



Dissertation for Doctoral Degree in 2011

University code:10269

Registered code:51083200042

# *East China Normal University*

## **Research and Intervention to the Elementary School Students and the Middle School Students with Mathematics Learning Disability**

Department: The School of Psychology and Cognitive Science

Major: Development & Education Psychology

Research Area: Personality Development & Promotion

Supervisor: Prof. Xiaowen Li

Candidate: Fangfang Kang

May. 2011

)

/

## 华东师范大学学位论文原创性声明

郑重声明：本人呈交的学位论文是在华东师范大学攻读硕士学位期间，在导师的指导下进行的研究工作及取得的研究成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含其他个人已经发表或撰写过的研究成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中作了明确说明并表示谢意。

作者签名： 亢芳芳

日期：2011年5月23日

## 华东师范大学学位论文著作权使用声明

《中小学生数学学习困难研究与干预》系本人在华东师范大学攻读学位期间在导师指导下完成的硕士学位论文，本论文的研究成果归华东师范大学所有。本人同意华东师范大学根据相关规定保留和使用此学位论文，并向主管部门和相关机构如国家图书馆、中信所和“知网”送交学位论文的印刷版和电子版；允许学位论文进入华东师范大学图书馆及数据库被查阅、借阅；同意学校将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于（请勾选）

1. 经华东师范大学相关部门审查核定的“内部”或“涉密”学位论文\*，  
于 年 月 日解密，解密后适用上述授权。

2. 不保密，适用上述授权。

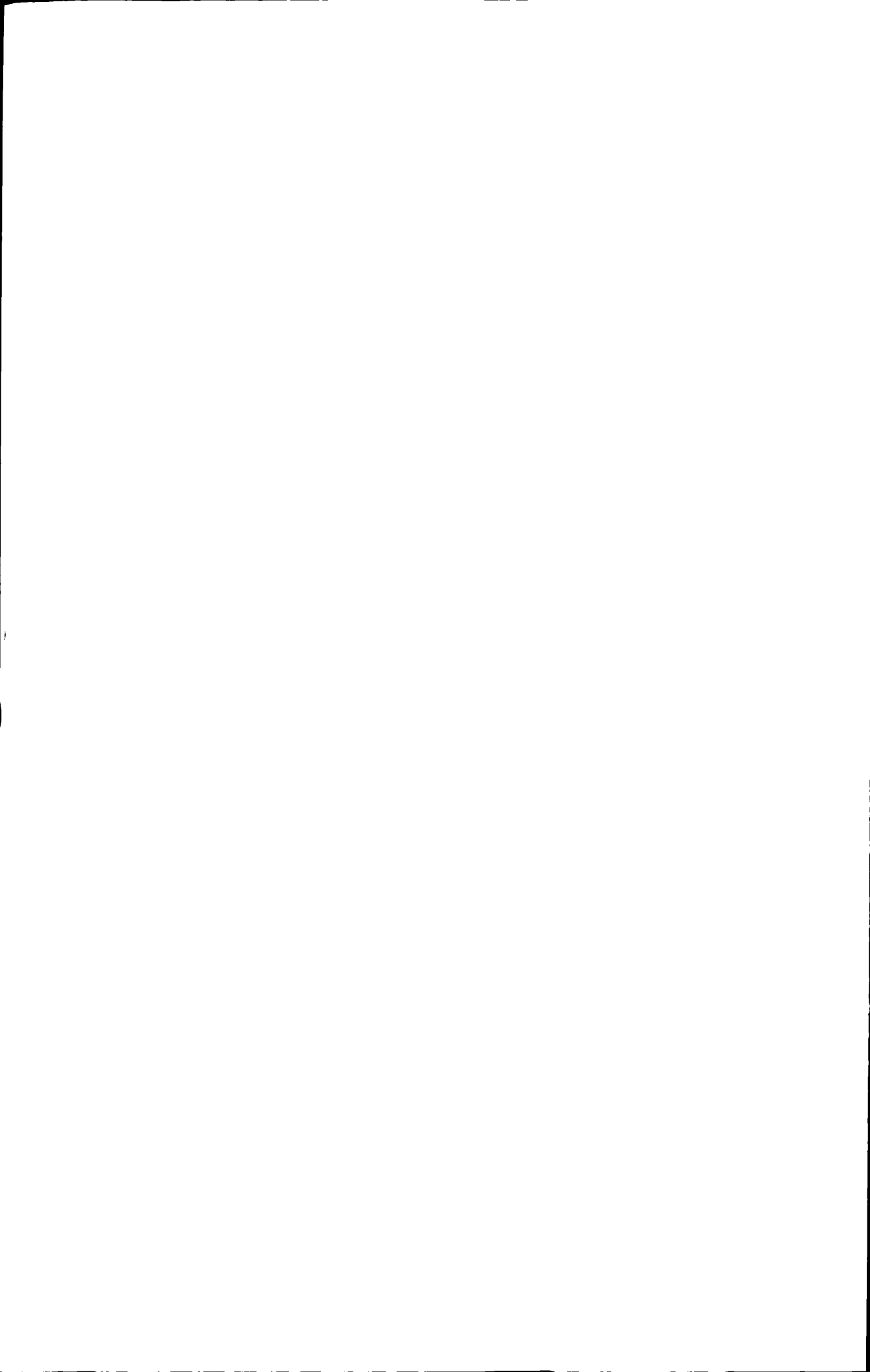
导师签名

亢芳芳

本人签名

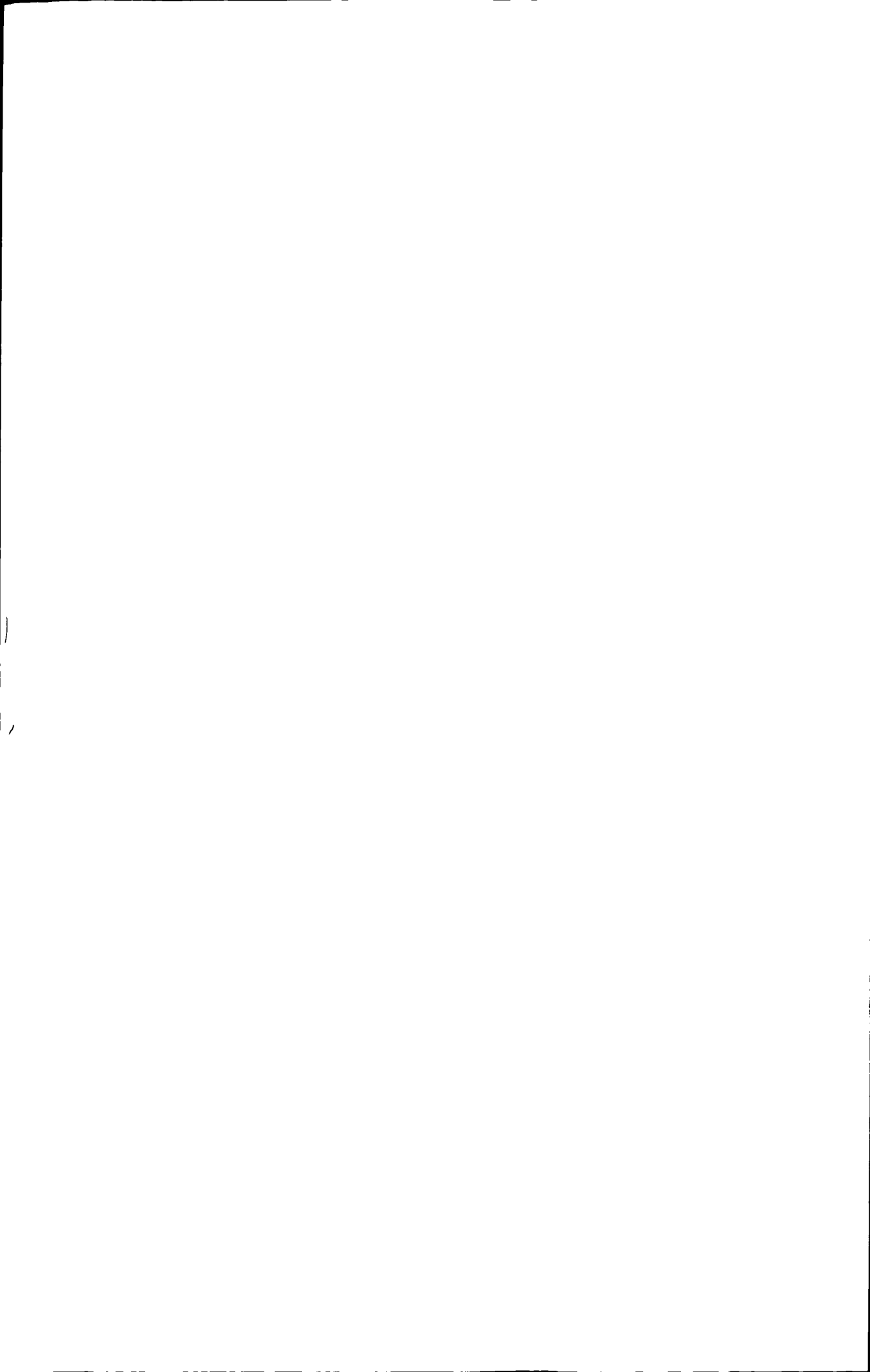
亢芳芳

2011年5月23日



### 亢芳芳硕士学位论文答辩委员会成员名单

姓名	职称	单位	备注
桑标	教授	华东师范大学	主席
陈国鹏	教授	华东师范大学	
邓赐平	副教授	华东师范大学	



## 摘要

当前对数学学习困难的研究主要集中在小学阶段,而且对于小学生数学学习困难的研究主要集中在与工作记忆的关系方面,干预策略针对于提高学生的记忆。现实是,不论小学阶段还是中学阶段,在数学学习转折阶段的学习都会比较容易出现学习困难现象。元认知理论在教学中的应用为中小学数学学习困难提供了很好的思路,基于元认知理论对中小学转折阶段的学生数学学习困难的研究加以探究是一种有益的尝试。

本论文从收集和分析学生的数学学习错误出发,着重研究学生的数学学习心理特点。通过分析数学解题错误,观察学生的课堂表现,分析学生的课堂练习、课后作业以及随堂测验,搜集整理学生的错误类型,设计数学学习干预,针对不同类型的错误给出不同的帮助。从而帮助学生建立思维概念,更好地适应中学数学学习生活。

本论文的研究过程主要包括4个阶段:

第一阶段:进入中学课堂,以听课、课后访谈的方式,通过观察学生课堂行为表现,课后作业,课堂测试,整理学生易犯的、普遍性的错误。从数学内容本身对错误进行分类。

第二阶段:依据错误分析,采取小组比赛形式进行数学概念学习的干预。

第三阶段:对于数学学习错误分小组进行干预,小组组合是年纪交叉组合,通过讨论有分歧的题目再现学生做题目的状态,干预形式有小组合作,小组竞赛等,同时在干预过程中总结,重新对数学学习中的错误进行分类,按照数学学习的心理特点进行分类。

第四阶段:依据数学学习错误心理特点的分类,探索性地给出相应的干预策略。

通过以上阶段的研究,发现了数学学习错误类型,提出了相应的干预策略,帮助学生建立数学概念,培养学生的自我调节能力,同时通过干预研究提出了帮助学生内化所学知识的有效途径。从中发现了元认知知识对学生的学习有重要作用;图表、符号能够帮助学生建立心理脉络与数学学科知识的联结;有差别的小组组合最能够激发学生的自我调节能力;出声思维能够集中多动症儿童的注意力。

关键词: 数学学习困难 自我调节 数学学习错误 干预策略 元认知





## Abstract

Current research on mathematics learning difficulties focus on the stage of primary schools, and researchers pay chose attention on the relationship of mathematics learning difficulties and working memory . Intervention strategies for students is to work on improving working memory. The reality is, whether primary or secondary stage, at the turning point of the mathematics learning will be more prone to the phenomenon of learning difficulties. Metacognition Theory is a good learning theory. Therefore it is meaningful to study the MLD of the turning point on the basis of metacognition Theory.

This paper collect and analyze the errors in mathematics learning process. it focuses on the psychological characteristics of students in mathematics learning. By analyzing the mathematical problem, observing students performance in class, analyzing student classroom exercises, homework assignments and quizzes, collects and clasifies mathematical learning problems. Designs different interventions to help students build concept, better adapt to math learning life.

This thesis mainly includes four stages:

phase I: I mainly observe the behavior of students in the classroom, analyze homework, class tests and so on .clasify the universal errors.

phase II: According to error analysis, I held a mathematics competition.

Phase III: sub-group intervention, group composition is cross-old combination .students discuss the differences and reappear their state.

The forms is different ,such as corporation or team competitions.

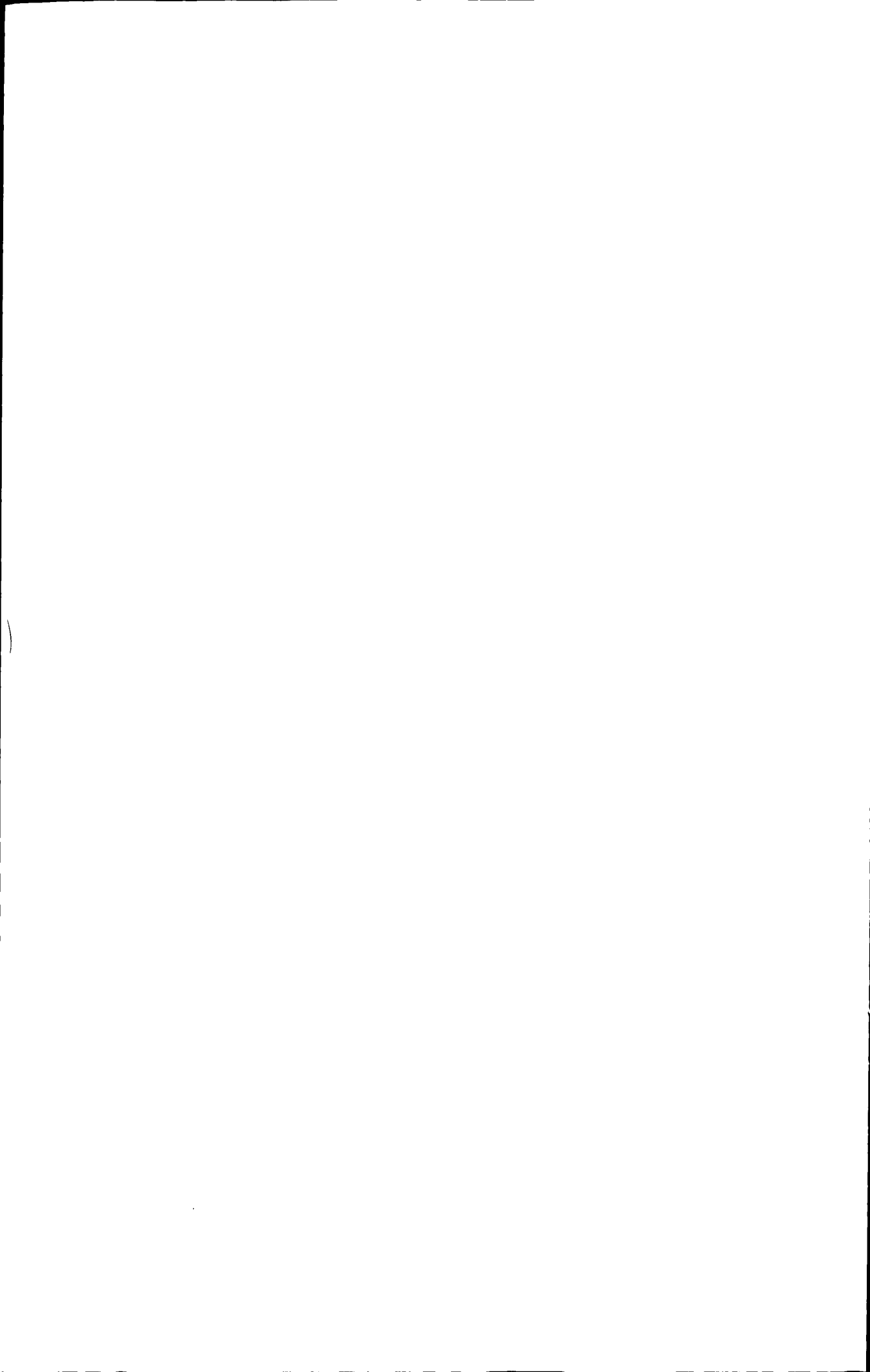
reclassify errors on the basis of the psychological characteristics.

Phase IV: According to the psychological characteristics of mathematics learning error, I give the corresponding intervention .

Through the above stage of the study, found the error type of mathematics learning .presented the intervention strategy to help students develop mathematical concepts, culture students' self-regulation, metacognitive knowledge pay important role on student learning; diagrams, symbols can help students create a psychological connection with the mathematical subject knowledge. difference between the students of group can better inspire their self regulation. Speaking aloud can focus ADHD child's attention.

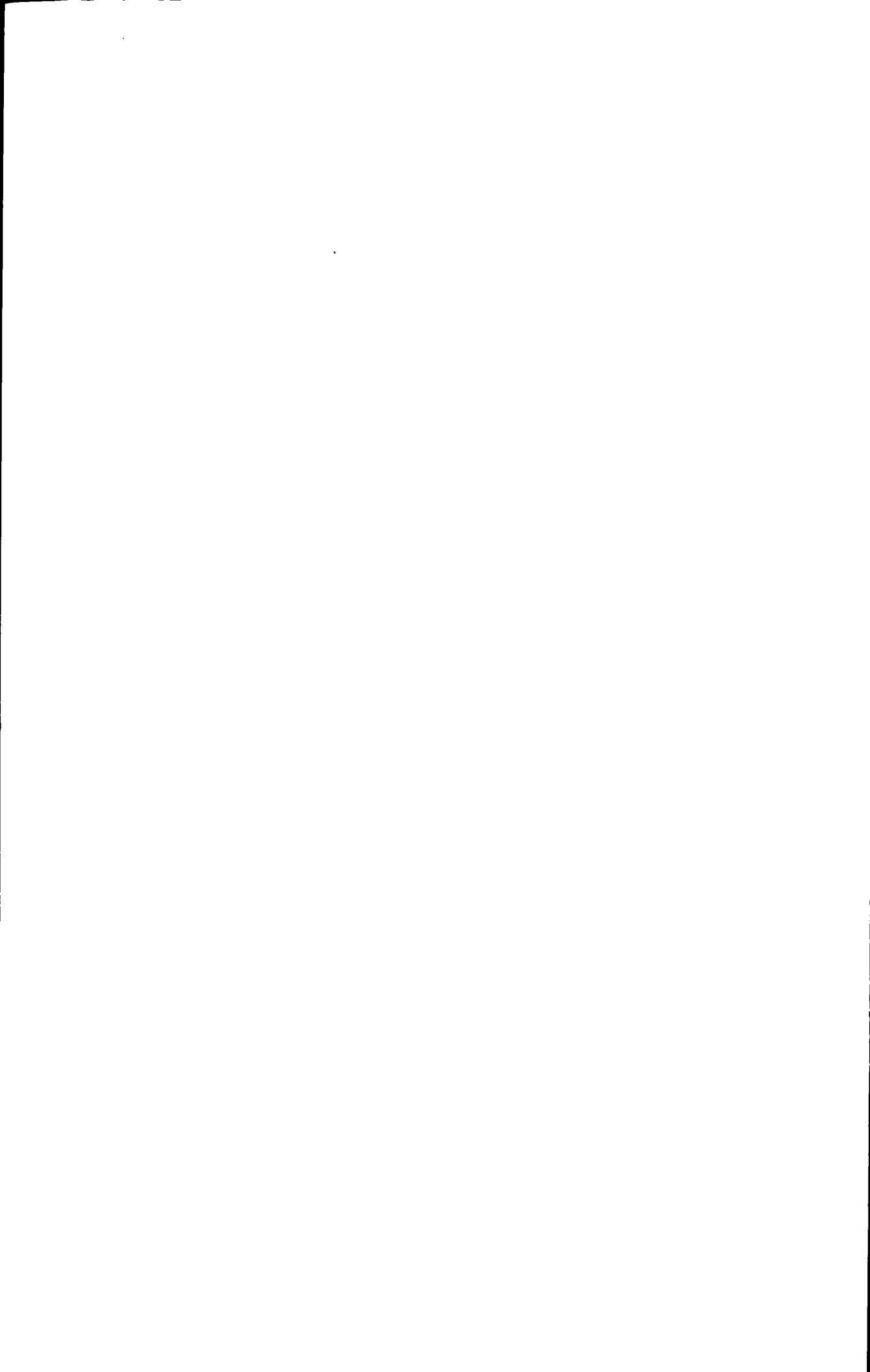
### Key words

Mathematics learning disability    self-regulation  
error of mathematics learning    intervention strategy    metacognition



