\left(t-\frac{vt}{c}\right)\right]$$

$$\varepsilon_i=-\frac{d\phi}{dt}=B_0 l_1(c-v)\left[\cos\omega\left(t-\frac{vt+l_2}{c}\right)-\cos\omega\left(t-\frac{vt}{c}\right)\right]$$

题目改为磁场：$B=B_0\cos\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)$

8-T3 **【13-4】** 如图13-4 所示，一面积为5 cm×10 cm 的线框，在与一均匀磁场$B=0.1$ T 相垂直的平面中匀速运动，速度$v=2$ cm/s，已知线框的电阻$R=1\ \Omega$。若取线框前沿与磁场接触时刻为$t=0$，作图时视顺时针指向的感应电动势为正值。试求：

(1) 通过线框的磁通量$\Phi(t)$的函数及曲线；

(2) 线框中的感应电动势$\mathscr{E}_i(t)$的函数及曲线；

(3) 线框中的感应电流$I_i(t)$的函数及曲线。

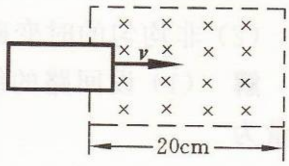


图 13-4

解 在时间间隔 0～5 s 内，线框中的磁通量为

$$\Phi(t)=BS=Bvtl=10^{-4}t\ (\mathrm{Wb})$$

则线框中的感应电动势和感应电流分别为

$$\mathscr{E}_i(t)=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-Blv=-10^{-4}\ \mathrm{V}$$

$$I_i(t)=\frac{\mathscr{E}_i}{R}=-10^{-4}\ \mathrm{A}$$

在 5～10 s 内，线框中的磁通量为

$$\Phi(t)=\Phi_0=BS_0=5\times10^{-4}\ \mathrm{Wb}$$

0.48

则线框中的感应电动势和感应电流分别为

$$\mathscr{E}_i(t)=0,\quad I_i(t)=0$$

在 10～15 s 内，线框中的磁通量为

$$\Phi(t)=\Phi_0-Blvt=5\times10^{-4}-10^{-4}t\ (\mathrm{Wb})$$

则线框中的感应电动势和感应电流分别为

$$\mathscr{E}_i(t)=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=10^{-4}\ \mathrm{V},\quad I_i(t)=10^{-4}\ \mathrm{A}$$

$\Phi(t)$、$\mathscr{E}_i(t)$、$I_i(t)$曲线如图 13-5 所示。

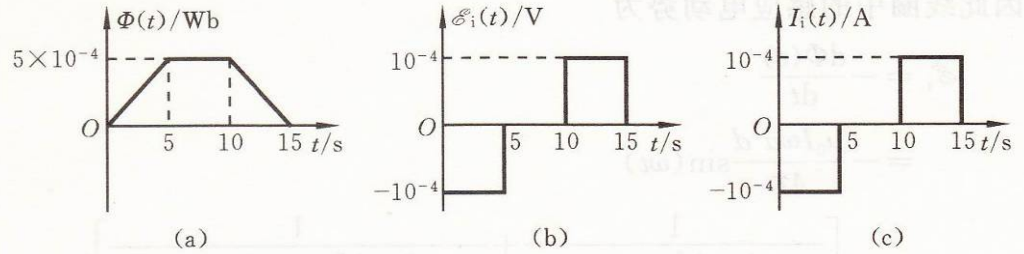


图 13-5

8-T4【13-2】 如图 13-2 所示，有一弯成θ角的金属架COD，一导体MN（MN垂直于OD）以恒定速度$\boldsymbol{v}$在金属架上滑动，设$\boldsymbol{v}\perp MN$向右，且$t=0,x=0$。已知磁场的方向垂直图面向外，分别求下列情况下框架内的感应电动势$\mathscr{E}_{\mathrm{i}}$的变化规律（大小、方向）。

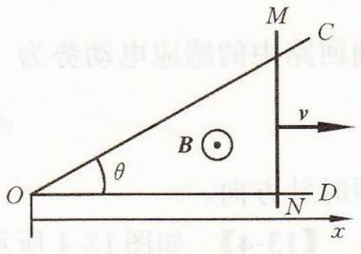


图 13-2

（1）磁场分布均匀，$\boldsymbol{B}$不随时间变化；

（2）非均匀的时变磁场$B=kx\cos\omega t$。

解 （1）设回路的绕行方向为逆时针方向，当$x=vt$时，回路的磁通量为

$$\Phi=BS=\frac{Bv^2t^2}{2}\tan\theta$$

$$\mathscr{E}_{\mathrm{i}}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-Bv^2t\tan\theta$$

