# 全国大学生数学竞赛委员会

## 关于举办第三届全国大学生数学竞赛的通知

各省、市、自治区数学会、解放军院校协作中心数学联席会：

为了培养人才、服务教学、促进高等学校数学课程的改革和建设，增加大学生学习数学的兴趣，培养分析、解决问题的能力，发现和选拔数学创新人才，为青年学子提供一个展示基础知识和思维能力的舞台，经中国数学会批准，第三届全国大学生数学竞赛由上海同济大学承办。

经全国大学生数学竞赛委员会研究确定，本届比赛分区预赛在2011年10月29日（星期六）上午9：00—11：30举行，决赛于2012年3月份的第三周周六上午在同济大学举行。

现将竞赛的具体事宜通知如下：

（1） 参赛对象：

大学本科二年级或二年级以上的在校大学生。竞赛分为非数学专业组和数学专业组(含数学与应用数学、信息与计算科学专业的学生)。数学专业学生不得参加非数学专业组的竞赛。

（2） 竞赛内容：

非数学专业组竞赛内容为本科高等数学内容（高等数学内容为理工科本科教学大纲规定的高等数学的教学内容）。数学专业组竞赛内容含数学分析、高等代数和解析几何（均为数学专业本科教学大纲规定的教学内容），所占比重分别为50%、35%及15%左右。

（3） 奖项的设立：

设赛区（一般以省、市、自治区作为赛区，军队院校为一个独立赛区）奖与全国决赛奖。

赛区奖。按照重点学校与非重点学校，数学类专业与非数学类专业分别评奖。每个赛区的获奖总名额不超过总参赛人数的15%（其中一等奖、二等奖、三等奖分别占各类获奖总人数的20%、30%、50%）。冠名为“第三届全国大学生数学竞赛（**赛区）*等奖”。

决赛奖。参加全国决赛的总人数不超过300人。每个赛区参加决赛的名额不少于5名（其中数学类2名，非数学类3名），由各赛区在赛区一等奖获得者中推选。最后入选名单由竞赛组织委员会批准。决赛阶段的评奖等级按绝对分数评奖。分区预赛和决赛的获奖证书均加盖“中国数学会普及工作委员会”的公章，获奖证书由承办单位统一印制。每份获奖证书，承办单位收取工本费5元。

（4）命题、阅卷、评奖工作：

分区预赛和决赛的试题由全国大学生数学竞赛委员会统一组织专家命题。分区预赛的试卷印刷、保密、阅卷、评奖工作，由各个赛区统一安排，由各赛区的竞赛负责人统一部署。各赛区在考试结束后，当堂密封试卷，及时送交到赛区指定试卷评阅点集中阅卷。评奖工作由各赛区自行组织。

决赛阶段的试卷印刷、保密、评阅工作在全国大学生数学竞赛委员会领导下，由承办单位组织进行。评奖工作由全国大学生数学竞赛委员会组织专家组评定。

（5）决赛试题和获奖名单将在全国大学生数学竞赛网站上公布。

中国数学会普及工作委员会

二〇一一年五月十二日

# 一、函数、极限、连续

（竞赛大纲）

1．函数的概念及表示法、简单应用问题的函数关系的建立.
2．函数的性质：有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3．复合函数、反函数、分段函数和隐函数、基本初等函数的性质及其图形、初等函数.
4．数列极限与函数极限的定义及其性质、函数的左极限与右极限.
5．无穷小和无穷大的概念及其关系、无穷小的性质及无穷小的比较.
6．极限的四则运算、极限存在的单调有界准则和夹逼准则、两个重要极限.
7．函数的连续性（含左连续与右连续）、函数间断点的类型.
8．连续函数的性质和初等函数的连续性.
9． 闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理).