# 目录

第一部分 问题提出数学学习相关研究综述	1
1 问题提出	1
2 文献综述	2
2.1 各派学者对元认知的理解	2
2.2 具体领域中元认知研究的发展	3
2.3 心理工具的提出	4
2.4 学习困难概念以及研究	4
2.5 干预策略	7
3 研究框架	7
3.1 研究目标	7
3.2 研究构思	8
3.3 研究步骤	8
第二部分 研究过程和结果分析	9
1 第一阶段: 数学解题错误收集与整理	9
2 第二阶段: 数学概念学习的集体活动干预	13
2.1 设计干预方法	13
2.2 小组竞赛干预实施	16
2.3 假期小组干预	18
3 第三阶段: 从心理活动角度对数学错误进行分类	24
4 第四阶段: 心理支架式干预	27
4.1 支架式干预策略类型	29
4.2 支架式干预效果	32
5 干预过程中学生的自我调节发生了变化	33
第三部分 讨论与总结	41
1 选题	41
2 讨论	42



3 结论.....	44
4 研究不足与展望.....	44
参考文献.....	46
附录.....	51
后记.....	61



## 第一部分 问题提出以及数学学习相关研究综述

### 1 问题提出

对于数学学习困难的研究是国际教育界的一大热点,许多学者都对此进行了研究,并且提出了自己的不同的看法,Siegel 和 Ryan (1989) 得出结论说算术学习困难学生在工作记忆某个方面有缺陷。Elawar (Elawar,1992) 观察发现能力比较低的学生面对数学问题常常感到困惑,而且他们也不能解释自己正确解决问题的策略。Costa (1985) 和 Sternberg (1986) 提出低能力水平的学生通常缺乏很好的元认知技能。最近的研究证据也证明了在学习过程中学生本身起着至关重要的重要。那些对于自己的思考和学习都控制不好的学生最终都会有学习无助感 (Ganz, 1990)。这些都将学生的数学学习困难和元认知联系在一起。也有学者提出了针对性地干预策略, Interspersal Drill Ratios (CooTe & Reichard, 1996), DRAW (Miller & Mercer, 1991) and SOLVE (Miller & Mercer, 1993), Tey Questions (Rivera & Smith, 1988), 这些方法的目的是给学生自己思考的空间,通过教师的示范或者学生伙伴的反馈让学生学会对他们来说不熟悉的知识。

纵观对于元认知以及数学学习困难的研究现状,我们认为还存在一下这些问题:

第一,对数学学习困难的研究多数研究者都集中小学阶段的研究,对中学数学学习的研究较少,并且对于学生的数学学习问题关注的问题的表面特征,单纯地就教学内容而论,没有对于问题的深层次的归类与讨论。

第二,在研究的方法上,主要是将数学学习正常的学生与数学学习困难的学生的问题表征进行对比性的研究,将数学学习困难学生看做一个聚类群体,而没有关注数学学习困难学生的差异,干预策略大多是题目干预,分析题目,进行统计,没有关注干预过程中学生的表现及其变化。

为此,本研究拟从数学学习中错误的心理特点进行分类,根据错误分类进行干预,同时关注学生在干预过程的变化。



## 2 文献综述

### 2.1 各派学者对元认知的理解

近 20 几年来,元认知进入人们的视线并越来越受到人们的关注。“元”的概念最初来源于哲学概念,是关于对内省法的自我证明悖论的思考。Comte 认为内省法存在“自我证明悖论”即同样的一个器官如何能够在同一时间扮演两个角色,既是观察者又是被观察者。1956 年,哲学家 Alfred Tarski 为解决这一悖论引进了“meta”这一概念。他认为,“metawhatever” refers to “whatever about whatever”。他针对客体水平提出了元水平的概念;客体水平是关于客体本身的表述,而元水平则是关于客体水平表述的表述。而元认知是美国心理学家弗拉威尔(Flavell)于二十世纪七十年代提出的。弗拉威尔认为:元认知是指主体对自身认知活动的认知;即人对自身的感知、注意、记忆、想象、思维、理解等认知过程进行积极的自我监视、自我反思、自我解悟、自我调控的过程。它由两部分构成,即元认知知识和元认知控制。元认知知识是有关认知的知识,也就是对认知活动的过程、结果以及相关信息的认识;元认知控制是对认知行为的管理和控制,是认知主体在进行认知活动的全过程中,对认知活动不断进行积极自觉的监视、控制和调节的过程。

20 世纪 80 年代以后,有关元认知的研究越来越受到学者们的重视。各学派对于元认知都有自己独特的见解,格式塔学派(1986)认为元认知从某种角度上看就是一种概括性思维,是整体思维。James 认为元认知和自我调节是和自我有关系的,James 总是将自我和认知结合在一起,他提出的内部观察可以看作是自我认知过程的基础。Piaget 的理论是和他人以及客体结合在一起的,他认为人们通过反复的重构、同化和顺应从而达到平衡,认知和有意识的自我调节在这其中起着非常重要的作用。Vygotsky 的理论是和语言的中介作用联系在一起的,他认为发展过程中社会符号和工具在其中起着非常重要的作用,元认知和自我调控是交织在一起的,元认知是对于自己思维过程的了解以及如何通过符号来控制自己的思维,他认为在青少年时期元认知才能完全发展起来,维果斯基认为自我调控是对自我注意、思维和行为的精确性地调控,维果斯基的内化认知过程提出了支架的概念。

Simmon (1996) 结合多位学者的观点总结出了元认知知识,元认知技巧

以及元认知信念的组成成分以及他们之间的区别,元认知知识作为知识是为了我们对于元认知过程和结果有一个更深刻的理解(Flavell, 1976),元认知知识有三个组成成分,描述性元认知知识(Jacobs& Paris, 1987)就是对于命题的认知、对世界的认识,对人类思维的认识;过程性元认知知识(Jacobs& Paris, 1987)是对思维过程的认识以及策略性元认知知识(Jacobs& Paris, 1987)什么策略是有效的,什么时候使用策略是合适的。元认知技巧是指资源控制自己的元认知过程,元认知技巧包括预测、计划、控制、评价。元认知信念主要是对于学习归因的练习。

## 2. 2 具体领域中元认知研究的发展

21 世纪以来一些学者发现元认知对于学校教育有着很重要的作用, Paul R.Pintrich 将自我调节引入到学习领域中,他研究了自我调节的概念框架,强调学习过程动机的重要性,强调了自我调节的发展与干预以及教学环境中自我调节的复杂性。另外有一些研究者提出了元认知缺失,自我调节缺失可能会导致不同程度的学习障碍。大量的研究将认知加工缺陷和数学学习困难联系在了一起。Garrett, A.J., Mazzocco, M.M. M., & BaTer, L.(2006)研究发现,有数学学习困难的学生比起没有数学学习困难的学生评估能力和预测能力都要差一点。但是在预测不能解决的问题时他们没有差异,同时发现了自我检查在数学学习中的重要性。Gitendra et al, 2005; NCTM, 2000 认为既然数学学习中教师就是想让学生发现解决问题的办法,如此一来最关键的教学就是让学生能够验证自己概念和推理的正确性而不是培养学生死记硬背的能力。Woodward 发现让学生发现还是不够的,我们还要让学生融入到学习的过程中去,那么教师就需要用系统的策略性的知识教会学生缺少的知识。Swanson, HosTyn, and Lee's (1999)认为策略性的知识关注使用一些程序规则,元认知线索,记忆和复习策略,教师要使用特定的教学策略激发学生的元认知过程,而使用这些策略小组教学更合适,学生可以及时的得到教师或者学生的反馈。一些学者在通过对数学学习困难学生的进行干预研究

之后给出了一些对于数学学习中除法运算的干预策略, Interspersal Drill Ratios (CooTe & Reichard, 1996), DRAW (Miller & Mercer, 1991) and SOLVE (Miller & Mercer, 1993), Tey Questions (Rivera & Smith, 1988), 这些方法的目 的都是给学生自己思考的空间,通过教师的示范或者学生伙伴的反馈让学生学会 对他们来说不熟悉的知识。

## 2. 3 心理工具的提出

心理工具是列夫·维果斯基理论的主要概念,这一概念是维果斯基早年就提出来的,最近心理学研究者关注到这一个概念的重要性。心理工具最初是比照人的手和行动对象之间的物质工具的概念而来的,其本质是社会性的。心理工具是指向内部的,是将内部的心理过程转化成为外部的高级心理功能,其外显的形式就是符号性的人工制品,诸如符号、标记、语言、公式及图像设计等等都是心理工具的外化。

心理工具应用到教育教学中,所起的作用是符号性的支架作用,在教学实践中心理工具帮助学生建立思维体系,符号是其外在的表现形式,通过一定的符号学生能够更快地掌握概念,这是功能化概念的核心,掌握概念并最终利用概念去思维,而要利用概念进行思维,需要将概念的典型特征和抽象化概括化的语言相结合。

## 2. 4 学习困难概念以及研究

Gersten 和他的同事们发现,一段时间内,运算能力不熟练或者说基本事实不熟练是数学学习困难的主要标志。D. Bryant 和他的同事发现对于数学学习有困难的学生文字能力缺乏是排在第一位的。他们的研究还发现,有数学学习困难的学生他们的其他方面也很弱而不仅仅是数学。对于这样的学生预防和干预是很重要的。

很多年以来,人们使用智力测验分数和成就测验分数来确定学习困难,学者也使用 Response to Intervention (RtI)来确定孩子是否学习困难。Vaughn 提出了一个

三层阅读模型，这个模型也可以推广到数学或者其他学科上。第一层：对所有的学生而言，是由基本教学事实构成的，努力的让学生同时接受第二层和第三层的知识。第二层：提供额外的教学并且进一步监督那些接受能力比同龄人低的孩子。这层的干预可以由任课教师来完成。第三层：是针对那些对于第一层和第二层的干预没有反应的孩子。这些孩子需要更进一步的干预。这一层的干预可能需要特殊教育者或者是教育专家来指导进行。

Fuchs 提出了一个三层模型，第一层是最大众化的，可以对所有的学生都实行，第二层是对于特定的学生没有损害的干预，第三层更集中，更个体化。还有一些研究者提出四层或者五层(Dickson & Bursuck, 1999; Grizzel, n.d.)干预体系，但是所有的体系都有共同的目标，那就是 A: 给学生提供一些水平不断提高的教学方式，B: 尽量减少接受后续层次教学的学生，C: 确定有学习困难的学生。尽管很多人认为 RtI 是确认学习困难，但是现在大部分的研究还是将其作为预防模型。现在很多中小学在使用 RtI。

运算技巧主要是表现在使用的准确性和速度问题上，有数学学习困难的学生不能有效地从记忆中提取基本概念。

有数学学习困难的学生工作记忆的能力比较差。工作记忆包括存储和操作必要的信息。对于有数学学习困难的学生而言主要是和工作记忆各成分中的中央执行系统的缺陷有关，主要是难以阻止无关信息的侵入，以及难以灵活的思维，除此之外就是薄弱的语音过程也与数学学习困难有关。在小学一年级的数学学习主要是与数数以及数数的精确性有关。小学高年级就和预测词汇的精确性有关。

概念知识和理解原理以及相关知识有关，概念缺失或者薄弱也可能导致数学学习困难。一般而言有数学学习困难就有概念缺失，但是对于年龄大一点的孩子而言有数学学习困难不一定概念就有缺失。

(Schoenfeld,1987) 认为数学学习困难是获得与自己所在年级相当的知识和问题解决方式时失败。(Geary & Brown, 1991) 提出传统的成就测量只是确认孩子是否有数学或者算术学习困难而没有关注认知加工过程的缺陷对孩子学习能力不足也是有责任的。相比较而言，信息加工方式对数认知和算术加工方面的策略技巧和认知加工有更全面的分析。

最近，大量的研究将认知加工缺陷和算术学习困难联系在一起。Geray(1993) 概括了一些其他研究者的研究成果，是关于加工速度不同指标之间的区别。使用的指标有：计算速度、从长时记忆中提取基本事实的速度、编码的速度、策略选

择和得出问题结果的过程。从中得出的结论与算术学习困难和一般儿童的加工速度不同的问题的结论并不一致。他说这可能是因为所选的被试异质性造成的。但是他坚持认为算术学习困难学生在提取事实和执行计算策略方面比起正常的孩子要慢一点。而且他认为这些孩子慢的原因最主要是要归因于他们的问题解决策略花费了太长时间，比如说求和运算。

由此引发的问题就是数学学习困难学生是否是与其它学生相比对数信息的认知加工更慢。与此相似也有研究者认为是与工作记忆有关。

通过研究发现，阅读困难孩子在数字广度和文字广度实验中都明显的低于正常儿童，而算术学习困难的儿童只是在数字广度任务上与一般儿童有明显的差异。由此 Siegel 和 Ryan (1989) 年得出结论说算术学习困难学生在工作记忆某个方面有缺陷。

但是后来有研究者 (Hitch & McAuley) 认为 Siegel 和 Ryan 的实验可能有额外变量的影响，也就是说算术学习困难的学生在记数广度任务上成绩不好，可能不是由于同时做两件事，他们可能在两个任务中或者其中任何一个有困难，即数字广度和计数速度。他们在没有加工和存储同时发生的情况之下，测试了数字广度和计数速度。结果与他们的设想一致，ALD 学生不仅在数字广度上而且在计数的速度上都低于控制组。Hitch & McAuley 认为，ALD 学生在学习过程中遇到困难可能是因为基本事实加工有困难，也可以说从长时记忆中提取数字表征有困难。

ALD 儿童比一般儿童数字广度更小一点，Geray 得出结论说，数字广度小是其工作记忆资源有限的表现，这也就导致了从长时记忆中提取有关算术知识的困难。ALD 儿童不仅数字广度小而且字母广度也会比一般的儿童更小。

另外有研究表明工作记忆和数学能力之间并不是随着年龄的增加而显著相关的，而是在年龄发展变化的过程中相对稳定的。不考虑年龄，数学缺陷既和领域特殊性有关也和领域一般性有关。领域特殊性的维度分为：口头语言工作记忆和视觉——空间工作记忆。领域一般性的维度分为：刺激广度、刺激之间的联系、对于刺激的熟练性。

Mayer(1987)在他解决数学问题的模型中提出了四种心理加工模型：转变，整合，计划和监控，问题执行。学生的心理加工很大程度上受其能力的影响。这

些能力主要包括理解字词, 识别问题类型, 监控解决问题的过程, 执行算法。

(Elawar, 1992) Elawar 观察发现能力比较低的学生面对数学问题常常感到困惑, 而且他们也不能解释自己正确解决问题的策略。Costa (1985) 和 Sternberg (1986) 提出低能力水平的学生通常缺乏很好的元认知技能。最近的研究证据也证明了在学习过程中学生本身起着至关重要的重要。那些对于自己的思考和学习都控制不好的学生最终都会有学习无助感 (Ganz, 1990)。而通过老师给以元认知的训练学生解决数学问题的能力有所提高 (Elawar, Corno, 1985)。也有一些证据表明对于数学学习中态度也和数学成绩成正相关 (Aiken, 1979; Cheung, 1988; Maqsd&Khaliq, 1991)。一些研究者 (Perkins, 1986; Resnick, 1985; Weinert & Kluwe, 1987, Elawar, 1992) 强调教师应该重点发展学生: 解决问题的能力, 对于数学的积极的态度以及问题解决中的自信。

## 2. 5 干预策略

对于干预策略的理论原则心理学家也提出了自己不同的看法:

- 1)、认知行为理论强调学生的自我调控和自我管理;
- 2)、社会文化模型理论就是维果斯基的内化认知过程, 这里提出了支架的概念。支架就是教师引导学生的学习活动, 在支架教学中逐渐内化认知过程;
- 3)、建构理论, 学生自己建构自己的认知活动, 可能是超乎我们的想象的。积极的互动过程培养了学生积极的建构知识, 解释材料, 赋予自己的认知经验以意义。事实上, 很多策略训练研究强调了社会和建构过程中策略训练的双重作用。

## 3 研究框架

本论文着重研究学生的数学学习心理特点。通过分析数学解题错误, 观察学生的课堂表现, 分析学生的课堂练习、课后作业以及随堂测验, 搜集整理学生的错误类型, 设计数学学习干预, 针对不同类型的错误给出不同的帮助。

### 3. 1 研究目标

第一, 从心理工具视角出发, 为学生建立符号概念之间的联结;

第二, 发现学生学习过程自我调节的指标;

第三, 判断有效干预的指标;

第四, 从心理角度对数学学习内容进行归类;

### 3. 2 研究构思

数学是一个结构性非常强的学科, 从低年级到高年级数学学习的体系也在不断地发生变化, 体系性的转变使得数学运算变得简单、抽象, 而数学学习最终的目的是要整合, 在这个转变的过程中学生由于缺少支架性的心理工具使得过渡到新的体系产生了困难。这是学生学习中普遍的问题而不是个别年级个别学生的问题, 是数学体系的转折。为了帮助学生有效学习, 本研究从归纳学生错误入手, 找到适合的心理工具或者是起支架作用的概念帮助学生和教师提高学习效率和教学效率。

将学生的错误分别从内容和心理上进行分类。根据错误给出干预方法, 帮助学生建立心理脉络和学习体系之间的联系, 促进学生思维发展。

本研究是学校文化生态之下的研究, 所谓生态是一个完整的系统, 系统是相互作用相互依赖的若干要素组成的具有特定功能的有机整体, 一般的实验研究或者是情境性研究只是截取学生生活的一个片段, 将学生生活中的一些重要的因素排除在外, 难以接近学生真正的生活, 难以观察学生真实的生存状态生态情境下对学生的数学学习进行干预时, 存在着不断交互作用, 学生的主题性也是重要的作用力, 在与环境互动的过程中他们也在不断地构建自己的心理世界。

本研究跟踪干预学生的数学学习过程, 在过程中总结, 归类, 分析, 干预。试图从心理工具的符号支架作用这一角度来探索初中一年级的数学学习。

### 3. 3 研究步骤

整个研究从结构上分成四个阶段:

第一阶段, 收集分析错题。进入课堂观察学生的学习过程, 整理分析学生的课堂作业, 课后练习以及周测卷、月考卷, 将其中大部分同学容易犯的错误整理分析。这一阶段的错误分类基本从数学知识体系角度进行分类, 数学学习中学生

普遍容易犯的错误分成四类，基本概念没有掌握，日常生活概念不清楚，符号运算规则不熟练，方程中分数化简过程容易顾此失彼。

第二阶段，采取集体活动方式对常态水平学生进行数学学习干预。针对错误类型设计针对性的练习，组织小队竞赛和小组活动。

第三阶段，重新整理分析错误题目。在第二阶段干预的过程中发现了学生不同内容的学习错误有内在的共同点，研究者着重从学习过程的心理活动进行分类，认识到心理工具是合理的分析思路。

第四阶段，根据学习过程心理活动的错误类型设计基本模块式干预，复合式干预，系列式干预等四种干预策略，对数学学习困难学生进行干预。

## 第二部分 研究过程和结果分析

### 1 第一阶段：数学解题错误收集与整理

从学生的错误出发，帮助学生找到学习中的问题，能够更好地融入到学科生活中的过程称为干预。干预需要从学生的实际情况出发，分类别、分阶段进行。收集学生的错误能够有针对性的对不同的问题给出不同的干预策略。收集错误的渠道主要是学生平时的作业、测验、任课老师的积累以及自己组织的小组活动的测试问卷。

初中一年级学生普遍性错误如下

通过整理初一年级学生课堂作业以及测试卷发现小学生刚进入初中之后普遍出现的错误分为以下 5 类：

#### 1) 概念错误



学生对于一些新出现的概念，概念的内涵，外延，概念中设计到的条件没有明确的把握。主要容易犯错误的概念有如下几种：

(1) 解和解集的概念容易混淆，学生在接触不等式之前，学习的都是等式，一个未知数代表一个数，但是不等式的出现伴随着另一个概念解集的出现，解集是多个解的集合。学生在刚刚接触不等式概念的时候难以理解解集的概念，很容易以偏概全，惯性思维仍然用解的概念去理解解集的概念。

如：下列是不等式  $2x-6 < 10$  的解集的是 ( )