方向从M指向N。

（2）磁场不均匀，回路在任意t时刻的磁通量为

$$\Phi=\int\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_0^{vt}kx\cos\omega t\cdot x\tan\theta\mathrm{d}x=k\cos\omega t\cdot\tan\theta\cdot\frac{v^3t^3}{3}$$

$$\mathscr{E}_{\mathrm{i}}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=k\omega\sin\omega t\tan\theta\cdot\frac{v^3t^3}{3}-k\cos\omega t\tan\theta\cdot v^3t^2$$

若$\mathscr{E}_{\mathrm{i}}>0$，感应电动势方向与回路绕向相同，否则，方向相反。

8－*T*5：

根据磁通计原理.

$$q=\frac{\Delta\phi}{R}=\frac{2B\cdot\pi r^2}{R}=\frac{2\times5\times10^{-5}\times\pi\times0.1^2}{1}$$

$$=3.14\times10^{-6}\ 库仑.$$

8-T6【13-6】 平均半径为12 cm 的4×10^3 匝线圈，在磁场为0.5 G 的地磁场中每秒钟旋转 30 周，线圈中可产生的最大感应电动势为多大？如何旋转和旋转到何时，才有这样大的电动势？

解　设线圈绕与其某直径重合的轴线MM'转动（图13-7）。地磁场$\boldsymbol{B}$ 的方向与此夹角为θ。将$\boldsymbol{B}$ 分解为与轴线平行的分量$\boldsymbol{B}_1$ 和与轴线垂直的分量$\boldsymbol{B}_2$。线圈转动时，线圈平面法线方向总是与$\boldsymbol{B}_1$ 垂直的。当法线方向与$\boldsymbol{B}_2$ 的方向夹角为φ时，线圈的全磁通为

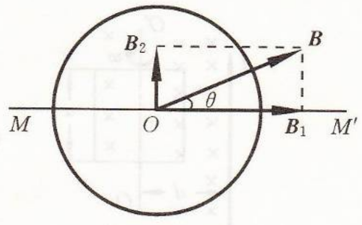


图 13-7

$$\Psi=N\Phi=N\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S}=N(\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2)\cdot\boldsymbol{S}=N\boldsymbol{B}_2\cdot\boldsymbol{S}=NBS\sin\theta\cos\varphi$$

线圈的感应电动势

$$\mathscr{E}_i=-\frac{d\Psi}{dt}=NBS\sin\theta\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}=NBS\omega\sin\theta\sin\varphi$$

当$\theta=\dfrac{\pi}{2}$且$\varphi=\dfrac{\pi}{2}$时，即当线圈绕垂直于地磁场的直径旋转，且法线方向与地磁场方向垂直时，感应电动势有最大值，其值为

$$\mathscr{E}_m=NBS\omega=\pi r^2NB\cdot2\pi n=2\pi^2r^2NBn$$
$$=2\times3.14^2\times0.12^2\times4\times10^3\times0.5\times10^{-4}\times30\ \text{V}=1.7\ \text{V}$$

8-T7【13-7】 如图 13-8 所示，有两根相距为l 的平行导线，其一端用电阻R 连接，导线上有一质量为m 的金属棒无摩擦地滑过，有一均匀磁场$\boldsymbol{B}$ 与图面垂直。假设在$t=0$ 瞬时金属棒以v_0 的速度向左方滑动，求：