1-1　实值函数$F(x)$和$G(x)$都定义在整个实数轴上，并且满足

$$\lim_{x\to a}F(x)=p，\ \lim_{x\to p}G(x)=q，$$

讨论：是否有$\lim\limits_{x\to a}G(F(x))=q$，若成立则证明，若不成立，请举例说明。

解：

不成立. 例如：

$$F(x)=G(x)=\begin{cases}0, & 当x\neq 0\\ 1, & 当x=0\end{cases}，此时，复合函数G(F(x))=\begin{cases}1, & 当x\neq 0\\ 0, & 当x=0\end{cases}.$$

我们有

$$\lim_{x\to 0}F(x)=0,\quad \lim_{x\to 0}G(x)=0，但是，\lim_{x\to 0}G(F(x))=1.$$

1-2　设$a>0$，$\{x_n\}$满足：

$$x_0>0,\ x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n}),\quad n=0,1,2\cdots,$$

证明：$\{x_n\}$收敛，并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

证明：（1） 证明：易见，$x_n > 0,(n = 0,1,2,\cdots)$, 则

$$x_{n+1} \ge \sqrt{x_n \tfrac{a}{x_n}} = \sqrt{a} \ ,$$

从而有： $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) - x_n = \frac{a - x_n^2}{2x_n} \le 0$ ，

故$\{x_n\}$单调减少，且有下界。所以$\{x_n\}$收敛。

（2）设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$， 在$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$两边同时取极限得

$$l = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(x_n + \frac{a}{x_n}) = \frac{1}{2}(l + \frac{a}{l}),$$

解之得$l = \sqrt{a}$，即$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$ 。

1-3 设$x_1 > 0, x_{n+1} = x_n{}^2 + x_n (n = 1,2,...)$，试计算$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + ... + \frac{1}{x_n+1})$。

**解** 由 $x_{n+1} = x_n(x_n+1)$知

$$\frac{1}{x_n+1} = \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{x_n^2}{x_{n+1}x_n} = \frac{x_{n+1}-x_n}{x_{n+1}x_n} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}},$$

于是

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \cdots + \frac{1}{x_n+1} \\ &= \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) + \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}}\right) = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{n+1}}. \end{aligned}$$

因为 $x_1 > 0$，则由 $x_{n+1} = x_n(x_n+1) > x_n > 0$ 知，数列$\{x_n\}$递增，从而$\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$递减，且有下界 0，所以数列$\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$收敛. 记 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n} = A$，若 $A \neq 0$，则由$\frac{1}{x_n+1} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}}$两边取极限知 $\frac{A}{1+\frac{1}{A}} = A - A$，这是不可能成立的，所以必然有 $A = 0$.

因此

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{x_1} - A = \frac{1}{x_1}.$$

1-4 设$x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{3(1+x_n)}{3+x_n} (n = 1,2,...)$，求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$。

**解 方法1** 易知 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$，若极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，记 $a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，由极限的保号性知 $a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\geqslant 0$. 再对 $x_{n+1}=\dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}$ 两边取极限知

$$a=\frac{3(1+a)}{3+a},$$

解得 $a=\sqrt{3}$.

往证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{3}$. 事实上

$$|x_n-\sqrt{3}|=\left|\frac{3(1+x_{n-1})}{3+x_{n-1}}-\sqrt{3}\right|=\frac{(3-\sqrt{3})|x_{n-1}-\sqrt{3}|}{3+x_{n-1}}$$
$$\leqslant\frac{3-\sqrt{3}}{3}|x_{n-1}-\sqrt{3}|\leqslant\cdots\leqslant\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)^{n-1}|x_1-\sqrt{3}|,$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}\right)^{n-1}=0$，由夹逼定理知，$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-\sqrt{3}|=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{3}$.

**方法2** 前同方法1. 再证 $\{x_n\}$ 收敛.

(1) 当 $0<x_1\leqslant\sqrt{3}$ 时，设 $0<x_n\leqslant\sqrt{3}$，则

$$0<x_{n+1}=\frac{3(1+x_n)}{3+x_n}=3-\frac{6}{3+x_n}\leqslant 3-\frac{6}{3+\sqrt{3}}=\sqrt{3},$$

则 $\{x_n\}$ 有上界.