A  $x < 7$    B  $x > 8$    C  $x < 8$    D  $x = 7$

为数不少的学生会将答案个数字代入不等式进行求解得出答案 D。

(2) 绝对值概念难以逆推，绝对值不是一个单一条件概念，是多条件概念，任何数的绝对值是正数，但是绝对值是正数其原始值可以是正数也可以是负数。顺退概念学生很容易把握，但是一旦逆推学生就很容易发生错误，往往容易遗漏

负数。如“如果一个数的绝对值是  $\frac{2}{3}$ ，那么这个数是\_\_\_\_\_”

错误：学生的答案是  $\frac{2}{3}$ 。

(3) 有理数，正整数，负整数的概念不清楚，所有可以用分数表示的数都是有理数，正整数包括两个概念，正数和整数，不同的数其暗含的条件不同学生因此难以把握。如：下列哪一组是有理数 ( )

A  $-8, -\frac{2}{3}, \pi$    B  $-9, 0, \pi$    C  $-\frac{2}{3}, 0, 17$    D  $2, 1, \pi$

错误：学生选择 D，他们对于  $\pi$  指代什么不清楚，对于分数是不是有理数不清楚。

不等式  $-2 \leq x < 3$  中的整数解为\_\_\_\_\_

错误：学生将“0”遗漏。

二元一次方程  $2x + y = 4$  的非负整数解有 ( ) 个。

错误：学生认为只有一个就是  $x=1, y=2$ , 遗漏了  $x=2, y=0$  的情况，学生对“非负”的概念没有掌握好。

(4) 单项式的概念，代数式是学生升入中学新的概念，对于多项式单项式的概念学生很容易混淆。如、 $-4x^2y^{2n-3}$  与  $\frac{1}{2}x^m y$  都是五次单项式，则  $m+n=$  \_\_\_\_\_

学生错误答案：4，既然是五次单项式，隐含的条件就是两个代数式最高次幂是

(5) 由题意知： $m=5, 2n-3=5$ . 学生对于五次单项式这样的复合概念难以分出其中的条件。

## 2) 生活常用概念缺乏导致的错误

由于学生对于日常生活问题不清楚，当解题涉及到相关知识时候，就影响了数学问题的解决。这类问题通常是税、利率、折扣、起步价等方面的问题，比如：

出租车的起步价是 11 元，超过起步价距离，每增加 1 千米，加收 2.1 元（不足一千米按照一千米计算）某人乘坐出租车从甲地到乙地付了 15.2 元，那么甲地到乙地经过的路程最大值是多少？

学生的计算过程如下： $15.2-11=4.2$ （元）  $4.2 \div 2.1=2$ （千米）学生只算到这一步，就没有了下文。学生对于起步价 11 元能够走多远距离不知道。

## 3) 符号运算错误

如果不等式两边同时除以一个负数，那么不等号的方向要改变，学生很难注意到这一点，很多同学在做题目的时候都会发生这样的错误，如：解下列不等式

$$4x+5>6x-7$$

$$4x-6x>-7-5$$

$$-2x>-12$$

$$x>6$$

$$3x+12 > \pi x+18$$

$$(3-\pi)x > 6$$

$$x > \frac{6}{3-\pi}$$

#### 4) 分数化简错误

涉及到方程中分式的化简学生时, 学生往往容易遗漏, 没有平衡的思想。等式两边要同时乘以相同的数或者相同的式子, 对于多项式各项都要乘。这一点学生往往容易忽视。因为分式方程计算的复杂性计算过程中也是学生容易犯错误的方面。

如: 解方程:  $\frac{2x+3}{x+1} = \frac{6x+7}{3x+4} - 1$

$$(2x+3)(3x+4) = (6x+7)(x+1) - 1$$

$$6x^2+17x+12 = 6x^2+13x+7-1$$

$$4x = -6$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

解方程:  $\frac{4-y}{2} - \frac{8-3y}{10} = 1 - \frac{8-2y}{5}$

$$5(4-y) - (8-3y) = 10 - 2(8-2y)$$

$$20-5y-8+3y = 10-18-4y$$

$$12-2y = -8-4y$$

$$20 = -2y$$

$$y = -10$$

#### 5) 常用数学概念错误

数学中有很多符号有特定的含义, 有的代表具体的数字, 如  $\pi$  代表圆周率,

有的代表内容，如 S 代表面积，C 代表周长等等，这些都是数学学习中默认的。但是学生对于符号代表的内容不了解，容易出错。如  $(3-\pi)x < -3$

$$X < \frac{-3}{3-\pi}$$

$\pi$  代表圆周率，其数值时 3.1415926，大于 3 所以上述题目，等式两边同时除以  $3-\pi$ ， $3-\pi < 0$  所以要改变不等号的方向。

这一阶段主要针对的是初中一年级学生在数学学习过程中普遍发生的错误，对这些错误进行归类，在这个阶段对错误进行归类主要是按照错误的内容进行的划分的。针对这一阶段总结的学生的错误在第二阶段进行干预。

## 2 第二阶段：数学概念学习的集体活动干预

### 2.1 设计干预方法

#### 1) 针对学生错误归类，设想干预

学生对于基本概念不能够熟练应用，同时在访谈中发现了学生在教学过程中基本没有与同伴交流的时间，针对这样的问题，在学期末为学生组织一次全班性的竞赛。

第一类错误是数学基本概念模糊，如对于解和解集的概念容易混淆，对于非负整数包括哪些数不清楚，或者掌握了概念但是难以在学习过程中调动已有的概念。针对这样的问题特点，干预的目的是帮助学生快速掌握基本概念，在具体的运算过程中熟练地应用概念。

对这类错误的干预设计是：第一步出一些选择题让学生快速反应，快速反应的目的是帮助学生掌握基本概念；第二步让学生总结规律，其目的是学生将掌握

的概念语言化；第三步让同学们自己出题目考别的同学，目的是让学生学会熟练应用基本概念，如果学生出现错误，让同伴进行纠正并给出解释，进一步深化对于概念的理解，加深记忆。

第二类错误，日常生活中税、利率、打折，起步价等等之类的概念缺乏。在学习中的表现就是难以应用这些概念去进行一定的计算。这些日常生活的概念的计算是简单的乘除法计算，学生碰到这些问题难以下手，是因为对这些概念的内涵没有明确的把握。

将这些概念以趣味题或者和生活密切相关的例题结合起来呈现给学生，让学生体会到学习和生活的接近，不仅能够激发学生的学习热情而且能够在更轻松的环境中学习。

第三类错误主要是不等式中引入负号的计算，学生易犯的错误就是在引入负号之后计算出错，在不等式中偶那个两边同时除以一个负数，不等号的方向要改变。干预需要给学生建立一个支架，让学生在实践中意识到引入负号之后有什么变化。比如向前走是正，向后走是负，温度升高是正，降低是负等等。温度为负，绝对值越大天气越冷，用日常生活中经常接触的概念帮助学生掌握负号的意义。题目类型由易到难分别是正误題，选择题，学生思考总结，最后学生自己出题。学生明白正负数在不等式解题中的规则之后，用概括化的语言自己总结，然后用自己的理解给同伴出题目，同伴发生错误之后出题者讲解，进一步深化对于负号的理解。

对第四类的方程中的分数化简，用翘翘板的概念引入，让学生掌握平衡的概念。所谓平衡就是两边一样多，不能厚此薄彼。学生在这一部分常犯的错误是解分式方程的时候，如果一边的分式由两部分组成，学生很容易丢掉一部分，针对这样的错误特点，给出解分式方程的一般的步骤，让学生练习解分式方程的步骤，将此步骤自动化，能够在解题的过程中自我监督自己的解题过程。若不能自动化

而又急于找出问题的答案就会出现顾此失彼的现象。

第五类的问题,主要的特点是在代数式中引入一些特殊符号之后学生对符号的指代不清楚,如  $\pi$ , 在解不等式时,如果除数为  $3-\pi$ ,需要判断  $3-\pi$  的正负才能够决定不等号的方向。学生往往没有进一步的思考。将数学中经常出现的符号总结归纳,教师给出符号学生快速反应符号指代的意义,符号的值,以及计算过程等等。

这些针对性的干预因为干预的实践条件缺失而没有能够实施。

## 2) 竞赛式干预

竞赛式干预是将学生分成小组比赛,以抢答的方式进行。竞赛式干预的特点是学生能够在愉快的气氛中学习,竞赛中既强调小组之间的竞争也需要团队之间的合作,能够激发学生的学习积极性,同时可以维护学生的自尊心,避免回答不出问题的尴尬。竞赛题目类型不同,小组的组合也应该有所不同,概念题和常识题适合各个发展水平的学生,学生小组组合可以随意组织。但是对于程序性的题目小组的结合就有所不同,因为程序性题目要考虑解题需要的不同的条件,这需要学生整合所学的知识,而不是单凭快速反应可以解决,对这样的问题需要将不同发展水平的学生分到一组,优生和中等生或者是中等生和差生,需要给学生创造讨论的空间,但是学生之间的差距又不能太大,如果学生差距太大难以形成讨论的氛围。

竞赛干预适合于干预基本概念题,常识题,不等式计算题,应用题不适合用竞赛干预。竞赛题目类型不同,小组的组合也应该有所不同,概念题和常识题适合各个发展水平的学生组合。但是对于应用题小组的结合就应该有所不同,因为应用题要考虑不同的题目需要的条件,这需要学生整合所学的知识,而不是单凭

快速反应可以解决,对这样的问题需要将不同发展水平的学生分到一组,优生和中等生或者是中等生和差生,需要给学生创造讨论的空间,但是学生之间的差距又不能太大,如果学生之间的差距太大难以形成讨论的氛围。

## 2.2 小组竞赛干预实施

### 1) 被试

上海市市西初中预备(11)班的全体学生。在此之前我们学院大三年级的学生李嘉树在这个班级进行了集体文化建设的实验研究。围绕世博开展了各种班队主题活动,因此建立了小组的团队意识,同一个小组的学生出现了主动地相互帮助的状态。这为小组为单位的竞赛干预打下了基础。

### 2) 干预过程

竞赛之前将学生们分组并且介绍抢答的规则。整个过程学生都表现的非常积极。饶有兴趣,平时不愿意和同学交流学习的学生能够主动地与同学讨论和同学交流,愿意为自己的小组出谋划策,希望自己所在的小组能够取得好的成绩。

T: 我们班级里现在有多少同学呢?

S: 38 个

T: 不对,现在我们班级里有 7 个同学。

S: 哦?

T: 每一个小组就是一个同学,大家要齐心协力,一起努力。

S: 好(开心地笑)

学生对以小组为单位的比赛表现得很开心，小组成员摆桌子的过程中，大家都很合作，也很积极。而且整个过程面带笑容。

在老师给抢答做了规定之后学生还一起商量，小组里哪个学生举手，哪个学生计算等等细节。

在整个竞赛过程中学生的积极性都很高，整个班级都很活跃，开始的时候有几个学生对于竞赛的形式不以为然，但是开始竞赛之后不由自主地投入到学习中。尽管有几个学生在找竞赛题目的错误，但是这也是一种参与，是学生保护自尊的体现自己价值的方式。

T: 下面哪个是正整数 ( )

A 0.98    B 0.87    C  $9/8$     D 28

S: 我们组，我们组。

学生竟然开心地叫出声来，都来不及举手。但是前面已经有规定了，不举手就是违反了规定即使知道也不能计分，这又让学生觉得自己太冲动了，影响了整个小组，整个竞赛的过程中学生有丰富的情感体验，不仅体会到学习的乐趣，同时也体会到规则的重要性，以及自己对于团队的责任。

### 3) 干预效果

在进行集体干预之前，本校大三学生李嘉树在班级中举行了与世博相关的主题活动，通过活动调动了学生的集体意识，班级的合作意识有所增强，这为后面的集体干预奠定了良好的基础。

集体竞赛的这个过程中学生的情绪体验非常丰富，而且干预也取得了很好的效果。竞赛之后马上面临的的就是期末考试，整个班级的名次名列全年级第一，同时班级里平时数学成绩非常差的 12 个同学，在平时的测验都不能及格，在期



末考试中及格了。

但是通过干预也发现并不是所有的题目都适合进行竞赛,如应用题和程序性题目,问题:出租车起步价是 11 块,超过起步价距离,每增加 1 千米,加收 2.1 元(不足一千米按一千米计算)某人乘出租车从甲地到乙地付了 15.2,那么从甲地到乙地经过的的路程的最大值是多少?第一组抢到了回答的机会但是不会做,第五组抢到了回答的机会但是也是不会做,有一个组抢到了回答的机会但是站起来以后问了一个问题“起步价可以走多少千米?”

对于这样的题目,进行竞赛是不合适的,竞赛要速度,但是这样的题目要求有全面的考虑,对于题目中涉及的问题要有条理地分析,讲究速度会让学生不能全面考虑问题需要的条件。

## 2. 3 假期小组干预

### 1) 被试

2009 年暑期,我在山西家乡的邻居孩子中招募被试,这些被试属于不同年级,学习成绩属于中档和低档,交往能力也不相同。具体情况如下:

A: 亢志春 山西省原平市淳石中学预备班学生

学习成绩优秀,性格腼腆。

B: 亢鑫艳 山西省原平市下风洼小学四年级学生

学习成绩处于班级中等水平,性格开朗,合作能力较差。

C: 亢淼 山西省原平市下风洼小学四年级学生

学习成绩差,爱玩,性格内向,不善于与人交流,对于学习没有兴趣,来参加活动是在家长的极力劝说之下才来的。

D: 亢小琪 山西省原平市淳石中学预备班学生

学习成绩优秀,性格开朗,做事情虎头蛇尾,没有耐心

E: 樊紫燕 山西省原平市实验小学四年级学生

· 学习成绩优秀, 性格外向, 喜欢与同学讨论, 有合作意识。

F: 亢云岩 山西省原平市淳石中学四年级学生

学习成绩中等, 性格腼腆, 不善于与同学交流

## 2) 干预实施

这一阶段的干预历时 21 天, 每天 2 个小时, 被试 6 人。

形成小组, 干预开始时就给学生进行分组。分组方式是交叉分组, 每个小组预备班的同学 1 名, 四年级的同学 2 名, 这样可以建立“大手牵小手”的方式, 希望有助于形成良好的讨论氛围。还采取了小组合作出版报的活动, 促进小组凝聚力。

小组竞赛, 对于基本概念延续第一阶段采用的竞赛形式, 通过小组抢答的形式进行, 题目从易到难渐次变化。

小组合作对于程序性题目或者应用采用合作的方式。合作的方法包括: 互批作业和讨论。结果不一致的题目是讨论的主要内容。

干预过程被试反应和变化因人而异, 不同的反应表明被试的不同的发展状态以及心理特点。每当碰到不一样的结果时, 亢森的第一反应就是自己错了, 而同样是四年级的紫燕和鑫燕就会很自信地说自己的是对的。大部分时候亢森的是错的, 而鑫燕和紫燕的是对的, 干预进行到第 4 天的时候, 这样的问题再一次出现了。

题目: 对下列数据进行转化:  $0.2\text{cm} = \underline{\hspace{2cm}}\text{m}$

亢森: 0.002, 紫燕和鑫燕不约而同都是 0.02。

对于这样的题目就给学生时间讨论, 讨论对话如下:

T: 你们觉得谁的是对的?

C: 低着头不说话,

B、E: 我们的是对的,

T: 那么大家再来做做看, 将做题目的过程说出来。

学生重新做。

T: C, 为什么你认为她们的是对的, 为什么不相信自己, 其实这次你是对的, 其实你并不比其他同学差, 你也有自己的优点, 你虽然做的慢, 但是你的准确率很高。

C: 不好意思的低下头, 低着头的时候暗自微笑。

这次的活动结束之后 C 在活动中不再沉默, 有时候也会发表自己的看法。

干预进行到第 8 天, C 有了很出色的表现。

问题: 小明买了 1kg 糖果和 3kg 饼干花掉 36 元, 小丁买了 1kg 糖果和 1kg 饼干花了共花了 24 元, 那么 1kg 糖果多少钱? 1kg 饼干多少钱?

面对这样的题目几个四年级的小朋友都愣住了, 但是 C 同学在草稿纸上自己画了一个表格就很快地解决了这道题目:

糖果	饼干		
1kg	3kg	→	36 元
-	-	-	=12 元
1kg	1kg	→	24 元

通过这样的图示, C 同学很快地得出答案, C 同学在学习活动中找到了自信维护了自己的自尊。发现自己也有比别的同学强的时候。

第 8 天的活动结束之后, 晚饭时间家长找我聊天, C 同学回到家第一次主动问妈妈题目, 希望可以在复习活动中再一次斩露头角。

干预活动第 16 天, 参与干预的被试熟悉起来, 小组讨论的氛围也更为热烈, 在此基础上, 为了丰富参与干预被试的生活, 增进小组成员之间的感情, 笔者布置了一个版报活动的比赛。

T:今天我给大家布置一个任务,但是任务需要同学们合作完成,而且要初一一年级的哥哥姐姐带着四年级的小朋友一起来完成这个任务。

S:好啊

T:今天的任务是大家回去做一份板报出来,版报的内容包括数学家的介绍,趣味题还有测试题,四年级的小朋友出四年级的题目,但是题目是要自己想出来的不能够抄书上的和测试题上的,六年级的同学可以帮忙把把关,六年级的同学出六年级的题目。大家既要分工又要合作。我们来比一比哪一组做的更好。

S:那我们是各做各的还是一起做?

T:板报是一份当然是一起做了,小组成员自己商量,我们的评优的标准有以下几条:小组成员是不是全员参加了?板块分布是不是合理,看起来舒服?最主要的标准是是不是每个人都参与进来了。

活动的第二天早上,C早早地来到了活动地点,比其他学生早来了半个小时,平时他总是最后一个到活动地点的,而且来的时候非常高兴,兴奋不已的说着自己昨天做板报的过程,说话中还带着自豪的口气,面带微笑的说:“我出的题目,紫燕和鑫燕肯定有的是做不出来的”

### 3) 学生学习成绩的变化

前期在进入课堂时候发现,学生对于现在的课堂教学形式都不满意,I同学为了维护自己的自尊上课发言不积极,认为回答错误很尴尬。J同学认为老师“一言堂”,没有给学生参与的权利。组织竞赛之后,学生们都对这次竞赛津津乐道,喜欢竞赛的形式,不仅可以避免尴尬,而且所有同学都可以参与进来,一个同学回答问题其他同学做智囊团。这个班级在本学期数学成绩一直是整个年级比较差的,但是经过这次组织的竞赛,在紧接着的期末考试中取得年级第一的骄人成绩,

平时测验中 12 个不及格的同学在期末考试中都及格了。学生的积极性调动起了，体会到了数学学习的乐趣，在既有挑战又有合作的环境中掌握了数学知识。

暑假期间组织了六年级和四年级的学生出了一次版报之后，C 学生第二天早早地到了活动地点，向我介绍昨天他们出版报的情形，还说哪一部分是自己做的很开心。

T: 今天来这么早?

C: 恩, (微笑) 我们昨天早早就把版报做好了, 笑话和图画是我做的。

T: 我看看, 很好么, 做的很精致。

.....

C: 今天就一页纸么?

T: 对呀, 怎么了觉得少?

C: (笑, 沉默)

T: 昨天的题目你们下去讨论了么?

C: 讨论了, 我问我妈妈了。

.....