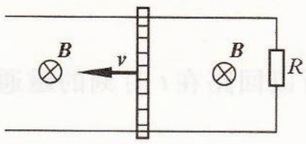


图 13-8

（1）金属棒的运动速度与时间的函数关系；

(2) 金属棒的运动距离与时间的函数关系；

(3) 能量守恒定律是否成立？试证之。

解 (1) 设棒移动x距离时，速度为v，电流为i，电磁力使棒获得加速度，则有

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-iBl$$

式中，
$$i=\frac{Blv}{R}$$

故
$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\frac{B^2l^2}{R}v$$

积分得
$$\ln v=-\frac{B^2l^2}{mR}t+C$$

当$t=0$时，$v=v_0$，代入上式得

$$C=\ln v_0$$

故
$$v=v_0\mathrm{e}^{-\frac{B^2l^2}{mR}t}$$

(2) 当$v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，$t=0$时，$x=0$，于是

$$x=\frac{v_0mR}{B^2l^2}(1-\mathrm{e}^{-\frac{B^2l^2}{mR}t})$$

(3) 电流产生的热量为

$$\int_0^{\infty}Ri^2\mathrm{d}t=Q$$

将$i=\dfrac{Blv}{R}=\dfrac{Blv_0}{R}\mathrm{e}^{-\frac{B^2l^2}{mR}t}$代入上式积分，得

$$Q=\int_0^{\infty}Ri^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2}mv_0^2$$

故能量守恒。

8-T8 **【13-8】** 长为L的导线以角速度ω绕固定端O，在竖直长直电流I所在的平面内旋转，O到长直电流I的距离为a，且$a>L$，如图13-9所示。求导线L在与水平方向成θ角时的动生电动势的大小和方向。

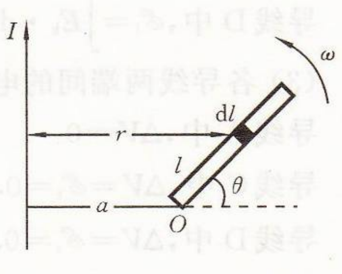


图 13-9

解 如图13-9所示，$r=a+l\cos\theta$，$v=$

$l\omega$,故导线上的电动势为

$$\mathscr{E}=\int_L Bv\mathrm{d}l=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\omega\int_0^L \frac{l\mathrm{d}l}{a+l\cos\theta}$$

$$=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\omega\frac{1}{\cos^2\theta}\left[(a+l\cos\theta)-a\ln(a+l\cos\theta)\right]_0^L$$

$$=\frac{\mu_0 I\omega}{2\pi\cos^2\theta}\left(L\cos\theta-a\ln\frac{a+L\cos\theta}{a}\right)$$

方向沿导线指向O点。

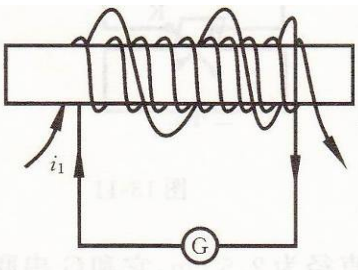


图13-12

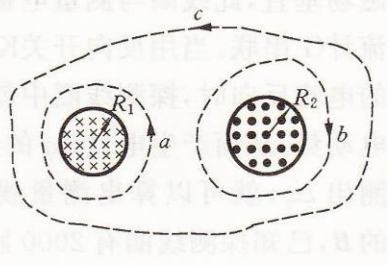


图13-13

8-T9 **【13-14】** 如图13-13所示,两个均匀磁场区域的半径分别为$R_1=21.2$ cm和$R_2=32.3$ cm,磁感应强度分别为$B_1=48.6$ mT和$B_2=77.2$ mT,方向如图所示。两个磁场正以8.5 mT/s的变化率减小,试分别计算感应电场对三个回路的环流$\oint \boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$各是多少?

解 由感生电动势的定义,有

$$\oint \boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

对回路a,有

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S}_a)=-\frac{\mathrm{d}B_1}{\mathrm{d}t}\pi R_1^2=8.5\times10^{-3}\times3.14\times21.2^2\times10^{-4}\ \mathrm{V}$$

$$=1.20\times10^{-3}\ \mathrm{V}$$

则
$$\oint \boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-1.20\times10^{-3}\ \mathrm{V}$$

对回路b,有

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S}_b)=-\frac{\mathrm{d}B_2}{\mathrm{d}t}\pi R_2^2=8.5\times10^{-3}\times3.14\times32.3^2\times10^{-4}\ \mathrm{V}$$

$$=2.79\times10^{-3}\ \mathrm{V}$$

则 $$\oint \boldsymbol{E}_i \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -2.79\times10^{-3}\ \text{V}$$

对回路 c，有

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S}_c) = -\frac{dB_1}{dt}\pi R_1^2 + \frac{dB_2}{dt}\pi R_2^2$$
$$= (1.20\times10^{-3} - 2.79\times10^{-3})\ \text{V} = -1.59\times10^{-3}\ \text{V}$$

则 $$\oint \boldsymbol{E}_i \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = 1.59\times10^{-3}\ \text{V}$$