又 $x_{n+1}-x_n=\dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}-x_n=\dfrac{3-x_n^2}{3+x_n}\geqslant 0$，即 $\{x_n\}$ 单调增加. 因此，$\{x_n\}$ 单调增加有上界，所以 $\{x_n\}$ 收敛.

(2) 当 $x_1>\sqrt{3}$ 时，设 $x_n>\sqrt{3}$，则

$$x_{n+1}=\frac{3(1+x_n)}{3+x_n}=3-\frac{6}{3+x_n}\geqslant 3-\frac{6}{3+\sqrt{3}}=\sqrt{3},$$

即 $\{x_n\}$ 有下界.

又 $x_{n+1}-x_n=\dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}-x_n=\dfrac{3-x_n^2}{3+x_n}<0$，即 $\{x_n\}$ 单调减少. 因此，$\{x_n\}$ 单调减少有下界，所以 $\{x_n\}$ 收敛.

**方法3** 前同方法1. 再证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{3}$. 事实上，由 $\{x_n\}$ 的通项公式容易得出

$$\frac{x_n-\sqrt{3}}{x_n+\sqrt{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\cdot\frac{x_{n-1}-\sqrt{3}}{x_{n-1}+\sqrt{3}}.$$

记 $y_n=\dfrac{x_n-\sqrt{3}}{x_n+\sqrt{3}}$，$n=1,2,\cdots$，则 $y_n=qy_{n-1}$，$n=2,3,\cdots$，其中 $q=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$. 于是，$\{y_n\}$ 是公比为 $q$ 的等比数列，由于 $0<q<1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$. 从而

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{3}\,\frac{1+y_n}{1-y_n}=\sqrt{3}.$$

**注** 在方法3中，因为 $\dfrac{x_n-\sqrt{3}}{x_n+\sqrt{3}}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\cdot\dfrac{x_{n-1}-\sqrt{3}}{x_{n-1}+\sqrt{3}}$，所以易知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x_n-\sqrt{3}}{x_n+\sqrt{3}}$ 绝对收敛，从而由级数收敛的必要条件知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-\sqrt{3}}{x_n+\sqrt{3}}=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{3}$.

1-5 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2\sin^2 n+\cos^2 n}$ 。

解、因为 $1\leqslant a_n\leqslant\sqrt[n]{2}$，所以 $a_n\to 1(n\to\infty)$.

1-6 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+b^n+(b^2/2)^n}\,(b>0)$ 。

解、(i) 若 $b\leqslant 1$，则 $1<a_n\leqslant\sqrt[n]{2}$. 故 $a_n\to 1(n\to\infty)$.

(ii) 若 $b>1$，则 $a_n=b\cdot\sqrt[n]{1+1/b^n}$. 故 $a_n\to b(n\to\infty)$.

1-7　设 $a_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}(x>0)$，求 $\lim_{n\to\infty}a_n$。

解、因为我们有

$$\frac{1}{n^2}\left(x+\frac{n(n+1)}{2}\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(nx+k)\leqslant a_n\leqslant\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(nx+k+1)$$

$=\frac{1}{n^2}\left(x+\frac{n(n+1)}{2}+n\right)$，所以得到 $\lim_{n\to\infty}a_n=1/2$.

1-8　求不等于 $0$ 的数 $\lambda$，使得 $I=\lim_{n\to\infty}n^{2005}/[n^{\lambda}-(n-1)^{\lambda}]=1/2006$。

解、易知，对 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\leqslant 1$，极限不存在.

现在，设 $\lambda>1$ 且记 $[\lambda]=k$，则 $k\geqslant 1$ 且有

$$1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^k\leqslant 1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\lambda}<1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k+1}.$$

由此知存在 $\alpha,\beta$，使得 $\alpha<n[1-(1-1/n)^{\lambda}]<\beta$，以及

$\alpha n^{\lambda-1}<n^{\lambda}[1-(1-1/n)^{\lambda}]<\beta n^{\lambda-1}$.