T: 现在我们出题的同学就是小老师了, 对方做错的题目你来讲给他。

C: 我先来教 B。

这是 C 同学第一次早早地来到活动现场, 并且在活动的过程中第一次抢着和别人回答。活动结束后还去找其他街道的同伴同学, 对自己现在的学习状态非常满意。根据家长的介绍这是 C 同学第一次回家主动向家长问问题, 也是第一次和同学谈论起关于学习的情况, 可见 C 并不是不喜欢学习, 只是在学习中没有体会到乐趣, 没有在学习体会到自尊感。

C 同学的数学学习一直以来都是班级里最差的, 但是暑假开学之后, 从发生

了明显的变化，不仅成绩不是班级里最差的了，而且上课时发言也变得积极了。

再如：活动将近结束的时候，B 同学和 E 同学与笔者的对话：

B：姐姐，明天我们不来了么？

K：是的，明天就结束了，我准备回去学校了。

E：真的么？可是我觉得我来的时间很短呢，那你什么时候去学校？明天上午么？

K：不是

E：上午不走的话，我们上午还可以来啊。

K：再过 3 天吧。

BE：啊，那我们还想来啊。

K：这几天我需要整理一下东西。

B：我可以帮你整理东西的。

K：有些事情需要我自己做，你们帮不了我。

E：那你寒假还回来么？

K：当然回来了，这里是我家啊。

B：那我们寒假的时候还来。

活动结束了，但是学生们好像意犹未尽，对这 20 天组织的活动竟然觉得时间很短，在整个活动的过程中，每个小朋友都全身心的投入，为自己小组竞赛领先而激动，为做板报意见不一而争执，不管是欢笑也好，争论也罢，都让他们为自己的学习注入了不一样的元素，让他们体会到学习原来可以这样，第二天，他们还是按时到达了活动地点，背着书包，但是进门之后却说我们想来看看能不能帮你做点什么。

这次的活动给他们的学习赋予了新的意义，也给我的生活注入了新的活

力,回首 20 天的辛苦,我觉得由衷的幸福和充实。

#### 4) 干预小结

这一阶段的干预进一步尝试和验证了小组活动的干预效果。小组干预能够调动学生的积极性,给部分平时不善于提问、讨论的学生创造了条件,同时也能够维护一部分学生的自尊,这部分学生学习成绩不是很好,对学习没有自信,课堂上害怕回答错问题丢面子。但是也会给极个别的学生创造偷懒的机会。

对内容归类进行干预的思路针对解题,容易停留在错误的表面就事论事。由于直接干预接近学生,看到了数学学习的错误存在着心理层面的障碍,需要从学习的心理活动角度进行分类。

### 3 第三阶段:从心理活动角度对数学错误进行分类

普遍性的错误是在学生的试卷、作业等纸质文件中发现并归类的。在干预过程,看到了更具动态性的错误反应,引起了聚焦心理活动的进一步分类。

#### 1) 知识维度增加时适应困难

绝对值运算时是单维度的运算,当进入正负数知识体系时变成了双维度的运算。很多学生不适应这样的变化。如某个数的绝对值是  $\frac{2}{3}$ ,那么这个数是多少?这样的问题在进入小学高年级,初中低年级出现的频率比较高,这是因为在这一阶段引入了负数的概念。引入负数的概念之后学生不仅要考虑数的大小,还要考虑数的方向。

如：公交车上原来有若干人，（上车的人数为正，下车的人数为负，）

-5,3,5,8, -10,6,4, -7, -3,2

经过十站后，车上的人数比原来多或者少多少人？

学生错误：用上车的人数减去下车的人数

$$(3+5+8+6+4) - (-5-10-7-5) = 26 - (-25) = 51$$

引入负数之后，数本身不仅能够代表大小而且也标明了方向，但是学生仍然旧的单向思维解决问题。

再如：甲乙两个同学进行手工制作，原有手工作业纸 27 张，两人用去的手工纸总数是剩下的手工纸张数的一半，如果甲用了 5 张，那么乙用了多少张？

学生思路：用去的加上剩下的总数是 27，用去的是剩下的半，将总数分成 3 份，一份是 9，甲用了 5 张，乙用了 4 张。

学生从总数出发，这需要对原有手工纸有较好的数感，但是如果原有纸张太多的话，这样的思维就不合适。但是如果引入方程的话，找出两个有等量关系的数据列方程求解，使得问题变得更加简单，即使原来作业纸的数量再多只要由方程就可以解出来。

## 2) 不明白蕴含的运算要求

小学低年级的计算规则就是大变小要减，小变大要加。而且，计算时都有外显的符号提示，如  $8+9$ ，小明比小强多 6 个苹果之类的明显的提示语或者计算符号，但是到了小学中高年级、初中低年级，出现了更复杂的运算，如单位换算就涉及倍数关系，是乘法运算，而且运算规则是隐形的，需要学生从中发现。幂运算也是隐性的计算，需要学生从中找到计算方法。

如：1500 米=\_\_\_\_\_千米

学生的错误答案：15，没有找到正确的隐性计算规则，米与千米的倍数关系式 1000 倍。而学生认为是 100 倍。

再如： $2^3+2^4=$ \_\_\_\_\_

学生的错误答案： $2^7$ ，学生看到加号就认为是加运算，没有意识到这里包括的不仅仅是加运算，再进行加运算之前首先要进行乘运算。

又如： $a^n \cdot a^m=$ \_\_\_\_\_



学生的错误答案： $a^m$ ，学生看到 $\cdot$ 就看做乘运算，但是在幂运算中同底数幂相乘，底数不变指数相加。

### 3) 数字运算到符号运算困难

数学学习开始时就是数学计算，甚至用掰手指的方法进行计算，计算是可见的，到后来计算的数字逐渐变大，学生难以用具体的实物指代，但是数字的大小是可比的，但是到了小学到初中的转折期，出现了字母，计算就变得复杂了，学生难以用抽象的字母代替数字进行思维，往往将字母变换成具体的数字进行计算。

如：如果  $a < 0$ ，则  $a + |a| =$  \_\_\_\_\_

困难学生的思路： $a = -2$ ， $a + |a| = -2 + 2 = 0$ ，而不能将  $a$  看成是负数，利用负数的绝对值的概念进行思维。

计算  $a^n \cdot a^m =$  \_\_\_\_\_

困难学生的思路： $n=2, m=4$ ， $a^2 \cdot a^4 = a^6 = a^m$ 。他们需要先代入具体的数字计算然后再推出抽象符号的指代该如何计算，不能直接用掌握的规则进行思维。

再如： $(-2a-b)^2$

$= -4a^2 - 4ab + b^2$ 。学困生不能将  $-2a$ ， $-b$  分别看做一个整体来计算，而是将其拆分，最终导致了计算的错误。

进入代数式的计算之后就变得更加复杂，学困生难以将代数式看做一个抽象的整体。

如：判断下列代数式是否相等

$$\frac{(2n+3)(x+y)}{9} = (x+y)\frac{2n+3}{9} \quad (\times)$$

学困生不能将  $\frac{(2n+3)(x+y)}{9}$  看做一个整体，稍微变换位置也认为是不一样的代数式。

#### 4) 解题程序意识欠缺

程序性的问题是涉及到一些有固定程序的计算问题, 比如因式分解这类的题目, 首先要明白因式分解的规则, 然后观察式子, 能提取公因式的提取公因式, 能用公式的用公式, 如果不能要想办法找到公因子或者变换成一直公式的形式。这里最难的是要学生将式子变换成已经学过的公式。

如: 因式分解下列代数式

$$\begin{aligned} & (2a+b)^2 - (a+c)^2 \\ & = 4a^2 + 4ab + b^2 - (a^2 + 2ac + c^2) \\ & = 4a^2 + 4ab + b^2 - a^2 - 2ac - c^2 \\ & = 3a^2 + 4ab + 2ac + c^2 \end{aligned}$$

学生首先没有明白因式分解的规则, 因式分解的规则是要将代数式变成相乘的形式。而此题学生将代数式变成了相加的形式。

再如: 因式分解

$$\begin{aligned} & 4x^4 - 64^4 \\ & = (2x^2 - 8y^2)(2x^2 + 8y^2) \end{aligned}$$

学生没有将相乘的式子变成最简单的形式, 两个式子还有公因式。

又如: 计算下列代数式

$$\begin{aligned} & (b+2a-c)(b-2a+c) \\ & = [(b+2a)-c][(b-2a)+c] \\ & = (b+2a)^2 - c^2 \end{aligned}$$

数学困难学生对于将代数式变换成符合公式计算的式子时, 只能按照原有的顺序或者符号组合, 而不会变换位置。导致建立的公式不能够用公式计算。

### 4 第四阶段: 心理支架式干预

经过前面三个阶段的总结与实践, 发现了对于数学学习的错误往往是进入新的知识时学习不适应, 仍然以原先建立的数学思维习惯学习, 因此产生了错误。按照学生学习心理变化的特点进行分类, 针对这样的分类给出干预策略, 主要着眼于提供学习的心理支架, 帮助学生建立数学概念, 内化为心理工具, 从而适应

新的数学学习。

### 被试

**F: 陶佳** 上海市市西初级中学初一学生

学习成绩一般,性格外向,喜欢抱怨,难以与同学合作。

**G: 任林涛** 上海市市西初级中学初一学生

学习成绩差,被医院认定有多动症,注意力难以维持,生活自理能力强。

**H: 郑铭:** 上海市市西初级中学初一学生

学习成绩差,性格内向,感情淡漠,合作意识不强。

**I: 陶信禹** 上海市市西初级中学初一年级学生

学习成绩一般,人缘好,参与干预的同学都喜欢和他分到一个小组。

**J: 张煜峰** 上海市市西初级中学初一年级学生

学习成绩中等偏上,性格开朗,个性鲜明,单亲家庭,生活自理能力比较差,因为个人卫生问题同学们不愿意与他交往。

这一阶段的干预主要针对学习有困难的学生,采用班主任推荐的形式,有5位同学参与干预,干预历时3个月,从2010年10月开始,每周二、周五进行,两次干预活动,每次活动2个小时。活动的形式主要是学生做干预题目,讨论,做测试题目。学生按照性别分成两组,10月参与活动的同学是四个,J同学在期中考试之后进入活动。

4位同学进入干预活动之初,学生对于分组学习不感兴趣,不习惯与同学讨论,看到题目马上动手开始做,没有停顿,难以觉察自己的错误。

干预两周之后,发现了能够集中G同学注意力分方法,即让G读题目,读题目的过程帮助G集中注意力,有意识地复习前面学过的知识。期中考试,F同学的成绩从上次月考的68分考到了88分,访谈中,F同学谈到,在考试过程中自己在心里提醒自己哪些内容是自己容易错的,F同学能够自我提醒的题目错误率比她之前的试卷上类似题目的错误率低。H同学能够觉察到自己的错误。在干预过程中也发现了G同学的注意力集中要依情况而定,不能一概而论。H同学情绪表现一直都非常消极不能全身心地投入到学习中。

## 4. 1 支架式干预策略类型

### 1) “基石”干预

#### (1) “基石”干预的特点

“基石”干预是对最基本的知识模块的干预。“基石”干预的特点是从简单的知识入手,但目的并不是让学生仅仅学会简单的知识,而是借这些基本模块的知识帮学生搭建一座“桥梁”,将旧体系和新体系连接起来。是训练学生进入新体系的思维。

#### (2) “基石”干预的适应性

“基石”干预主要针对旧体系进入新体系时基本概念的缺乏,主要针对数学学习知识最基本的单位,在思维上帮助学生建立支架,如学生能够掌握负数的绝对值是他的相反数,这样不管出现的是符号,还是具体的数字,只要表明是负数他的绝对值,就是在原数的前面加负号表示其相反数,帮助学生进入新体系。

进入初中的数学学习,不仅在计算上难度增加,更重要的是学生进入了新的体系,包括负数、方程、代数式、指数。引入这些体系是为了简化数学学习,但如果学生思维定势还处在原来的体系中,数学学习不仅没有变的简单,反而变的更复杂了。例如:引入负数概念,做计算的时候就不需要考虑加减,这样的计算全部变成加了。负数本身就带有方向性,运算时将方向放进去,不仅有大小之别而且还有方向之别。学生没有考虑到这一点,就会犯  $26 - (-25) = 51$  的错误,用上车的人数减去下车的人数。

#### (3) “基石”干预题例

1) 请同学们为下列叙述给出数学表达:

商店昨天盈利 10 元, 今天亏本 8 元。

小明走上三层楼梯, 有走下四层楼梯。

2) 下面代数式可以归为 1)  $a+b$ , 2)  $ab$ , 3)  $\frac{a}{b}$  三种形式。判断每个一代数的类型, 在其右侧的括号里用数字说明。

$$2a+3b \quad ( )$$

$$4 \frac{2x+y}{3x+2y} \quad ( )$$

$$\frac{3a+b}{4+3b} - a \quad ( )$$

3) 填空

$$2^2 = ( ) \text{ 个 } 2 \text{ 相乘}$$

$$2^2 2^3 = ( ) \text{ 个 } 2 \text{ 相乘} = 2^{( )}$$

$$a^2 = ( ) \text{ 个 } a \text{ 相乘} = a^{( )}$$

$$a^3 a^4 = ( ) \text{ 个 } a \text{ 相乘} = a^{( )}$$

$$a^m = ( ) \text{ 个 } a \text{ 相乘}$$

$$a^m a^n = ( ) \text{ 个 } a \text{ 相乘} = a^{( )}$$

## 2) 复合式干预

### (1) 复合式干预的特点

复合式干预是在学生掌握抽象符号的基础上, 将几个基本运算融合起来, 复合式干预的特点是综合性, 为学生顺利进入新的体系做铺垫。

### (2) 复合式干预的适应性

复合式干预主要是针对各个新体系的基本概念的整合，进入初中的学习学生进入了新的体系，掌握各个新体系的基本概念不足以帮助学生顺利地进入到新体系的学习中。需要给学生一个辅助性的连接帮助学生将一些基本概念整合起来，例：计算代数式  $(a+2b-c)(a-2b+c)$  学生会犯的错误经常是  $[(a+2b)-c][(a-2b)+c]$ ，有了“基石”的训练学生有了抽象符号的指代这一概念，能够将两项结合在一起从而利用公式，但是不能够将负号考虑在其中对代数式进行正确的结合。

数学学习的一般的过程可以分为三步，第一步：基本概念的学习，第二步：掌握基本概念的外延，熟练基本概念的复合表达或基本概念的变式，第三部：基本概念与符号表达结合应用到具体的情境中。复合式干预主要是针对第二步，帮助学生掌握基本概念的复合表达。

### (3) 复合式干预的题例

1) 判断下列式子正确与否

$$\frac{(2n+3)(x+y)}{9} = (x+y) \frac{2n+3}{9} \quad ( )$$

2) 将下面的代数式利用结合律分成两部分，可以有多种分法

$$a+2b-c$$

3) 将下列式子组合成完全平方公式或者平方差公式（不需要计算）

$$(x-y+z)(x-y+z)$$

4) 下列各式的变形中是否是因式分解，为什么？

$$x^2-y^2+1=(x+y)(x-y)+1 \quad ( )$$

### 3) 程序性干预

#### (1) 程序性干预特点

程序性干预特点综合各部分内容知识,理出题目的一般步骤。

## (2) 程序性干预适应性

程序性干预主要针对程序性运算题目,对于不同教学情境下的题目给出不同的步骤,帮助学生在做题目时理清思路。

## (3) 程序性干预类型

A 对于代数式计算总结出的步骤:

- 1) 是否可以用公式;
- 2) 是否通过变形以后可以用公式;
- 3) 使用结合律的过程中反思是否变形正确;

B 对于因式分解总结出的一般的步骤:

- 1) 首先回忆因式分解的概念,规则;
- 2) 分析式子是否可以提取公因式;
- 3) 是否可以利用已经学过的公式;
- 4) 如果代数式不可以用公式,是否可以变形再用公式;
- 5) 检查最后一步的代数式是否是最小单位,是不是还能够分解;

C 对于分式方程解题的一般步骤:

- 1) 观察式子;
- 2) 给分式同分;
- 3) 检查是否有增根;

## 4. 2 支架式干预效果

经过这一阶段的干预,学生熟悉了新体系中的基本概念,对于正负数的运算、抽象符号的指代以及指数的运算等概念有了初步的了解。能够用自己的语言表达,明白了其中的道理,在后面的学习中学生能够主动回忆这些基本概念。在计算的过程中他们可以顺其自然地解决基本问题。如经过干预之后学生碰到这样的

题目： $(a+b)^2 (a+b)^n = (a+b)^{2+n}$  会发声思维：“前面有两个  $a+b$ ，后面有  $n$  个，加起来是  $2+n$  个。”

学生再次做代数式乘法的错误率从原来的 90% 下降到 20%。即使有的同学有些题目没有做对但是产生了出声思维调节做题的过程，提醒自己将复杂的代数式分解成相同的两部分以便应用公式，在做因式分解的题目时提醒自己，将代数式分解成为最小单位。除此之外学生能够通过呈现的代数式的变形了解代数式的变式，掌握代数式书写的规则。

能够积极地进行自我调节，在动态的学习过程中能够及时地提醒自己特定题目的特定程序。学生们的自我监控能力有所提高，做题目的时候能够有意识地注意题目的要求，回忆与题目有关的知识点，做程序性的题目时，能够主动出声思维讲出题目的步骤，与干预前做题目直接就做有所不同。在做题目的时候能够将代数式看做是一个整体，能够变换代数式中不同符号的位置，将其组合成能够应用公式的形式。做题目的正确率也有所提高。

期末测试中四位同学在班级中的成绩有不同程度的提高。F 的同学的成绩从原来的不及格到其中考试的 78 分，班级中的名次由原来的 30 名左右上升到 20 名。I 同学的成绩从 15 名上升到第八名。H、G 同学没有明显的提高，但是在干预的过程中 G 同学的自我监控能力有所改变，G 同学有多动症，有意识的出声思维能够帮助他集中注意力，注意力集中的情况下，他的干预测试题目成绩甚至优于其他的同学，但是 G 同学的注意力集中持续时间比较短，难以维持，对于 G 同学题目分部分进行更好，而 H 同学在整个干预中都不是非常积极，做题目很被动，没有办法监控自己的学习过程，同样的错误会反复犯。能够觉察到自己的错误，但是不能有效地改正错误。

## 5 干预过程中学生的自我调节发生了变化

干预主要是针对中小学转折阶段学生数学学习中的困难进行的，希望通过干预帮助学生建立有效学习概念的方法，培养学生的自我调节能力。

心理学工作者提出了自我调节可能出现的情境。分裂理论认为当行为路径受阻或者面对两个决定时会出现自我反省。Peirce 认为问题情境引发了反省思考。Cooley 的镜子理论认为他人的反馈引发了自我反省。冲突理论认为自我调节的



产生是通过比自己优秀的人身上获得认可而引发的,互动引起了自我调节与自我控制,内化理论认为思考是一种自我反省,即使与不在场的他人的内部对话也可以引发自我调节。

本论文的干预分为两个阶段进行,第一阶段针对小学四年级和预备班六年级,主要目标是收集学生数学学习中的普遍性的错误,探索性地发现干预的角度,在这一阶段进行的短暂性的干预,发现了学生在从旧体系进入新体系时的知识的缺失,通过伙伴互动,讨论,竞赛等形式的组织帮助学生建立从旧有体系与新体系的联系。第二阶段针对初中一年级的长期的个案研究,在前面干预的过程中发现的学生的错误进行重新分类,分类的角度从教学内容转到按照学生的学习过程的心理特点进行分类。在干预过程中发现学生的动态性的错误,给出针对性的干预策略。

干预的过程是一个动态性的系统性的过程而不是点状的过程。在干预中获得心理工具非常重要,更重要的是其概括性的本质。过程中的各个环节是紧密相连的,下一个环节是上一个环节的承接。干预中给出的任何形式的教学内容目的是为培养学生的思维而不是单纯地教会学生知识。数学学习体系的转折阶段,学生学习中不仅存在知识体系缺失的学习困难,比如对概念的外延掌握不到位,难以有效地调动已有的知识,难以利用公式的变形进行计算,类似情境难以迁移。而且还有心理工具缺失导致的学习困难,没有适当的支架联结旧有的体系和新的体系,没有适当的符号作为支架帮助自己思维,缺乏自信,人云亦云,教师一般的发问也能引起学生对自己解题正确性的怀疑,做题目过程难以有持续的自我调控,难以集中注意力全身心投入。面对学生困难的丰富性和变化性,干预也应该是过程性的动态的。干预过程也是不断调整,不断变化的。

有效的干预是将学生的心理脉络与知识体系脉络相吻合,让学生建立起自己有效思维的工具,进而可以自发性的进行学习而不只是模仿性的学习。而具体的教学实践则是个人的内在的知识与所学的系统知识之间的一个中介,如果想要很

好地发挥中介的作用那么教学实践就必须包括符号化的心理工具。有效的支架可以来源于不同的方面,不仅是教师的教学还可以是伙伴的支架作用。干预题目的呈现要有阶梯性的变化并且呈现题目之间要有一定的承接。

干预中发现语言对于学生的学习非常重要,开始时的出声思维到内部语言是一个内化的过程,整个学习的过程也是内化的过程,学生内化,将知识通过别人(教师、同伴)的作用理解成为自己的东西,学生外化内在,将已经掌握的知识用自己的语言表达出来,这样的过程才算是学生完全接受了所学的知识,而初中学生最缺的是外化内在这一过程,学生难以将掌握的知识用概括化的语言表达出来。教学实践可以充当这一外化的中间性支架,想要起到很好的支架作用,实践就需要包括符号性的心理工具。思维需要在实践活动发展进行的过程中逐渐内化。干预学习最终的目的是要使儿童在直接处于环境刺激的时候能够对学习十分敏感,为其今后直接的学习提供认知的基础,干预的目标是对知识的认知和元认知。帮助学生在学科学习中帮组学生有效地监督和控制自己的问题解决过程,监控问题解决的有效性和正确性。

干预给采取了小组合作,同伴讨论,互出题目,互相检查,竞赛等形式,学生们在多样化的学习环境中,在与同伴和老师互动的过程中体会到了学习的乐趣,通过过程性干预的题目帮助学生建立自我调节机制,帮助学生选择适当的策略。

### 1) 问题情境引发了学生的自我调节

在干预过程中发现了这样一种现象,学生错误率比较低的地方都会都会主动采取一些办法,比如画图,用符号标识,这些形式能够发挥支架功能,帮助学生自我监控从而进行抽象思维;

例一、小明买了 1kg 糖果和 3kg 饼干花掉 36 元,小丁买了 1kg 糖果和 1kg 饼干花了共花了 24 元,那么 1kg 糖果多少钱? 1kg 饼干多少钱?