8-T10【13-16】 在半径为 R 的圆形区域内，有垂直向里的均匀磁场正以速率 $\frac{dB}{dt}$ 减少。有一金属棒 abc 放在图13-15所示位置，已知 $ab=bc=R$，求：

（1）a、b、c 三点感应电场的大小和方向（在图上标出）；

（2）棒上感应电动势 $\mathscr{E}_{abc}$ 为多大？

（3）a、c 哪点电势高？

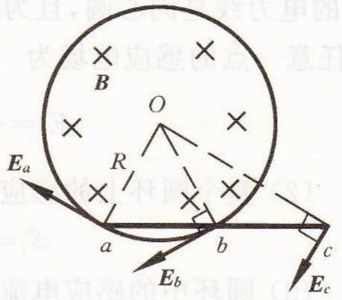


图 13-15

解 （1）由感应电场与磁通量的关系 $\oint \boldsymbol{E}_i \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$ 及场分布的对称性，可得

$$E_i \cdot 2\pi r = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi R^2 \frac{dB}{dt} \quad \left(其中\frac{dB}{dt}<0\right)$$

则当 $r=R$ 时

$$E_a = E_b = -\frac{R}{2}\frac{dB}{dt}$$

当 $r=Oc$ 时

$$E_c = -\frac{R^2}{2\sqrt{3}R}\frac{dB}{dt} = \frac{R}{2\sqrt{3}}\frac{dB}{dt}$$

各点处电场方向如图13-15所示。

（2）$\mathscr{E}_{abc} = \mathscr{E}_{ab} + \mathscr{E}_{bc} = \frac{\sqrt{3}}{4}R^2\frac{dB}{dt} + \frac{\pi R^2}{12}\frac{dB}{dt}$

（3）a 点电势高。

8-T10：（1）由于磁场增加（习题册所给条件与上面习题解答所给条件相反），感应电场方向应为逆时针。

（2）由于沿半径电动势为零，用法拉第电磁感应定律计算 **Oac** 三角形内的电动势，就是 **abc** 的电动势。

（3）c 点电势高。

8-T11 **【13-18】** 如图 13-17 所示的边长为 20 cm 的正方形导体回路，置于圆内的均匀磁场中，B 为 0.5 T，方向垂直于导体回路，且以 0.1 T/s 的变化率减小。图中 ac 的中点 b 为圆心，ac 沿直径，求：

(1) c、d、e、f 各点感应电场的方向和大小(用矢量在图上标明)；

(2) ac、ce 和 eg 段的电动势；

(3) 回路内的感应电动势有多大？

(4) 如果回路的电阻为 2 Ω，回路中电流有多大？

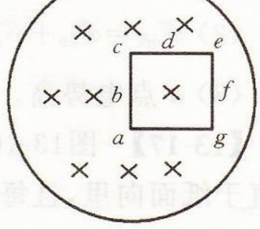


图 13-17

(5) a 和 c 两点间的电势差为多少？哪一点的电势高一些？

(6) ce 两点间的电势差 $V_{ce}=$？

解 (1) 由上题可知，与中心 b 相距 r 处的感应电场为

$$E_i=-\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}$$

则图中各点的感应电场分别为

$$E_{ic}=-\frac{bc}{2}\frac{dB}{dt}=\frac{10\times10^{-2}}{2}\times0.1\ \text{V/m}=5\times10^{-3}\ \text{V/m}$$

$$E_{id}=-\frac{bd}{2}\frac{dB}{dt}=\frac{10\times10^{-2}}{2\sin45^\circ}\times0.1\ \text{V/m}=5\sqrt{2}\times10^{-3}\ \text{V/m}$$
$$=7.07\times10^{-3}\ \text{V/m}$$

$$E_{ie}=-\frac{be}{2}\frac{dB}{dt}=\frac{10\times10^{-2}\sqrt{5}}{2}\times0.1\ \text{V/m}=5\sqrt{5}\times10^{-3}\ \text{V/m}$$
$$=11.18\times10^{-3}\ \text{V/m}$$

$$E_{if}=-\frac{bf}{2}\frac{dB}{dt}=\frac{20\times10^{-2}}{2}\times0.1\ \text{V/m}=10\times10^{-3}\ \text{V/m}$$