从而得：若 $\lambda-1<2005$，则 $I=+\infty$；

若 $\lambda-1>2005$，则 $I=0$. 最后，$\lambda=2006$，我们

有(用二项式展开) $I=1/2006$.

1-9　设 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=l$，证明：

（1）若 $\lim_{n\to\infty}n(a_n-a_{n-1})=0$，则 $\lim_{n\to\infty}a_n=l$；

（2）若 $\lim_{n\to\infty}a_n=l$，则 $I=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}k(a_k-a_{k-1})/n=0$。

证明 (1) 令 $b_n=a_n-a_{n-1}(n=2,3,\cdots)$，则得

$$\lim_{n\to\infty} nb_n=0,\qquad b_n+b_{n-1}+\cdots+b_1=a_n\qquad (令\ a_0=0).$$

$$a_n-\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}a_k=b_1+\cdots+b_n-\frac{b_1+(b_1+b_2)+\cdots+(b_1+b_2+\cdots+b_n)}{n+1}$$

$$=\frac{b_1+2b_2+\cdots+nb_n}{n}\cdot\frac{n}{n+1}\to 0\qquad (n\to\infty).$$

这说明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=l.$

(2) 因为 $\sum\limits_{k=2}^{n}k(a_k-a_{k-1})=-\sum\limits_{k=1}^{n}a_k+(n+1)a_n-a_1$，所以有

$$I=\lim_{n\to\infty}\left(-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{n}+\frac{n+1}{n}a_n-\frac{a_1}{n}\right)=-l+l-0=0.$$

1-10　求极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x^x)-\sin(a^x)}{a^{x^x}-a^{a^x}}(a>1)$。

解 (1) 记 $f(x)=\sin x, g(x)=a^x$，应用 Cauchy 中值公式，有

$$I=\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to a}\frac{\cos\xi}{a^{\xi}\ln a}\qquad (\xi 位于\ a^x\ 与\ a^a\ 之间).$$

由此即知 $I=\cos a^a/(a^{a^a}\cdot\ln a)$.

1-11　求极限 $I=\lim\limits_{n\to\infty}n[\arctan[\ln(n+1)]-\arctan(\ln n)]$。

(2) 记 $f(x)=\arctan(\ln x)$，则由 Lagrange 中值公式知

$$f(n+1)-f(n)=f'(\xi_n)=\frac{1}{(1+\ln^2\xi_n)\xi_n},\qquad n<\xi_n<n+1.$$

$$\frac{n}{[1+\ln^2(n+1)](n+1)}<nf'(\xi_n)=\frac{n}{(1+\ln^2\xi_n)\cdot\xi_n}<\frac{n}{(1+\ln^2 n)\cdot n}.$$

由此即知 $I=0$.

1-12　若有数组 $\{a_0,a_1,\cdots a_n\}$ 满足

$$\frac{a_0}{1}+\frac{2a_1}{2}+\frac{2^2a_2}{3}+\cdots+\frac{2^{n-1}a_{n-1}}{n}+\frac{2^na_n}{n+1}=0,$$

证明：$a_n\ln^n x+\cdots+a_2\ln^2 x+a_1\ln x+a_0$ 在 $(1,e^2)$ 内必有一个零点。

证明：作 $f(x)=\frac{a_0}{1}\ln x+\frac{a_1}{2}\ln^2 x+\frac{a_2}{3}\ln^3 x+\cdots+\frac{a_{n-1}}{n}\ln^n x+\frac{a_n}{n+1}\ln^{n+1}x$，