C 同学学习成绩比较差,他不善言辞,对于自己的学习也没有多大的兴趣,但是

他对于作图,做表格一类的题目很喜欢,小组活动中他总是担任布置版面的任务,给出这道题目时,几个四年级的小朋友都卡住了,但是 C 同学在草稿纸上自己花了一个表格就很快地解决了这道题目:

糖果	饼干	
1kg	3kg → 36 元	
-	-	=12 元
1kg	1kg → 24 元	

通过这样的图示, C 同学很快地得出答案, C 同学在学习活动中找到了自信维护了自己的自尊。家长反映 C 同学回到家第一次主动问妈妈题目, 希望可以在复习活动中再一次斩露头角。

再如: 判断下列代数式变化是否是因式分解

$$x^2 - y^2 + 1 = (x+y)(x-y) \oplus 1 \quad (\times)$$

$$(x-2)(x+1) = x^2 - x - 2 \quad (\times)$$

做对的同学在一些符号上做了标记。而做错的同学则没有这样的标记。但是做对的同学可以用自己看懂的符号标识, 但是却不能够用概括化的语言进行描述。

## 2) 自我反省引发了自我调节

遇到问题, 能够有意识地控制自己的思维, 从读题目开始, 主动放慢速度, 首先审清题意, 主动复习题目中涉及到的知识和基本概念, 在做题目的过程中能够出声思维。

如: 分解因式  $15a^2b + 3ab$ , 做对的学生会默念提取公因式, 两个代数式共有的部分是  $3ab$ , 做错的同学急于做题目很快地写出答案  $3a(5ab-b)$

又如：分解因式  $x(a-b)^2 - y(b-a)^3$ ，做对的学生会默念首先要变号，而做错的同学会不假思索地马上落笔，写出答案： $(x+y)(a-b)^2$

再如：计算下列代数式  $(2z+3y-x)(2z-3z+x)$  做对的同学会停下笔首先看题目，在想我可以什么公式进行计算更简便。

在干预中发现这样一种现象，学生学习急于求成，一心想着完成题目，碰到练习题凭第一感觉不假思索马上就动笔，有时候甚至都没有读清题意，而且计算的过程几乎不用草稿纸。针对学生这样的现象，让学生在做题之前先留出一定的时间去读题目，以帮助学生了解题目的含义，采取的方式有学生出生读题目，同学之间互相读题目，一个同学读其他同学听。这样的干预对 G 同学的学习有明显的作用。

G 同学被医院认定为多动症，一直有药物干预治疗，班主任老师反映该生很尊重老师，和同学关系相处的也不错，与 G 同学的访谈中了解到 G 同学生活自理能力很强，甚至还可以照顾父母的生活，帮父母做饭，但是对于自己的学习却一直无能为力，他的注意力难以集中 15 分钟，为此事老师非常头痛。

经过两次干预练习之后，G 同学在做复合式干预题目的时候，错误率明显比其他同学要低。

比如：判断下列变式是否是因式分解：

$$x^2 - y^2 + 1 = (x+y)(x-y) + 1 \quad ()$$

$$(x-y)(y-x)a^2 = (x-y)(1-a^2) \quad ()$$

$$(x-2)(x+1) = x^2 - x - 2 \quad ()$$

$$x^2y + 6xy + 9y = xy(x + 6 + \frac{9}{x}) \quad ()$$

$$6x^2y^3 = 3xy \cdot 2xy^2 \quad ()$$

这个题目参与干预的同学平均错误率是 26%，G 同学的错误率是 0%。只有 G 同学在做题目过程中，默念题目，并且不时地回忆因式分解的规则，出声思维

对于多动症儿童有很大的帮助。语言对于多动症儿童很重要,可以帮助儿童集中注意力,组织思路,回忆相关知识点,调节学生学习过程。G 同学在干预过程中发现了对自己行之有效的学习方式,在学习过程中总会不停地提醒自己,下面要做什么,这样的自我控制对 G 的学习产生了很大的帮助,如:将下列代数式结合成为两部分

$$m-2n+1$$

$$(m-2n)+1 \quad (m+1)-2n \quad (1-2n)+m \quad (\text{其他同学答案})$$

$$(m-2n)+1 \quad -2n+(m+1) \quad 1+(m-2n) \quad m-(2n-1) \quad (\text{G 同学答案})$$

这样的题目共有 10 道,四位同学变换格式写出的题目共有 116 道

总数	仅交换位置	变换符号
33	30	3
28	27	1
24	15	9
31	26	5

仅仅会变换位置进行重组还处在一个比较低的层次,还处在小学阶段的简单的结合律,而能够通过变换符号而达到对于代数式的重组则达到一个比较高的层次。这个题目的目的是为了让学生对代数式进行计算的时候可以进行灵活的重组,从而能够运用公式对代数式进行计算。对单一的代数式进行重组之后再行多个代数式的重组。

给出这样的题目一方面是为了让学生快速思维将代数式组合成为可以用公式计算的式子,另一方面是为了让学生知道做题的过程中有时候结果并不是最重要的,过程中的思维有时候更重要。

这个题目 G 做的很好,能够进行更高层次的变化,因为他做的过程中会出

声或者默念,这也明学生在学习过程中如果有意识地控制自己的学习过程会有更好的结果。对于多动症的儿童让其在学习过程中有意识的阅读可以将他的注意力集中于自己当下的任务。

干预过程中希望学生能够找到一些属于自己的符号,帮助自己快速思维,在题目和结果直接搭支架,降低错误率。这样的语言指示给学生很大的帮助,学生都已意识地使用适合自己的符号进行思维。

如:将下列式子合并同类项

1、 $ab+a-2ab-3a-b$

2、 $3a^2+5a-4a^2-6a+2a^2-3$

3、 $10x^2y-7xy^2+4xy-9yx^2-2xy$

复合式干预之后进入再做因式分解题目的时候,两个同学都学会了用自己的方式找到同类项,这一题目的错误率是 0%。能够用自己看懂的符号作为支架帮助自己思考,各种符号和划线是支架性思维的外化。

### 3) 互动引发了自我调节

在问题情境下同伴的提醒引发了学生的自我反思,有的就此而主动地投入到与同伴交流的情境中,帮助自己正确的解决问题。

如:已知  $(x-m)^2=x^2+nx+\frac{1}{16}$  则  $m=$ \_\_\_\_\_, $n=$ \_\_\_\_\_

J: 陶\*\*, 这道题怎么这么多未知数,你有什么想法?

I: 我想应该还是用完全平方公式吧,我们一起来看看。

J: m 的值是  $\frac{1}{4}$

I: m 的值还可以是  $-\frac{1}{4}$

J: 对哦。

I: 那么 n 就可以是  $+\frac{1}{2}$  或者是  $-\frac{1}{2}$

再如:

I: 这个不是这样的,

G: 哎呀, 我错了, 都丢了一个东西。

T: 丢了什么? 你怎么发现你丢了东西?

R: 我只写了  $a$  和  $b$  的平方, 二倍  $ab$  我没有写出来, 刚才 I 同学提醒我了, 我才发现。

### (3) 干预过程中学生合作能力的变化

不论是在暑假期间组织的活动还是在暑假开学之后进行的干预, 学生活动都是很难组织起来的, 学生之间不愿意分组的现象都非常明显。虽然在班级中是有分组的, 但是分组对于学生而言没有实质的意义。学生并不在意分组的情况, 有的同学甚至排斥分组。

但是在组织几次小组活动之后, 学生们不再排斥分组了, 因为他们在小组活动中看到了伙伴对自己的帮组, 也懂得自己对小组的价值。

T: 班级里有没有活动小组?

F: 有的

T: 按照什么来分的?

E: 就是按照座位随便分的。

T: 那你们小组有没有组织过什么活动?

E: 没有, 我不喜欢和我们小组的同学讨论问题。

T: 我看到你好几个题目都有涂改的痕迹。

G: 是的, 因为我和 I 同学一组, I 同学做的比我快, 他做完看我的题目你

再想想公式？让我回忆一下完全平方公式的运算法则。我就发现自己错了。

J: I 你看这道题目，怎么两个未知数？

开始干预时，给出题目学生都是自顾自做，做的速度非常快，在干预的后期学生主动地与同伴进行交流，说出自己的想法，与同伴互相检查作业。愿意分组，喜欢和同伴一起完成任务。

F、G 两个同学在学习中总是不愿意与 J 同学合作，不愿意和 J 同学一组讨论，甚至都不愿意与 J 坐在一起，他们认为 J 不讲卫生，但是经过第四阶段的干预之后，学生对于 J 没有那么反感了，他们的卷子和 J 的卷子放在一起也没有那么反感，也愿意和 J 同学进行讨论，

## 第三部分 讨论与总结

### 1 选题

之所以选择中学生数学学习困难作为论文的出发点，主要是基于以下几方面的问题：

第一：数学问题解决逐渐成为国际数学教育界的一大趋势，许多国家的学者都非常关注这一领域，从教育学和神经学角度对这一问题进行了大量的研究，但是研究的对象多数是小学生数学学习的问题，因此研究中学生数学学习问题的研究就变得非常有意义。

第二：在数学学习困难领域，目前最新的研究主要和工作记忆有关系，对数学学科的研究没有系统性，没有发现哪一个阶段是学生特别容易发生错误的阶段，主要针对数学学科个别内容进行，研究小学生数学学习困难的内在机制，没



有从数学学习内容着手进行研究。因此有必要从数学学习内容的分类与整合着手；帮助学生建立数学学习的清晰框架。

第三：研究方法上大多数采用横向研究，对于发展性规律的探索则较为缺乏。大多数的研究将数学学习困难学生和没有数学学习困难的学生进行比较，而没有专门针对困难儿童学习机制的探讨，因此探索不同年龄阶段儿童数学学习困难机制就变得尤为重要。

基于以上几点的考虑，因此本论文以中学生数学学习困难的学生作为研究对象，在元认知理论的指导下，对数学学习转折阶段学生数学学习的规律进行研究以期将数学学科特点和学生心理特点结合研究数学学习困难，并帮助学生建立联结认知与知识的桥梁。

## 2 讨论

本论文借鉴国内外心理学家对于数学学习困难学生元认知的研究，以及干预策略，从学生的错误入手进行研究，但是研究不仅仅关注干预的结果，同时关注研究过程中学生的变化。不仅仅研究困难学生对象本身，而且研究数学学习内容的内在特点对于数学学习者的影响。

### (1) 元认知能够有效地改善学生数学学习成绩

本研究从数学学习的错误入手，帮助学生找到错误的原因并且给出相对应的干预策略，经过干预发现了初中数学学习不仅仅是学生对于概念的缺失，更重要的是学生在数学体系转折中难以建立有效的联结，将旧体系和新体系结合起来顺利过渡。同时在这个过程中元认知起着非常重要的作用。元认知就像一个司令，指挥着整个学习过程，一个好的司令就能指挥一场好的战役。

干预中发现，在伙伴讨论的情境中学生的自我调节能够充分的调动起来。但

是并不是有伙伴讨论就能够产生自我调节, 伙伴组织需要不同层次、不同水平的学生。要能够形成讨论的氛围, 差生组合难以形成讨论, 自我调节无法调动。

## (2) 支架作用的符号对于数学学习的影响

### 1) 小学四年级图画的符号作用能够帮助学生思维

前人研究认为小学中高年级是抽象思维发展的转折时期, 但是本研究发现, 在这个阶段, 图画的支架作用非常重要。有效的图画是学生顺利过渡的重要支架。

### 2) 自己命名正负号可以帮助预备班学生理解负号的方向性

数学学习最关键的教学就是让学生能够验证自己概念和推理的正确性而不是培养学生死记硬背的能力。因而不仅要让学生发现而且要让学生在实际的操作中验证自己的想法。不仅如此, 要让学生将知识内化, 除了自己在过程中验证, 更好的方法是经过内化之后再外化, 将自己理解的内容讲给同伴听。达到这一步才是真正的内化。

### 3) 抽象符号的命名, 以及抽象符号的不同组合帮助初一年级学生建立符号概念

想要使学生真正地掌握抽象符号不仅要让学生明白抽象符号的作用概念, 而且要让学生在命名, 重组的过程中把握抽象符号的抽象本质, 学会用抽象符号进行思维, 这才是最终的目的。

对于数学这样的结构化的课程, 伙伴互动和集体竞赛的形式是帮助学生内化知识的非常有效地途径。但是伙伴互动需要教师合理组织小组, 同时密切注意小组活动中学生出现自我调节的表现。

## (3) 干预的局限

在不同的研究阶段针对不同的问题采用了不同的干预策略,干预策略随着对于数学错误的不断地归类而不断改变的。在学生进入预备班之后,基本概念比较缺乏,回答不出问题会觉得丢面子,为此采用小组竞赛的方式进行。取得了不错的成绩,然而通过小组竞赛干预也发现了一些问题,一,对于数学知识而言,程序性的题目,比如应用题不适宜用小组竞赛的方式,应用题需要学生考虑已知条件、未知条件以及已知与未知之间的关系,不适宜用快速反应的方式进行。二,对于学生而言,小组竞赛给一些同学创造了条件逃避学习。三,进行集体竞赛需要班级有集体意识,有小组活动的成功经验。

假期中的小组干预发现了小组学习能够帮助学习成绩不好的学生建立自信,维护自尊,调动学习的积极性。帮助学生建立心理与知识的联结,找到了适合小学四年级的表征方式。但是这样的干预需要很长的摸索期,而且小组活动需要教育者投入大量的精力。

市西中学小组干预针对数学学习内容的心理特点进行干预,帮助学生建立元认知,发现了多动症儿童集中注意力的方法,发现了调动学生自我调节能力的方法,培养了合作能力。但是多动症儿童的学习成绩没有明显的提高。虽然通过阅读能够集中多动症儿童的注意力,但是对于比较复杂的题目,比如一个题目涉及到两个及以上数学知识点,需要学生将不同知识点进行融合,并且对题目做变形时,简单的出声思维不起作用。

### 3 结论

- 1) 元认知知识对学生的学习有重要作用;
- 2) 图表、符号能够帮助学生建立心理脉络与数学学科知识的联结;
- 3) 有差别的小组组合最能够激发学生的自我调节能力;
- 4) 出声思维能够集中多动症儿童的注意力;
- 5) 结合学生学习特点从心理角度对数学学科知识进行分类;

### 4 研究不足与展望

- (1) 关于实验材料

实验所采用的材料是作者在导师的指导下根据学生的学习错误而编制而成的,对于学习错误的分类是通过学生作业和试卷而来的,研究进行一个学期,没有对初一年级整个学年的数学错误分析,在今后的研究中,需要更系统、更详尽的归类。才能有更加富有针对性的干预题目。

## (2) 研究方法的探讨

本研究采用分析错误题,对错误题目归类,根据不同的类型给出干预策略,观察学生学习状态,录音,分析学生学习过程。

对于学生的干预过程的分析是质性分析,质性分析会受到研究者所处的历史文化背景的影响,客观方面可能会受到质疑。但是质性分析可以动态地分析系统各要素之间的关系。在后续的研究中可以将质性分析和量化分析结合起来。

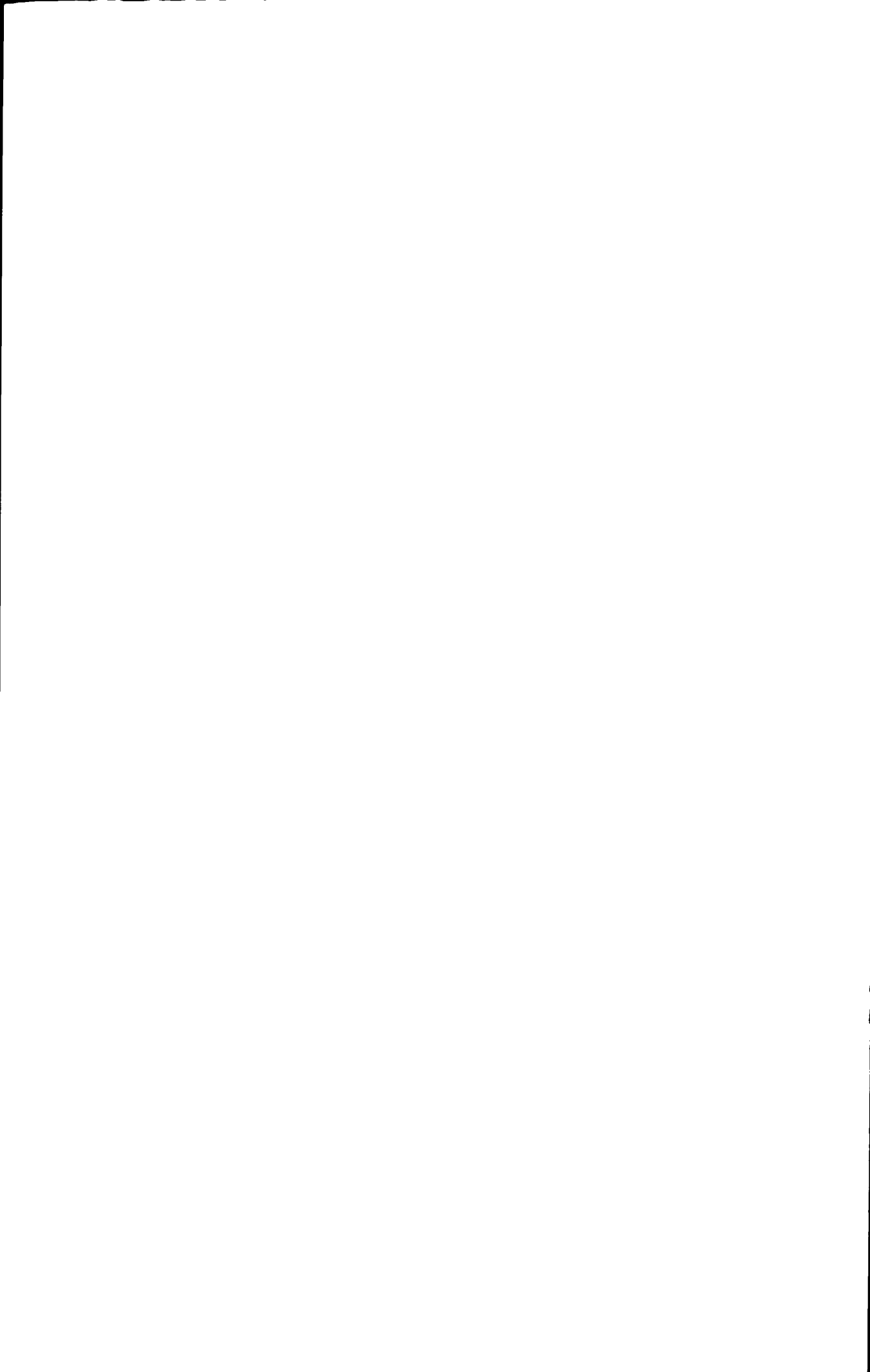
## (3) 展望

本研究从教学实践出发,探讨数学学习的转折点,体系之间的转变时需要特别注意的地方,通过干预发现了学生对于学习的内在需求,帮助学生顺利过渡到新的教学体系。在后续的研究希望能够总结归纳出从小学阶段到初中阶段的所有数学体系的转折点,结合中小学生学习生存状态,给出适合学生学习的课堂呈现形式和学习方式,找到数学学习的体系性学习机制,给中小学教学更加实用的教学建议。