各点的 $\boldsymbol{E}_i$ 是沿以 b 点为中心的同心圆周的切线方向(顺时针方向)。

(2) 正方形导体回路上 ac、ce 和 eg 段的电动势分别为

$$\mathscr{E}_{ac}=\int_a^c\boldsymbol{E}_i\cdot d\boldsymbol{l}=\int_a^c E_i\cos90^\circ dl=0$$

$$\mathscr{E}_{ce}=\int_c^e\boldsymbol{E}_i\cdot d\boldsymbol{l}=\int_c^e\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}\cos\theta dl=\frac{1}{2}bc\cdot ce\ \frac{dB}{dt}=10^{-3}\ \text{V}$$

$$\mathscr{E}_{eg}=\frac{dB}{dt}S_{\triangle beg}=\frac{1}{2}bf\cdot eg\ \frac{dB}{dt}=2\times10^{-3}\ \text{V}$$

（3）正方形导体回路上感应电动势为

$$\mathscr{E}_{\mathrm{i}}=l^{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=4\times10^{-3}\ \mathrm{V}$$

（4）回路中的电流为

$$I_{\mathrm{i}}=\frac{\mathscr{E}_{\mathrm{i}}}{R}=2\times10^{-3}\ \mathrm{A}$$

（5）a、c 两点间的电势差为

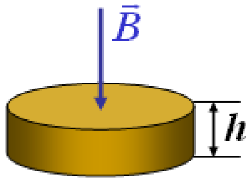
$$V_{ac}=I_{\mathrm{i}}R_{ac}=2\times10^{-3}\times\frac{1}{4}\times2\ \mathrm{V}=10^{-3}\ \mathrm{V}$$

$V_{ac}>0$，a 点电势高。

（6）c、e 两点间的电势差为

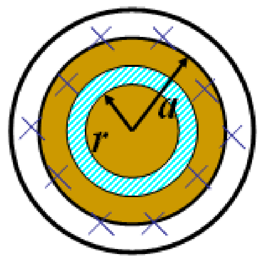
$$V_{ce}=\mathscr{E}_{\mathrm{ice}}-I_{\mathrm{i}}R_{ce}=\left(10^{-3}-2\times10^{-3}\times\frac{1}{4}\times2\right)\ \mathrm{V}=0$$

8－*T*12： 将半径为a的金属圆盘，厚为h，电导率为σ，同轴放置在轴对称匀强磁场中，求圆盘电流强度及产生的热功率。设B均匀，$dB/dt>0$。



解：取半径为r,厚度为dr的圆筒,其电动势

$$d\varepsilon_i=-\frac{d\phi}{dt}=-\frac{d}{dt}\left(B\cdot\pi r^{2}\right)=-\pi r^{2}\frac{dB}{dt}.$$



其上电阻为：$R=\dfrac{2\pi r}{\sigma\cdot h\cdot dr}$

$$dI_i=\frac{d\varepsilon_i}{R}=-\pi r^{2}\frac{dB}{dt}\frac{\sigma h dr}{2\pi r}=-\frac{r}{2}\sigma h\frac{dB}{dt}dr$$

总电流：$I_i=\int dI_i=-\dfrac{1}{4}a^{2}\sigma h\dfrac{dB}{dt}.$

产生的热功率：

$$P=\int dP=\int R(dI_i)^2=\frac{1}{8}\pi\sigma h a^{4}\left(\frac{dB}{dt}\right)^{2}$$

$8-T13$： 由于管的截面很小，则它可看成是无限长直螺线管。当管内有电流 I 时，两圆柱体内的磁感强度分别为 $B_1=\dfrac{\mu_1 NI}{l}$　　$B_2=\dfrac{\mu_2 NI}{l}$

两圆柱体截面上的磁通量分别为 $F_1=B_1S_1=\dfrac{\mu_1 NIS_1}{l}$　　$F_2=B_2S_2=\dfrac{\mu_2 NIS_2}{l}$

通过螺线管截面的磁通量为 $F=F_1+F_2=\dfrac{NI}{l}(\mu_1S_1+\mu_2S_2)$

螺线管的自感为 $L=\dfrac{NF}{I}=\dfrac{N^2}{l}(\mu_1S_1+\mu_2S_2)$

8-T14【13-28】 电阻为 R，电感为 L 的电感器与无感电阻 R_0 串联后接到恒定电势差 V_0 上，如图 13-22 所示。

(1) K_2 断开、K_1 闭合后任一时刻电感器上电压的表达式是什么？

(2) 电流稳定后再将 K_2 闭合，经过 L/R 秒时通过 K_2 的电流的大小和方向？

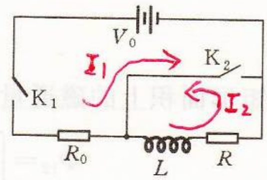


图 13-22

解　(1) 电感器上的电压为

$$V=V_0-IR_0=\frac{V_0}{R_0+R}\left(R+R_0 e^{-\frac{R+R_0}{L}t}\right)$$

$$I=\frac{V_0}{R_0+R}\left(1-e^{-\frac{R_0+R}{L}t}\right)$$

(2) K_2 闭合后，一方面是 V_0 产生的电流

$$I_1=\frac{V_0}{R_0}$$

另一方面是 L 放电电流

$$I_2=\frac{V_0}{R_0+R}e^{-1}$$

两者方向相反，有

$$I=I_1-I_2=\frac{V_0}{R_0}-\frac{V_0}{R_0+R}e^{-1}$$

由于 $I_1>I_2$，所以 I 的方向与 I_1 相同。

8-T15 **【13-29】** 如图 13-23 所示，截面为矩形的螺绕环总匝数为 N。

（1）求此螺绕环的自感系数；

（2）沿环的轴线 OO' 放一根直导线，求直导线与螺绕环的互感系数 M_{12} 和 M_{21}，两者是否相等？

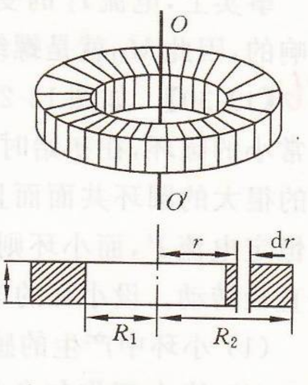


图 13-23

解 （1）当螺绕环中电流为 I 时，可求得螺绕环内的磁通量为

$$\Phi=\frac{\mu_0 NIh}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

由此可得螺绕环的自感系数

$$L=\frac{N\Phi}{I}=\frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0 NI$

$B=\frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$ $\quad\Phi=\int\vec{B}\cdot d\vec{S}=\int\frac{\mu_0 NI}{2\pi r}h\,dr=\frac{\mu_0 NIh}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$

（2）设直导线中有电流 I_1，此电流在螺绕环的矩形截面上产生磁通量。在矩形截面上距直导线为 r 处取宽为 dr 的条形面积元（图 13-23），此面积上磁通量为

$$d\Phi_{12}=BdS=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}h\,dr$$

该矩形面积上的磁通量则为

$$\Phi_{12}=\int d\Phi_{12}=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}h\,dr=\frac{\mu_0 I_1 h}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

直导线对螺绕环的互感系数为

$$M_{12}=\frac{N\Phi_{12}}{I_1}=\frac{\mu_0 Nh}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

设螺绕环中有电流 I_2，它在环的矩形截面上形成的磁通量为

$$\Phi=\frac{\mu_0 NI_2 h}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

设想长直导线和位于无限远的曲导线构成一个回路，则电流 I_2 在这个回路面积上形成的磁通量为

$$\Phi_{21}=\Phi=\frac{\mu_0 NI_2 h}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

螺绕环对这个回路的互感系数为

$$M_{21}=\frac{\Phi_{21}}{I_2}=\frac{\mu_0 Nh}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

事实上，电流 I_2 的变化对这一回路的无限远的曲导线部分是没有影响的，因此 M_{21} 就是螺绕环对直导线的互感系数，可见 $M_{12}=M_{21}$。

8-T16 **【13-30】** 如图 13-24 所示，一半径为 r 的非常小的圆环，在初始时刻与一半径为 r' ($r'\gg r$) 的很大的圆环共面而且同心，今在大环中通以恒定电流 I'，而小环则以匀角速度 ω 绕着一条直径转动。设小环的电阻为 R。试求：