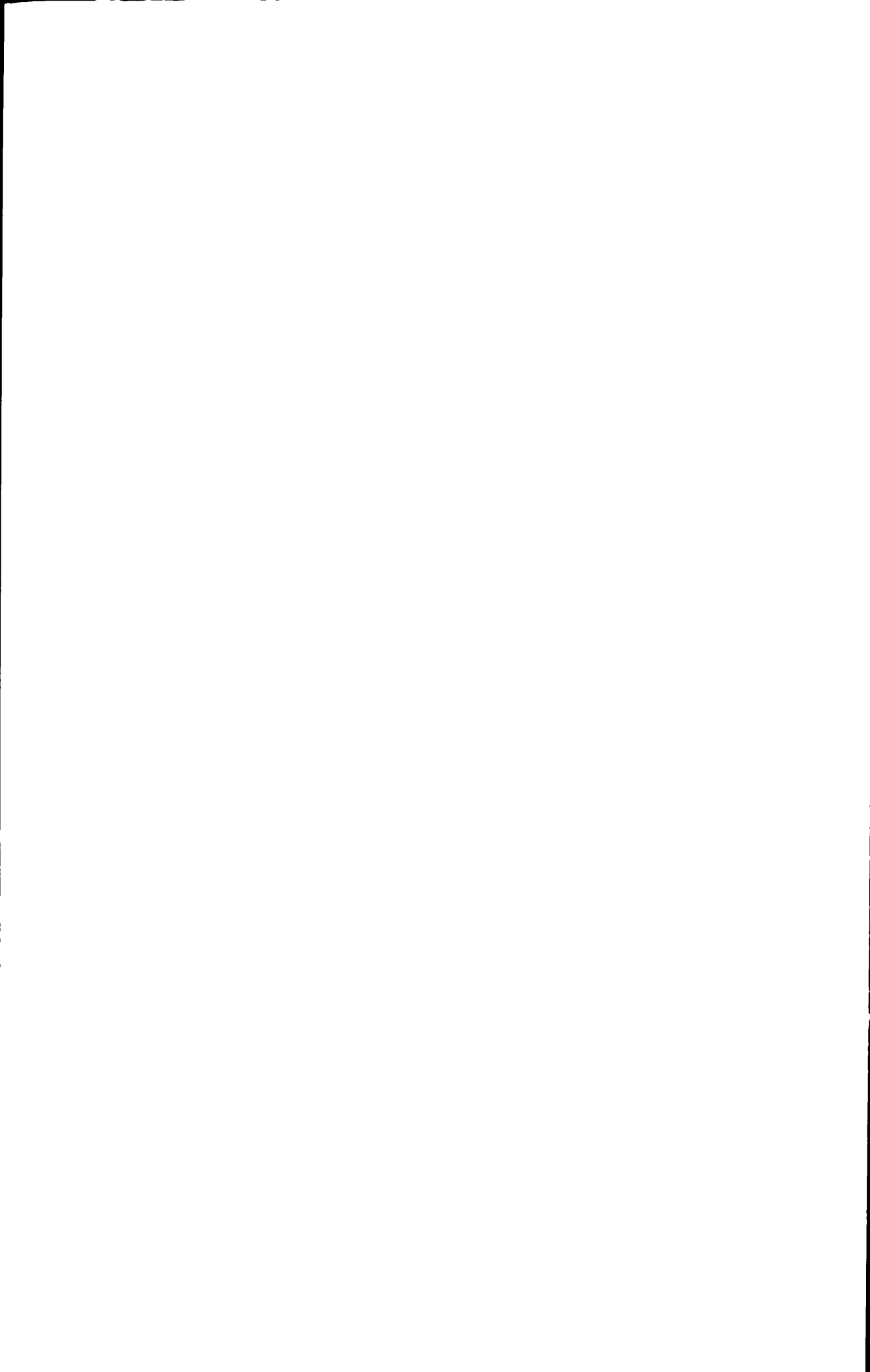
## 参考文献

1. Garrett, A.J., Mazzocco, M.M. M., & Baker, L.(2006). Development of the Metacognitive Skills of Prediction and Evaluation in Children With or Without Math Disability. *Learning Disabilities Research & Practice*,21(2),77-88
2. Brian ,R. B. & Diane, P. B.(2008). Introduction to the special series: mathematics and learning disabilities. *Learning Disability Quarterly* Volume 31,3-8
3. Melissa, M. M., Michèle M. M. M., Laurie B. H., & Martha, C.E.(2007)Cognitive Characteristics of Children With Mathematics Learning Disability (MLD) Vary as a Function of the Cutoff Criterion Used to Define MLD. *JOURNAL OF LEARNING DISABILITIES* VOLUME 40, NUMBER 5, SEPTEMBER/OCTOBER 2007, PAGES 458-478
4. Annemie, D., Herbert, R., & Ann, B.(2001) Metacognition and mathematical problem solving in grad 3. *JOURNAL OF LEARNING DISABILITIES* VOLUME 34, NUMBER 5, SEPTEMBER /OCTOBER 2001, PAGES 435-449.
5. Diane, P. B., Paula, H. & Sun ,A. K.(2003) Using Explicit and Strategic Instruction to Teach Division Skills to Students With Learning Disabilities. *EXCEPTIONALITY*, 11(3), 151-164

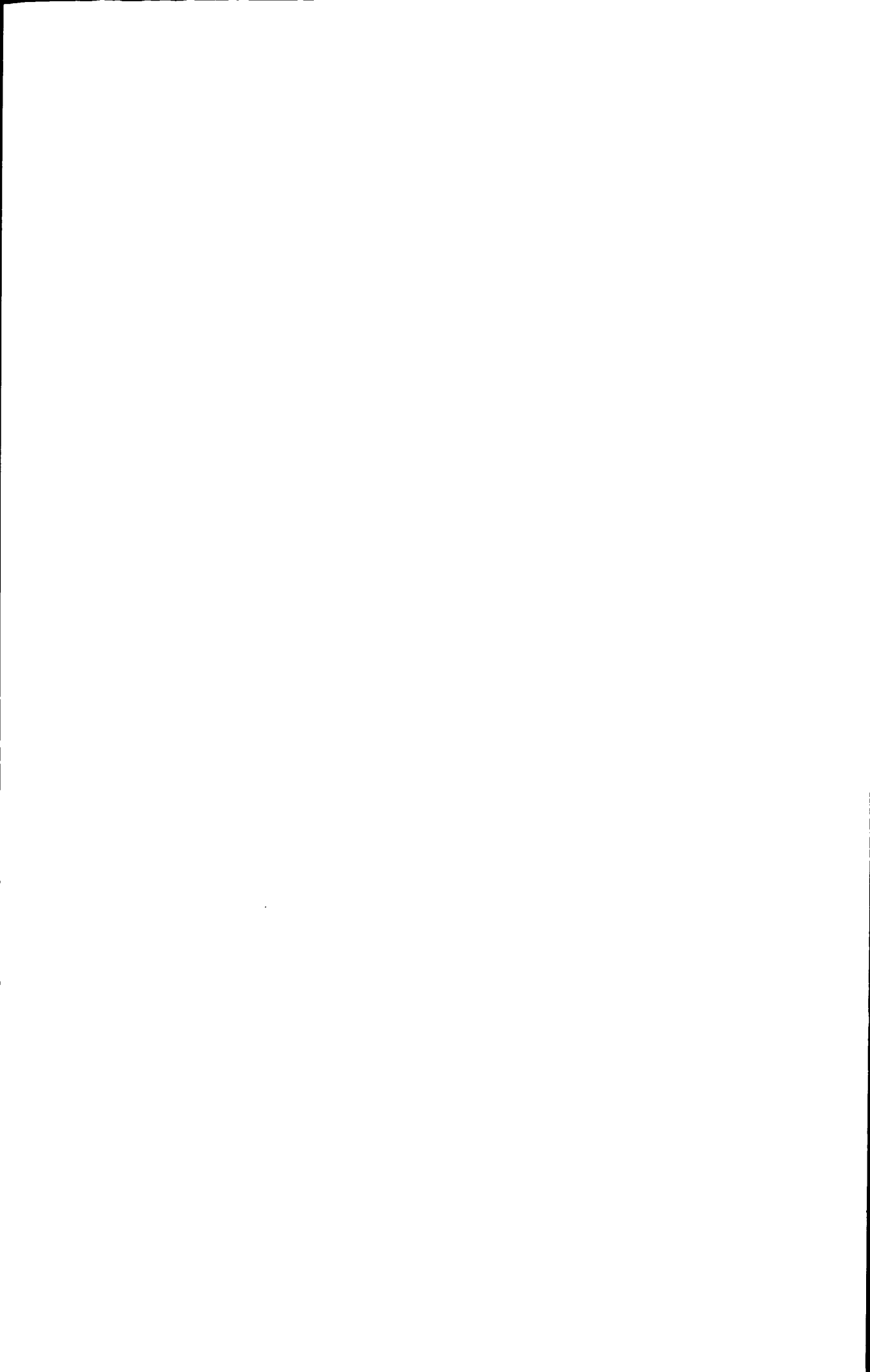


6. Donald ,J. M. & Jeffrey, B.(2008) Computational Skills, Working Memory,and Conceptual Knowledge in Older Children With Mathematics Learning Disabilities Journal of Learning Disabilities Volume 41 Number 1 January/February 2008 15-28
7. Kristine, L. Koontz., & Daniel, B. Berch (1996). Identifying Simple Numercial Stimuli: Processing Inefficiencies Exhibited by Arithmetic Learning Disabled Children. MATHEMATICAL COGNITION, 1996, 2(1) 1-23.
8. Kathleen, M. Wilson & H, Lee, Swanson(2001). Are Mathematics Disabilities Due to a Domain—General or a Domain—Specific Working Memory Deficit? JOURNAL OF LEARNING DISABILITY., VOLUME 34, NUMBER 3, MAY/JUN 2001, PAGES 237-248.
9. Gary A. Troia & Steve Graham(2002). The Effectiveness of a Highly Explicit, Teacher-Directed Strategy Instruction Routine: Changing the Writing Performance of Students with Learning Disabilities. Journal of Learning disabilities volume 35, Number 4, July/August 2002, Page 290-305
10. Deborah L. Butler(2003). Structuring Instruction to Promote Self-Regulated Learning by Adolescents and Adults With Learning Disabilities. EXCEPTIONALITY, 11(1), 39-60
11. Baker,E. T.,Wang. M. C.,& Walberg,H. J. (1994). The effects of inclusion on learning. Educational Leadership,52(4),33-35



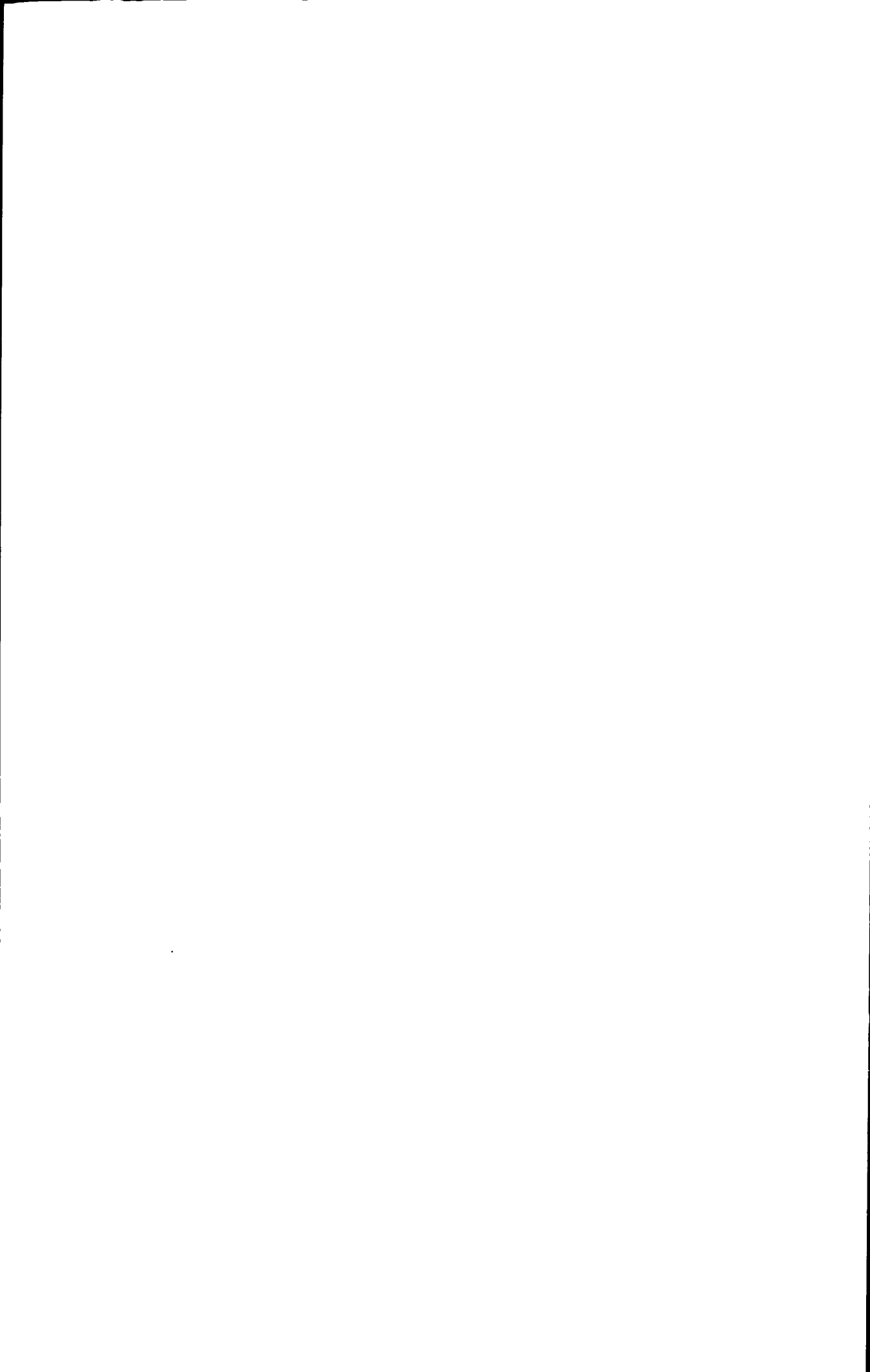


12. Bryant,D. P.,Bryant,B. T.,& Hammill,D. D. (2000). Characteristic behaviors of students with LD who have teacher-identified math weaknesses.*Journal of Learning Disabilities*,33, 168-177,199
13. Carnine,D. (1997). Instructional design in mathematics for students with learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*,30, 130-141
- 14 . Case,L. P.,Harris,K. R.,& Graham,S. (1992). Improving the mathematical problem-solving skills of students with learning disabilities:Self-regulated strategy development. *The Journal of Special Education*,26,1-19
- 15 . Cassel,J.,& Reid,R. (1996). Use of a self-regulated strategy intervention to improve word problem-solving skills of students with mild disabilities.*Journal of Behavioral Education*,6, 153-172
- 16 . Englert,C. S.,Culatta,B. E.,& Horn,D. G. (1987). Influence of irrelevant information on addition word problems on problem solving. *Learning Disability Quarterly*,10, 29-36.
17. Fox,C. L. (1989). Peer acceptance of learning disabled children in the regular classroom. *Exceptional Children*,56, 50-59
18. Fuchs,D.,& Fuchs,L. S. (1994). Inclusive schools movement and the radicalization of special education reform. *Exceptional Children*,60, 294-309.
19. Fuchs,D.,& Fuchs,L. S. (1998). Competing visions for educating students with disabilities:Inclusion versus full inclusion. *Childhood*



Education, 74, 309-C316

20. E.Jacobs,Martha M.Bleeker,and Michael J.Constantino.The self-system During Childhood and Adolescence:Development Influences and Implications.Janis Journal of psychotherapy Integration 2003,Vol 13,No 1,33-65
21. Jaan valsiner.Consciousness as a process: From the loneliness of William James to the Buzzing and Booming voices fo contemporary science. Integr psych Behav (2008) 42:1-5
22. Dominic A. Simon&Robert A.Bjork. Metacognition in motor Learning, Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition.2001,Vol, 27.No.4,907-912.
23. Bernadette Berardi-Coletta, Linda S. Buyer, Roger L. Dominowski & Elizabeth R.Rellinger. Metacognition and Problem solving : A Process-Oriented Approach. Journal of Experimental Psychology: Learning, memory, and cognition 1995,Vol, 21.No.1, 205-223.
- 24.Muhammad maqsud. Effects of metacognitive instruction on mathematics achievement and attitude towards mathematics of low mathematics achievers. Educational reserch volume 40 number 2 summer 1998.
25. Bracha , Kramarski & Zemira R. Mevarech.Effects of Multilevel Versus Unilevel Metacognitive Training on Mathematial Reasoning.
- 26.Marjorie Montague,The Effects of Cognitive and Metacognitive

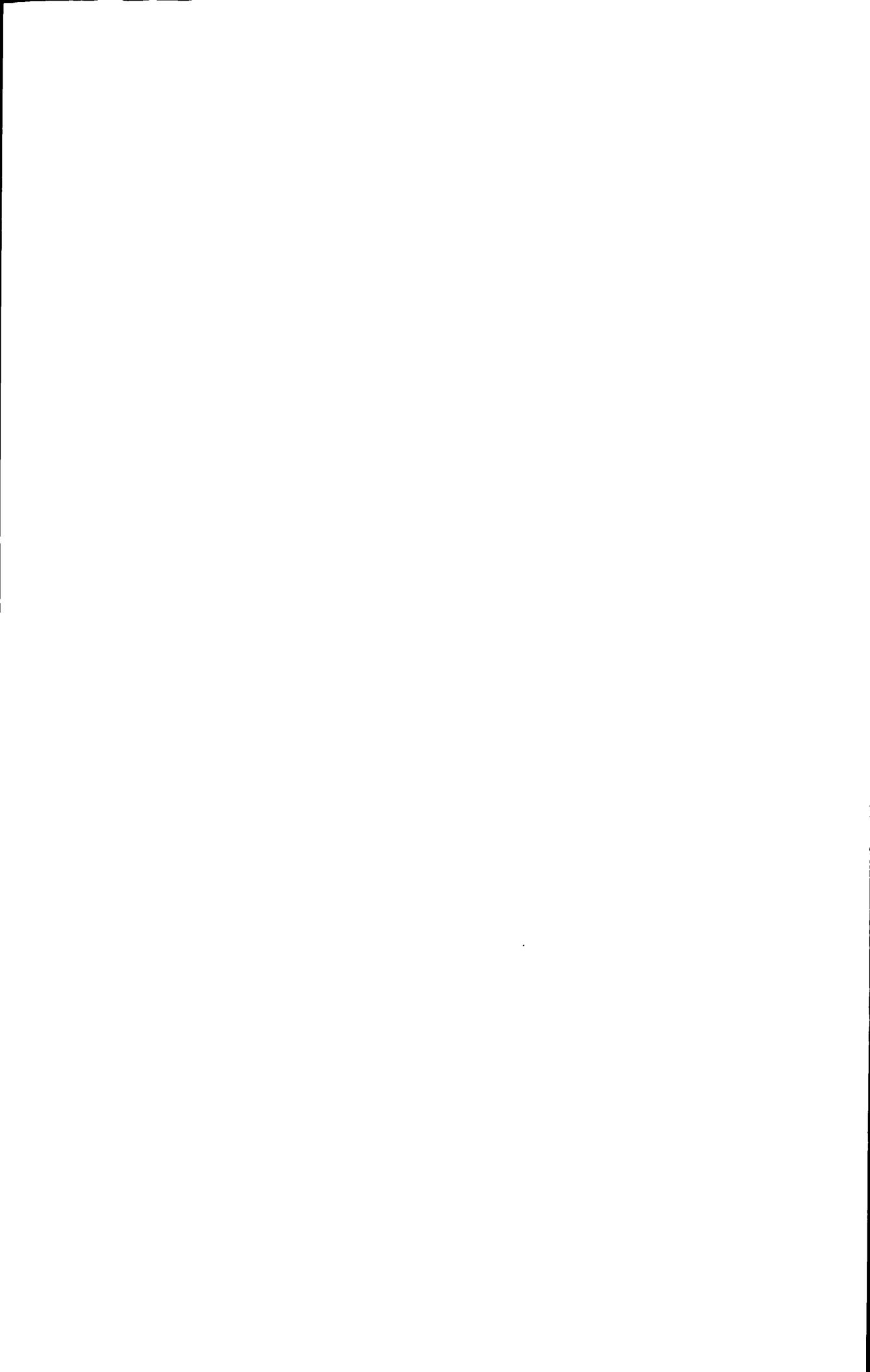


Strategy Instruction on the Mathematical Problem Solving Of Middle School Students with Learning Disabilities.