(1) 小环中产生的感应电流；

(2) 使小环作匀角速度转动时需作用在其上的力矩；

(3) 大环中的感应电动势。

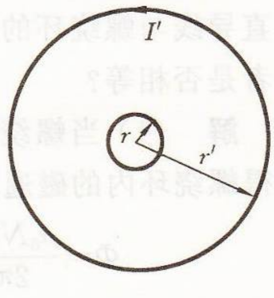


图 13-24

解 (1) 由于 r 很小，故可认为小环处在均匀磁场中，则小环上的感应电动势和感应电流分别为

$$\mathscr{E}_i=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{d}{dt}(BS\cos\omega t)=\frac{\mu_0 I'}{2r'}\pi r^2\omega\sin\omega t$$

$$I_i=\frac{\mathscr{E}_i}{R}=\frac{\mu_0\pi r^2\omega I'}{2r'R}\sin\omega t$$

(2) 因小环匀速转动，故其受的合力矩为零，即

$$\boldsymbol{M}_{动}=-\boldsymbol{M}_{磁}$$

而

$$|\boldsymbol{M}_{磁}|=|\boldsymbol{p}_m\times\boldsymbol{B}|=I_i SB\sin\omega t$$

$$|\boldsymbol{M}_{动}|=\frac{\omega}{4R}\left(\frac{\mu_0\pi r^2 I'}{r'}\sin\omega t\right)^2$$

(3) 穿过小环的磁通量为

$$\Phi=BS\cos\theta=\frac{\mu_0 I'}{2r'}\pi r^2\cos\omega t$$

则互感系数为

$$M=\frac{\Phi}{I'}=\frac{\mu_0\pi r^2}{2r'}\cos\omega t$$

大环中互感电动势为

$$\mathscr{E}_{iM}=-M\frac{dI_i}{dt}-I_i\frac{dM}{dt}=-\frac{\mu_0^2\pi^2 r^4\omega^2 I'}{4r'^2 R}\cos 2\omega t$$

8-T17 一螺绕环，每厘米绕 40 匝，铁芯截面积为 3.0 cm^2，磁导率 $\mu=200\mu_0$，绕组中通有电流 5.0 mA，环上绕有二匝次级线圈。求：(1) 两绕组间的互感系数；(2) 若初级绕组中的电流在 0.10 s 内由 5.0 A 降低到 0，次级绕组中的互感电动势为多少？

① $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu N I \Rightarrow B\cdot 2\pi r=\mu N I \Rightarrow B=\dfrac{\mu N I}{2\pi r}=\mu n I$

$\phi_{12}=\mu n I_1 S\cdot 2$

$M=\dfrac{\phi_{12}}{I_1}=2\mu n S=6.03\times10^{-4}\,(H)$

② $\left|\dfrac{dI_1}{dt}\right|=\dfrac{5A}{0.1s}=50\,A/s$

$|\varepsilon|=M\left|\dfrac{dI_1}{dt}\right|=0.03\,(V)$

8-T18 **【13-33】** 两根足够长的平行导线中心间的距离 d 为 20 cm，在导线中维持一强度为 20 A 而方向相反的恒定电流。

(1) 若导线半径为 10 mm，求两导线间每单位长度的自感系数；

(2) 若将导线分开到距离 $d'=40$ cm，求磁场对导线单位长度所作的功；

(3) 位移时，单位长度的磁能改变了多少？是增加还是减少？说明能量的来源。(忽略导线内部的磁通量。)

解 (1) 因 $d\gg a$，故通过两导线间单位长度区域的磁通量为

$$\Phi=\int \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_a^{d-a}\left[\frac{\mu_0 I}{2\pi r}+\frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)}\right]dr=\frac{\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}\approx\frac{\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{d}{a}$$

单位长度自感系数为

$$L=\frac{\Phi}{I}=\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d}{a}=1.2\times10^{-6}\,\mathrm{H}$$

(2) 当两导线之间的距离从d 分开到d'，磁场力对单位长度导线作的功为

$$A=\int_d^{d'}F dr=\int_d^{d'}IlB dr=\int_d^{d'}\frac{\mu_0 I^2}{2\pi r}dr=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\ln\frac{d'}{d}$$

$$=\frac{4\pi\times10^{-7}\times20^2}{2\pi}\ln\frac{40}{20}=5.55\times10^{-5}\,\mathrm{J}\quad(\text{作正功})$$

(3) $\Delta W=\dfrac{1}{2}L'I^2-\dfrac{1}{2}LI^2=\dfrac{\mu_0 I^2}{2\pi}\ln\dfrac{d'}{d}=5.55\times10^{-5}\,\mathrm{J}$

磁能增加，同时磁场力作正功，这两部分能量来自电源。这是因为导线在分开的过程，自感系数从L增加到L'，因此使导线回路中出现自感电动势，为维持导线中的恒定电流，则电源必须克服自感电动势作功。从而把电能变成了磁场能和移动导线时所消耗的能量。

8-T19【13-38】 一同轴线由很长的两个同轴电缆的圆筒构成，内筒半径为1.0 mm，外筒半径为7.0 mm，有100 A 的电流由外筒流出，由内筒流回，两筒的厚度可忽略。两筒之间的介质无磁性（$\mu_r=1$），求：

（1）介质中磁能密度w_m的分布；

（2）单位长度（1 m）同轴线所储的磁能W_m。

解 （1）两筒之间的磁场分布为

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

则磁能密度分布为

$$w_m=\frac{B^2}{2\mu_0}=1.59\times10^{-4}\frac{1}{r^2}\ (\mathrm{J/m^3})$$

（2）单位长度同轴线所储存的磁能为

$$W_m=\int w_m \mathrm{d}V=\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}2\pi r\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

$$=\left(\frac{4\pi\times10^{-7}\times100^2}{4\pi}\ln7\right)\mathrm{J}=1.95\times10^{-3}\ \mathrm{J}$$

8-T20【14-1】 如图 14-1 所示，一边长为 1.22 m 的正方形平行板电容器，充电瞬间电流为 $I=1.84$ A，求此时：

（1）通过板间的位移电流；

（2）沿虚线回路的 $\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$（图 14-1）。

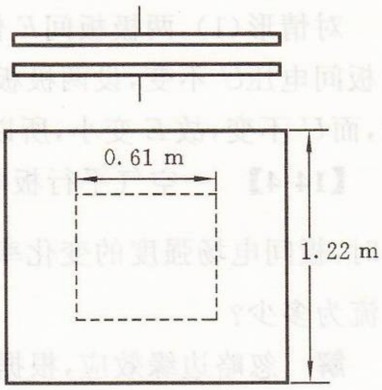


图 14-1

解 （1）根据定义，板间的位移电流为

$$I_D=\frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=I=1.84\ \mathrm{A}$$

（2）忽略边缘效应，可认为极板间的位移电流均匀分布，故位移电流密度为

$$j_D=\frac{I_D}{S}=\frac{1.84}{1.22^2}\ \mathrm{A/m^2}=1.24\ \mathrm{A/m^2}$$

根据全电流定理，磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 沿虚线回路的积分为

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=j_D\cdot S_1=1.24\times 0.61^2\ \mathrm{A}=0.46\ \mathrm{A}$$

8-T21【14-3】 一平行板电容器，略去边缘效应，

（1）充电完毕后与电源断开，然后拉开两极板，问此过程中两极板间有无位移电流？

（2）充电完毕后仍然与电源连接，然后拉开两极板，问此过程中两极板间有无位移电流？简述理由。

解 由位移电流密度大小

$$j_D=\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}=\varepsilon\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$$

可以看出，只有 E 变化时，才有位移电流。

对情形（1），两极板间 E 保持不变，故没有位移电流；对情形（2），两极板间电压 U 不变，设两极板间距为 d，则 $U=Ed$，当两极板拉开时 d 增大，而 U 不变，故 E 变小，所以有位移电流。

8-T22【14-6】 有一平行板电容器，电容为C，两极板都是半径为R的圆板，将它连接到一个交流电源上，使两极板电压为$V=V_0\sin\omega t$。在略去边缘效应的条件下，求：

（1）两极板间位移电流强度与位移电流密度；

（2）两极板间任意一点的磁场强度。

解 （1）由位移电流的定义，可得电容C的两极板间的位移电流强度为

$$I_D=\frac{\mathrm{d}\Phi_D}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=C\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=CV_0\omega\cos\omega t$$

$C=\frac{q}{V}$

故位移电流密度为

$$j_D=\frac{I_D}{\pi R^2}=\frac{CV_0\omega}{\pi R^2}\cos\omega t$$

（2）将$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\sum_i(I_i+I_{Di})$用于极板间半径为$r$（$r<R$）、与极板同心的圆形环路，则有

$$H\cdot 2\pi r=j_D\pi r^2$$

故两极板间任意一点的磁场强度为

$$H=\frac{j_D r}{2}=\frac{CV_0\omega r}{2\pi R^2}\cos\omega t$$

8-T23：A。

8-T24：D。