27. Development of a cognitive—metacognitive Framework for protocol analysis of mathematical problem solving in small group.

28. Alice F Artzt & Eleanor Armour—Thomas Assessment & Evaluation in higher education vol,28, No.,6, december 2003.

29. Vygotsky ,Emily fox Michelle Riconscente . Educ Psychol Rev (2008) 20:373–389 DOI 10.1007/s10648-008-9079-2.



## 附录

### 附录 1

#### 学生错误整理按照数学内容分类

##### 一、基本概念不清楚的题目

1 列是不等式  $2x-6<10$  的解集的是 ( )

A  $x<7$  B  $x>8$  C  $x<8$  D  $x=7$

2 如果一个数的绝对值是  $\frac{2}{3}$ , 那么这个数是\_\_\_\_\_

3 下列哪一组是有理数 ( )

A  $-8, -\frac{2}{3}, \pi$  B  $-9, 0, \pi$  C  $-\frac{2}{3}, 0, 17$  D  $2, 1, \pi$

4 不等式  $-2 \leq x < 3$  中的整数解为\_\_\_\_\_

5 二元一次方程  $2x+y=4$  的非负整数解有 ( ) 个。

6  $-4x^2y^{2n-3}$  与  $\frac{1}{2}x^m y$  都是五次单项式, 则  $m+n=$ \_\_\_\_\_

##### 二、日常生活基本概念不熟悉

1、出租车的起步价是 11 元, 超过起步价距离, 每增加 1 千米, 加收 2.1 元 (不足一千米按照一千米计算) 某人乘坐出租车从甲地到乙地付了 15.2 元, 那么甲地到乙地经过的路程最大值是多少?

$15.2-11=4.2$  (元)  $4.2 \div 2.1=2$  (千米) 学生只算到这一步, 就没有了下文。

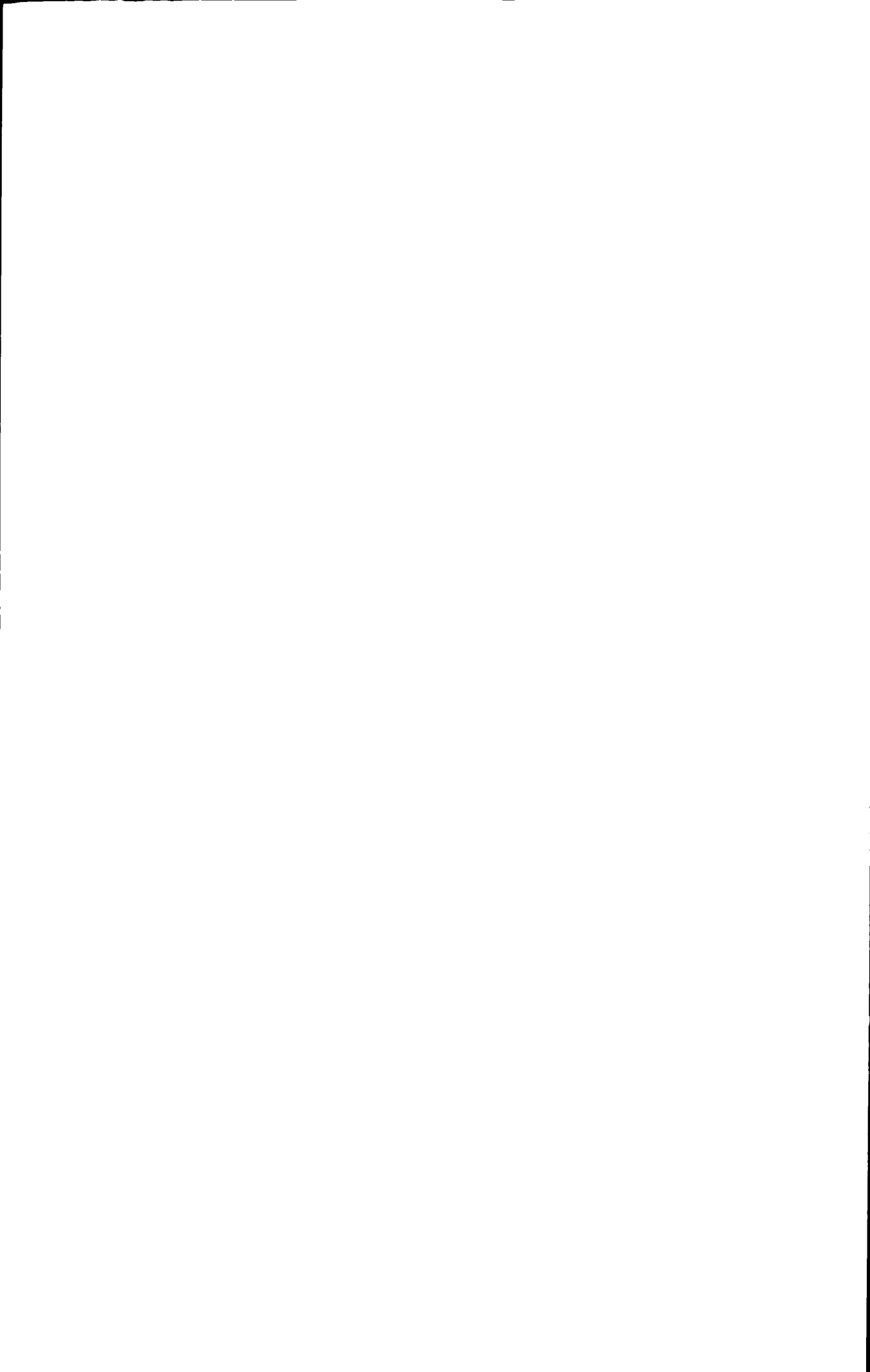
学生对于起步价 11 元能够走多远距离不知道。

2、某工厂第一季度销售额为 200 万元, 生产成本是 180 万元, 则第一季度的利润率是多少?

##### 三、涉及到负数的符号运算

1、 $4x+5>6x-7$





$$4x-6x > -7-5$$

$$-2x > -12$$

$$x > 6$$

$$2、3x+12 > \pi x+18$$

$$(3-\pi)x > 6$$

$$x > \frac{6}{3-\pi}$$

$$3、-2x-8 > 6$$

$$-2x > 14$$

$$x > -7$$

#### 四、方程中分数的化简

$$1、解方程：\frac{2x+3}{x+1} = \frac{6x+7}{3x+4} - 1$$

$$(2x+3)(3x+4) = (6x+7)(x+1) - 1$$

$$6x^2+17x+12 = 6x^2+13x+7-1$$

$$4x = -6$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

$$2、解方程：\frac{4-y}{2} - \frac{8-3y}{10} = 1 - \frac{8-2y}{5}$$

$$5(4-y) - (8-3y) = 10 - 2(8-2y)$$

$$20-5y-8+3y = 10-18-4y$$

$$12-2y = -8-4y$$

$$20 = -2y$$

$$y = -10$$



## 附录 2

## 学生错误整理按照心理特点分类

## 一、数学知识维度增加时适应困难

1、某个数的绝对值是  $\frac{2}{3}$ , 那么这个数是\_\_\_\_\_

2、公交车上原来有若干人, (上车的人数为正, 下车的人数为负,)

-5, 3, 5, 8, -10, 6, 4, -7, -3, 2

经过十站后, 车上的人数比原来多或者少多少人?

3、甲乙两个同学进行手工制作, 原有手工作业纸 27 张, 两人用去的手工纸

总数是剩下的手工纸张数的一半, 如果甲用了 5 张, 那么乙用了多少张?

## 二、加思维到乘思维的转变适应困难

1、1500 米=\_\_\_\_\_千米

2、 $2^3+2^4=$ \_\_\_\_\_

3、 $a^n \cdot a^m=$ \_\_\_\_\_

4、0.6 扩大 100 倍是多少?

5、10 分米=\_\_\_\_\_厘米=\_\_\_\_\_米

## 三、从数字思维到符号思维

1、如果  $a < 0$ , 则  $a + |a| =$ \_\_\_\_\_

2、 $(-2a-b)^2$

$$= -4a^2 - 4ab + b^2$$

3、 $(6x-7)^2$

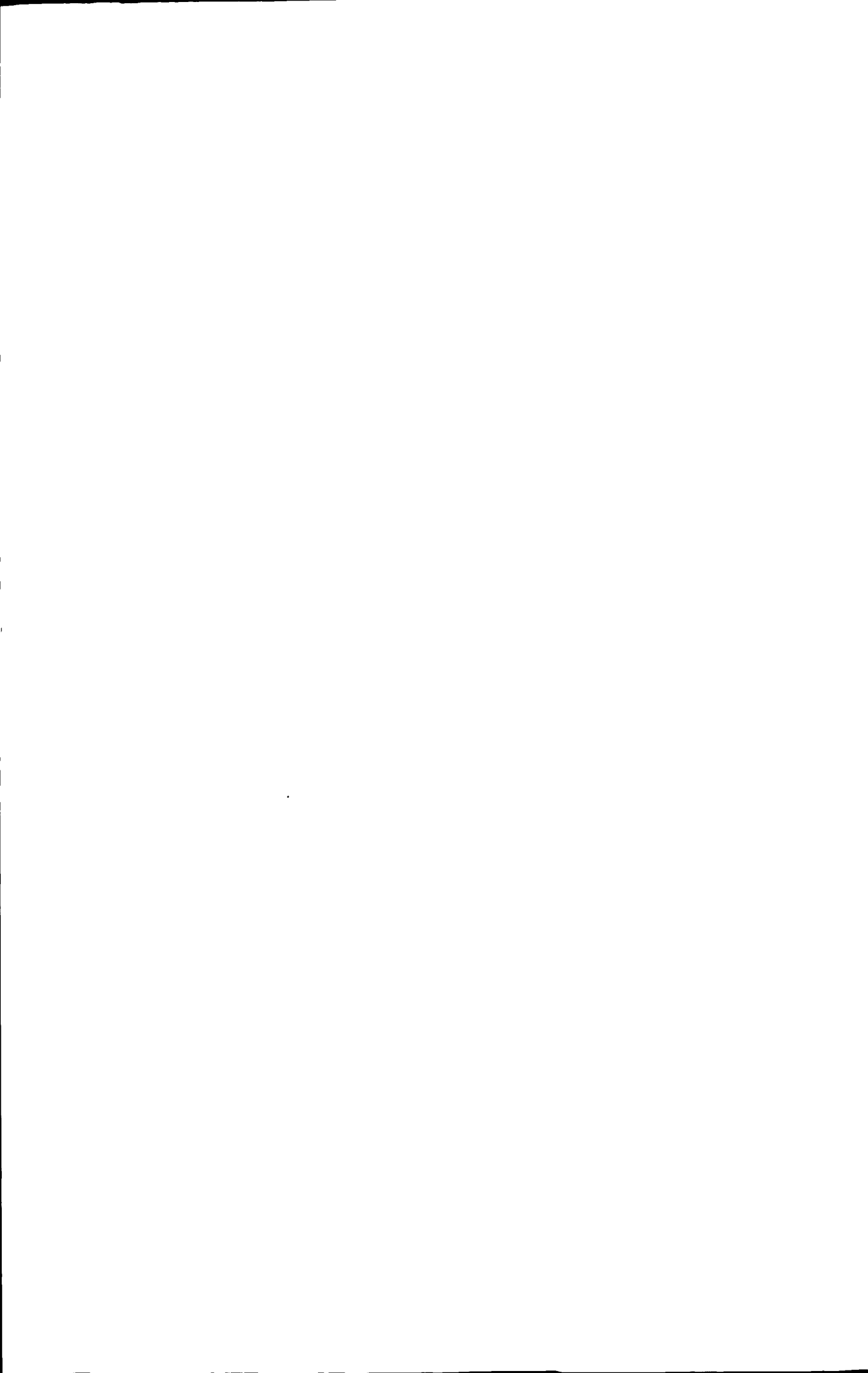
$$= 12x^2 + 49 - 84x$$

4、 $(-3a-2b)^2$

$$= 9a^2 + 4b^2 - 12ab$$

5、将如下的代数式归为  $a+b$ ,  $ab$ ,  $\frac{a}{b}$  三种形式

$$4 \frac{2x+y}{3x+2y} \left( \frac{a}{b} \right)$$



$$\frac{3a+b}{4+3b} - a \left( \frac{a}{b} \right)$$

$$\frac{4a+3b}{3a+2b} a \left( \frac{a}{b} \right)$$

6、判断下列代数式是否相等

$$\frac{(2n+3)(x+y)}{9} = (x+y) \frac{2n+3}{9} \quad (\times)$$

$$-4x \cdot \frac{(y-x)}{2} = \frac{(y-x)}{2} \cdot -4x \quad (\checkmark)$$

$$-5x \cdot \frac{1}{2}(y-x) = \frac{(y-x)}{2}(-5x) \quad (\times)$$

$$\frac{(2n+3)(y+x)}{9} = (x+y) \frac{2n+3}{9} \quad (\times)$$

7、 $a^n \cdot a^m$

解题思路： $n=2, m=4, a^2 \cdot a^4 = a^6 = a^{2+4}$

8、当  $a > 0$  时， $\frac{a+|a|+a}{|a|} = \underline{\hspace{2cm}}$

学生将  $a=2$  带入进行计算。

#### 四、解题程序意识

1、因式分解下列代数式

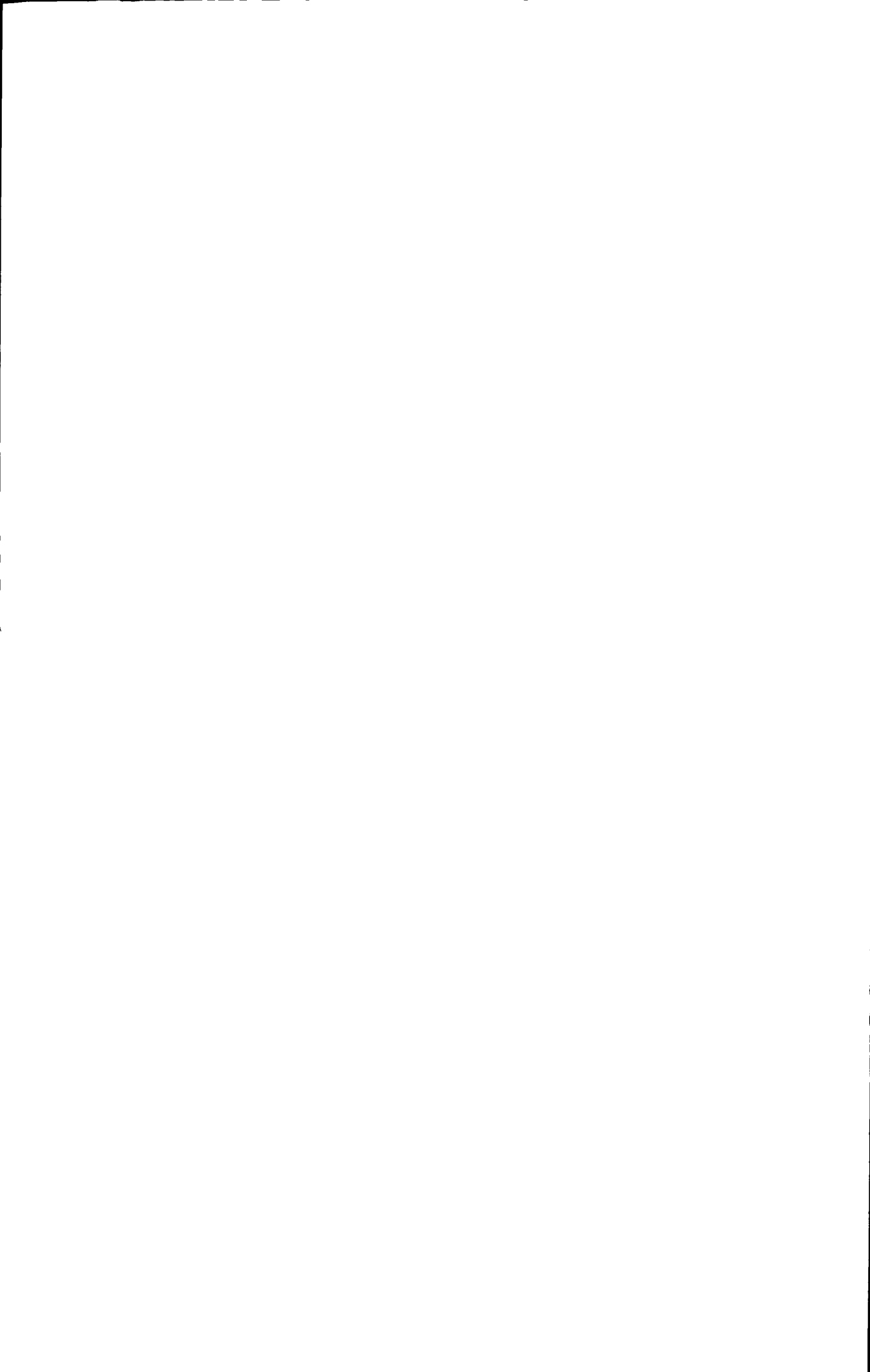
$$\begin{aligned} & (2a+b)^2 - (a+c)^2 \\ &= 4a^2 + 4ab + b^2 - (a^2 + 2ac + c^2) \\ &= 4a^2 + 4ab + b^2 - a^2 - 2ac - c^2 \\ &= 3a^2 + 4ab + 2ac + c^2 \end{aligned}$$

2、因式分解

$$\begin{aligned} & 4x^4 - 64^4 \\ &= (2x^2 - 8y^2)(2x^2 + 8y^2) \end{aligned}$$

3、计算下列代数式

$$(b+2a-c)(b-2a+c)$$



$$=[(b+2a)-c][(b-2a)+c]$$

$$=(b+2a)^2-c^2$$

#### 4、因式分解

$$(a^2+b^2)^2-4a^2b^2$$

$$= (a^2+b^2-2ab)(a^2+b^2+2ab)$$

#### 5、因式分解

$$3x^2+21x+36$$

$$=(3x+9)(x+4)$$

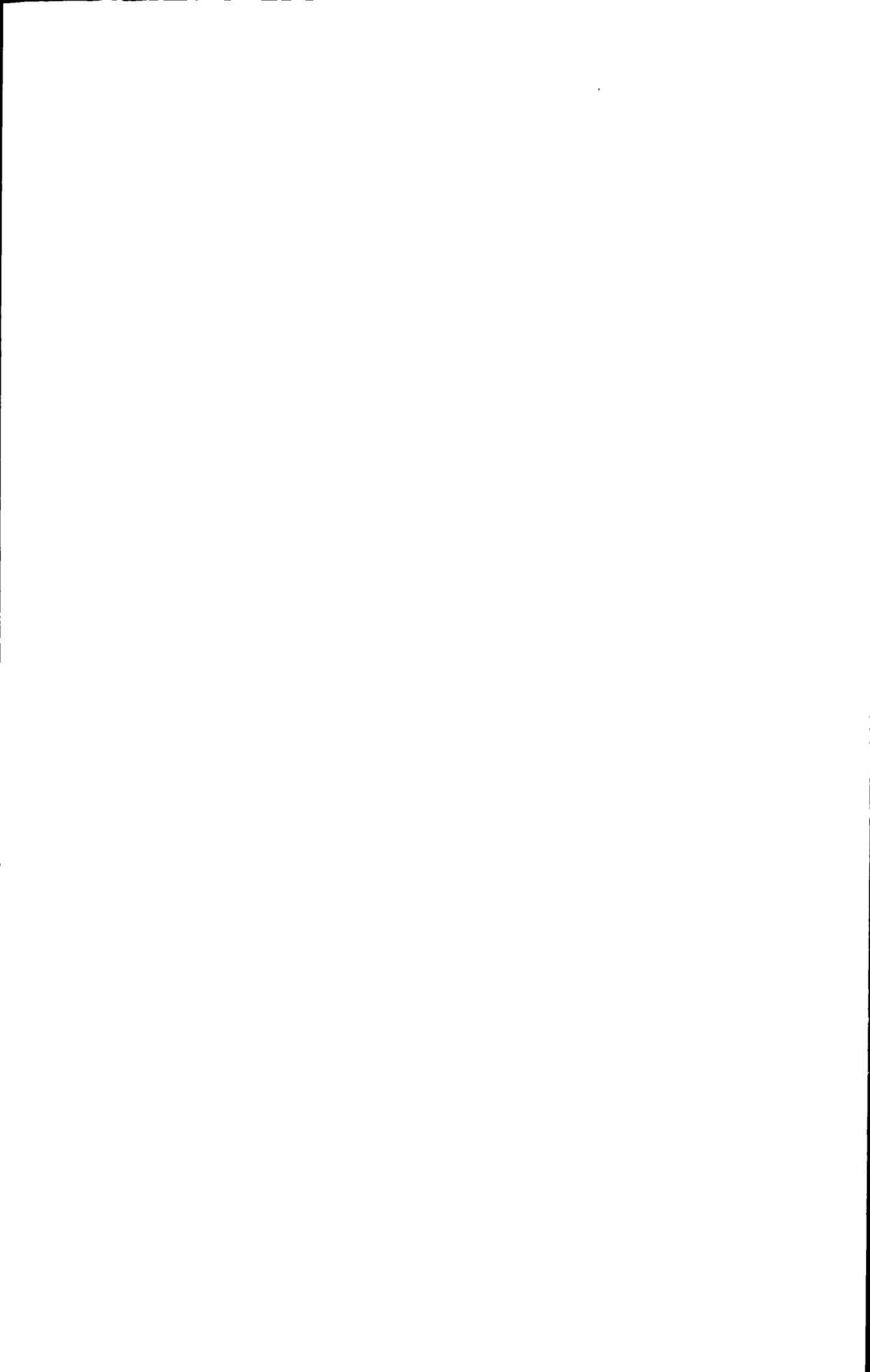
#### 6、计算下列代数式

$$(x+\frac{y}{3}-z)(x-\frac{y}{3}+z)$$

$$=[(x+\frac{y}{3})-z][(x-\frac{y}{3})+z]$$

$$=(x+\frac{y}{3})^2-z^2$$





## 附录 3

## 竞赛式干预题目

## 一、抢答

1、下列那个数是整数（）

0.28     $\frac{2}{3}$     1.78    0

2、下列哪个是正整数（）

0.98    0.87     $\frac{9}{8}$     28

3、下列哪个是分数（）

29    0.75    21     $\pi$

4、下列哪组是负数（）同学们都说简单，

A 7、7.8、 $\frac{2}{3}$     B -2、-1、 $-\frac{2}{3}$ 、C 1、8、9、D -2、 $\frac{3}{2}$ 、0

5、下列哪一组是非正数（）

A -8、0、 $\frac{3}{2}$     B 2、1、-2 C -8、2、 $\frac{2}{3}$     D 0、-1、 $-\frac{2}{3}$

6、下列哪组是有理数（）

A -8、 $-\frac{3}{2}\pi$  B -9、0、 $\frac{1}{3}$     C  $-\frac{3}{2}$ 、0、17    D 2、1、 $\pi$

7、下列叙述中正确的有

①零是整数    ②零是有理数    ③零是非负数    ④零是偶数

A 1个    B 2个    C 3个    D 4个

8、-3.14是（）

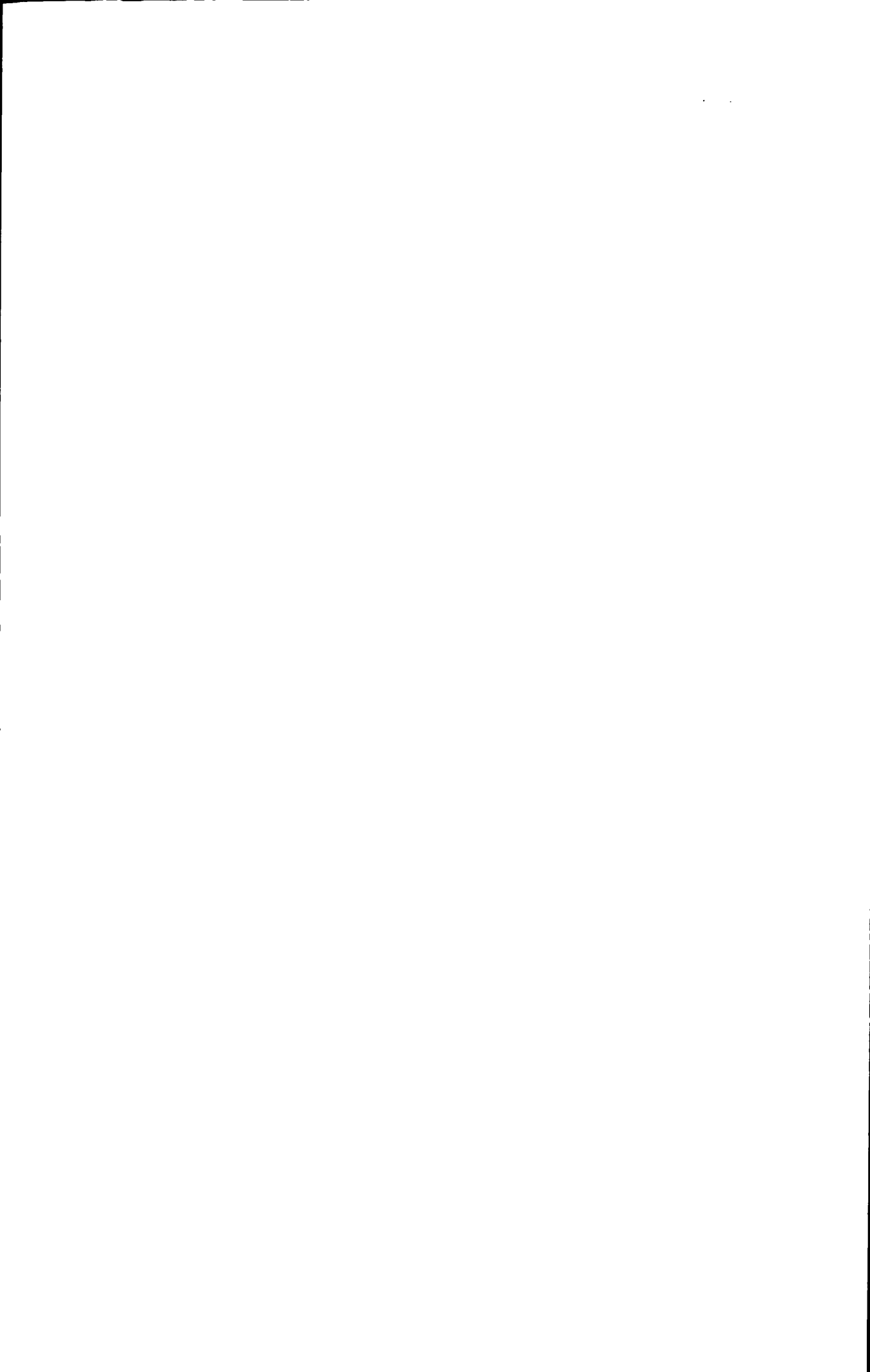
A 是负数但不是分数    B 不是分数但是有理数    C 是负数也是分数    D 是分数但不是有理数

9、如果一个数的绝对值是 $\frac{2}{3}$ ，那么这个数是\_\_\_\_\_。

10、5名学生参加了数学竞赛，以80分作为标准线，老师将5个人的成绩分别记为+9,+3,+4,0,-2，那么5名同学的成绩分别是\_\_\_\_\_。

11、哪些数与它的绝对值的和等于0？

12、出租车起步价是11块，超过起步价距离，每增加1千米，加收2.1元（不足一千米按一千米计算）某人乘出租车从甲地到乙地付了15.2，那么从甲地到乙地经过的的路程的最大值是多少元？（不足一千米按照一千米算。）



## 附录 4

## 砖块式干预题目

一、下面代数式可以归为 1)  $a+b$ , 2)  $ab$ , 3)  $\frac{a}{b}$  三种形式。判断每一代数形式的类型, 在其右侧的括号里用数字说明。

$$2a+3b \quad ( )$$

$$2a*4b \quad ( )$$

$$(-a)b \quad ( )$$

$$3a+2 \quad ( )$$

$$(a-b)(a+b) \quad ( )$$

$$-3a-2b \quad ( )$$

$$2a-3b \quad ( )$$

$$2a*3b \quad ( )$$

$$(-2a+3b)(2a-3b) \quad ( )$$

$$4 \frac{2x+y}{3x+2y} \quad ( )$$

$$\frac{3a+b}{4+3b} - a \quad ( )$$

$$\frac{4a+3b}{3a+2b} a \quad ( )$$

## 二、填空

$$2^2 = ( ) \text{ 个 } 2 \text{ 相乘}$$

$$2^2 2^3 = ( ) \text{ 个 } 2 \text{ 相乘} = 2^{( )}$$

$$a^2 = ( ) \text{ 个 } a \text{ 相乘} = a^{( )}$$

$$a^3 a^4 = ( ) \text{ 个 } a \text{ 相乘} = a^{( )}$$

$$a^m = ( ) \text{ 个 } a \text{ 相乘}$$

$$a^m a^n = ( ) \text{ 个 } a \text{ 相乘} = a^{( )}$$



## 附录 5

## 复合式干预题目

一、判断下列各题是否与题例代数式类型相同，并且在括号里用√或×表示。

1、 $(2m+n) \cdot (-2)$

①  $-2(2m+n)$  ( )      ②  $(2m+n) - 2$  ( )

2、 $-5x \cdot \frac{1}{2}(y-x)$

①  $\frac{(y-x)}{2} \cdot 5x$  ( )      ②  $\frac{(y-x)}{2}(-5x)$  ( )

3、 $\frac{(2n+3)(x+y)}{9}$

①  $(x+y)(2n+3) \cdot 9$  ( )      ②  $\frac{1}{9}(x+y)(2n+3)$  ( )      ③  $(x+y) \frac{(2n+3)}{9}$  ( )

二、将下面的代数式利用结合律分成两部分，可以有多种分法

$$a+2b-c$$

$$3a-4b+2c$$

$$a-2b+3c$$

$$a+2b-3c$$

$$3x+2y-2z$$

$$4x+5y-6z$$

$$3a+4a-4b$$

$$x+y-z$$

$$x-2y+3z$$

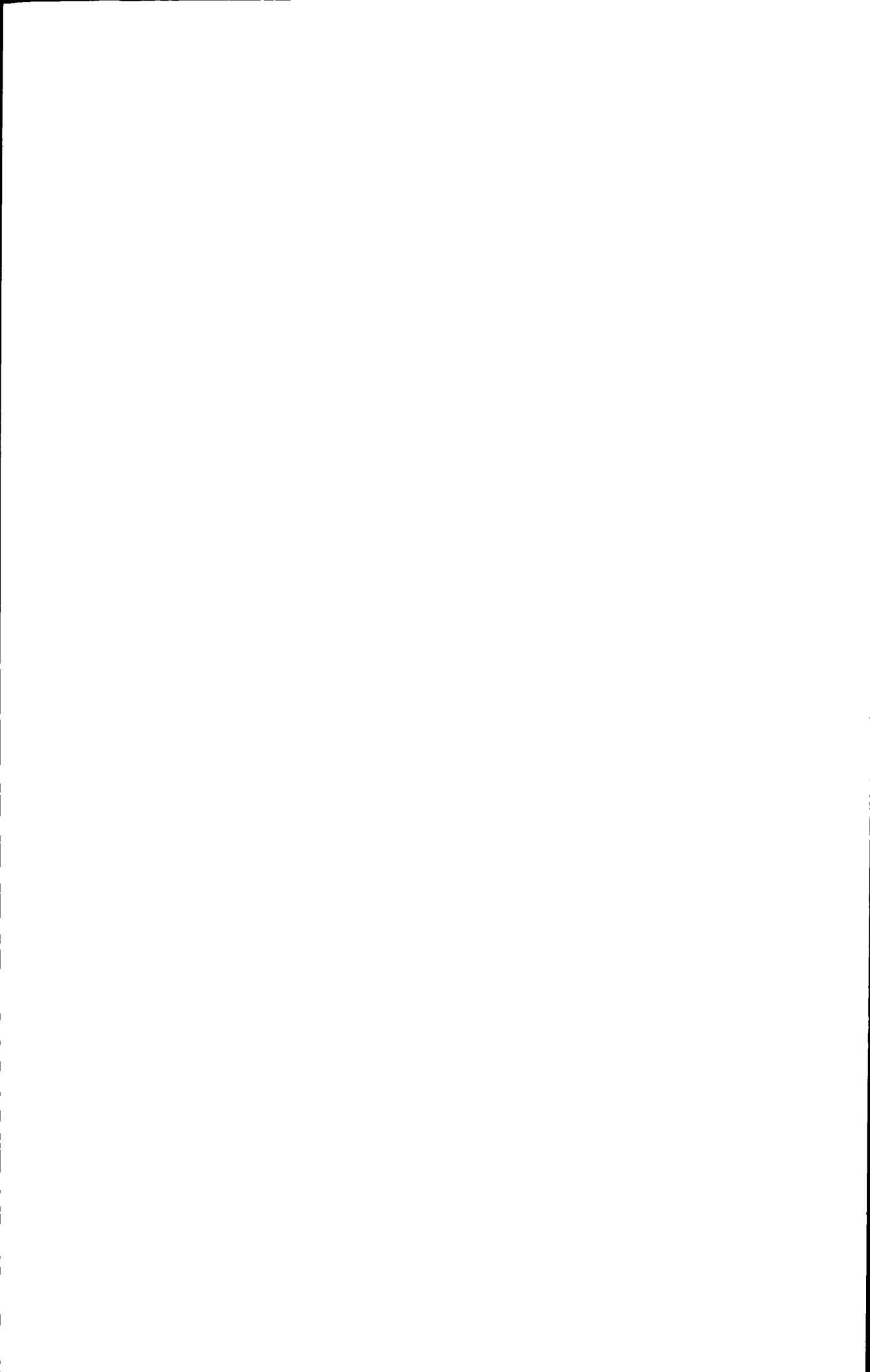
$$m-2n+l$$

三、将下列式子组合成完全平方公式或者平方差公式（不需要计算）

$$(x-y+z)(x-y+z)$$

$$(m-n+2c)(m+n-2c)$$

$$(x+y+z)(-x-y-z)$$



$$(2a+b-\frac{1}{4}c)(2a-b+\frac{1}{4}c)(m+n-2p)(m+n+2p)$$

$$(1+\frac{1}{4}c+\frac{1}{3}c)(1-\frac{1}{4}c-\frac{1}{3}c)$$





## 附录 6

## 程序性干预题目

一、下列各式的变形中，是否是因式分解，为什么？

1、 $x^2-y^2+1=(x+y)(x-y)+1$  ；

2、 $(x-y)(y-x)a^2=(x-y)(1-a^2)$  ；

3、 $(x-2)(x+1)=x^2-x-2$  ；

4、 $x^2y+6xy+9y=xy(x+6+\frac{9}{x})$

5、 $6x^2y^3=3xy \cdot 2xy^2$

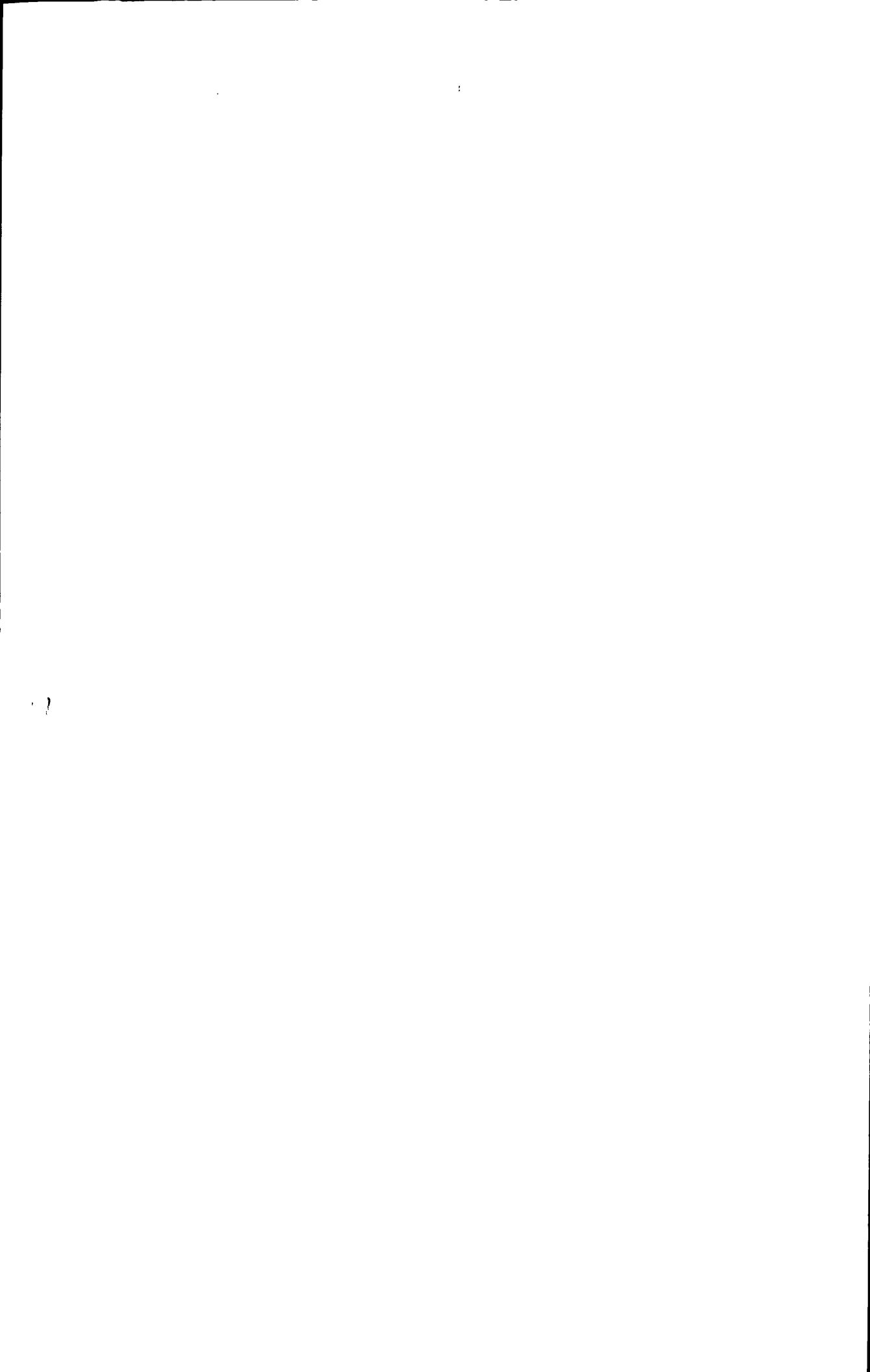
二、用文字说明下列式子的计算过程

1、 $(x+y-2z)(x+y+2z)$

2、 $(m-n+2L)(m+n-2L)$

3、 $(1+\frac{2}{9}x+3y)(1-\frac{2}{9}x-3y)$

4、 $(2a+b-c)(2a-b+c)$



## 后记

落笔写下“后记”二字，万般滋味涌上心头，短暂的平静与喜悦之后，确是深深地反思与感激。似乎言语并不足以表达心中的情愫，然而还是希望借自己苍白的语言表达对爱护我、帮助我、支持我的人的深深的敬意。

将最诚挚的感谢献给我的导师李晓文教授。老师的正直和善良让我受益匪浅，您同家人，谆谆教诲，语重心长；您是恩师，严谨治学，大家风范。您给予我的点滴关心都将成为我人生坚持与进取的动力。您和罗若山老师对我生活上、学习上的帮助让我感激，帮我前行。

感谢我的同门代杏子和许晨，在生活上我们互相关心，学习上互相提醒，你们给了我莫大的支持和帮助。感谢胡淑珍师姐、周丽华师姐，乌阿茹娜师妹、朱玲师妹、陆佳莹师妹、苏靖师妹、和你们在一起的时光是我在学校最开心的时光。

感谢上海市市西初级中学的校领导以及王进敬老师，感谢你们对我研究工作的鼎力支持。

感谢一直站在我身后默默支持我、关心我、爱我的家人。你们的体谅、支持、鼓励、让我前进中没有后顾之忧，谢谢妹妹亢芳圆给我数学专业知识的建议，谢谢弟弟亢圆圆帮我打印试卷。谢谢我的爱人对我的包容与爱，谢谢你们，没有你们就没有我今天的成就。

感谢你们！

亢芳芳

2011.5.10 于丽娃河畔