则 $f(1)=0$，且有 $f(e^2)=0$，从而知存在 $x_0\in(1,e^2)$，使得

$$0=f'(x_0)=\frac{1}{x_0}(a_n\ln^n x_0+\cdots+a_2\ln^2 x_0+a_1\ln x_0+a_0$$

1-13　设 $x^n+x=1$ 在 $(0,1)$ 中的根为 $a_n(n\in N)$，试证明：$a_n\to 1(n\to\infty)$。

证明 (i) 令 $F_n(x)=x^n+x-1$，则对任意的 $n\in N$，我们有

$$F_n(1)=1>0,\qquad F_n(1/2)=1/2^n+1/2-1\leqslant 0\quad (n\in N).$$

由此知存在 $a_n$，$1/2\leqslant a_n<1$，使得 $F_n(a_n)=0\ (n\in N)$. 因为在 $[1/2,1)$ 上，$F'_n(x)=nx^{n-1}+1>0$，所以 $F_n(x)$ 是严格递增的. 故 $F_n(x)=0$ 的根 $a_n$ 是唯一的. 由

$$F_n(x)-F_{n+1}(x)=x^n(1-x)>0\qquad(0<x<1),$$

可知 $F_n(x)>F_{n+1}(x)$，即 $a_{n+1}>a_n\ (n\in N)$. 这说明 $\{a_n\}$ 是递增有界列.

(ii) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，易知 $a=1$. 事实上，若 $a<1$，则存在 $N$ 以及 $\delta>0$，使得

$$a_n\leqslant(1-\delta)\qquad(n\geqslant N,\ 0<\delta<1).$$

从而得 $a_n^n\leqslant(1-\delta)^n\to0\ (n\to\infty)$. 因此就有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n^n+a_n-1)=a-1<0$. 但这与由 $a_n^n+a_n-1=0$ 导出的（令 $n\to\infty$）$a-1=0$ 矛盾. 即得所证.

1-14　$x_n=\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\dfrac{1}{\sqrt{k}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

解：因为 $x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}$，$\dfrac{2n+1}{\sqrt{(n+1)^2}}\leqslant x_n\leqslant\dfrac{2n+1}{\sqrt{n^2}}$，

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{\sqrt{n^2}}=2$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{\sqrt{(n+1)^2}}=2$，由夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

1-15　设 $a_i>0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^{\ n}+a_2^{\ n}+\cdots a_m^{\ n}}$。

解：设 $A=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{a_i\}$ $\sqrt[n]{A^n}\leqslant\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}\leqslant\sqrt[n]{nA^n}$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{A^n}=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{nA^n}=A$，由夹逼准则得：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=A$$

1-16　求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的和，其中 $a_1=1$，$a_{n+1}=1/(a_1+a_2+\cdots+a_n)-\sqrt{2}$。

解　记 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，则

$$S_{n+1}=S_n+a_{n+1}=S_n+\frac{1}{S_n}-\sqrt{2}\qquad(n=1,2,\cdots).$$

考察函数 $f(x)=x+1/x-\sqrt{2}\ (x>0)$. 若 $S_n\to S\ (n\to\infty)$，则有 $f(S)=S$，且 $S=1/\sqrt{2}$ 为此方程的唯一解. 由于 $f[f(x)]-x$ 在 $(1/\sqrt{2},1)$ 上是递减函数，故知

$$f[f(x)]-x<f[f(1/\sqrt{2})]-1/\sqrt{2}=0.$$

因为 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上递减，所以 $f[f(x)]>1/\sqrt{2}\left(x\in\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},1\right)\right)$. 从而得

$$\frac{1}{\sqrt{2}}<f[f(x)]<x\qquad\left(\frac{1}{\sqrt{2}}<x<1\right).$$

即 $\{S_{2n-1}\}$ 有下界，且 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n-1}=1/\sqrt{2}$. 此外又有

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}f(S_{2n-1})=f(1/\sqrt{2})=1/\sqrt{2}.$$

这说明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=1/\sqrt{2}.$

1-17 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{(1-\sqrt{\sin x})(1-\sqrt[3]{\sin x})\cdots(1-\sqrt[n]{\sin x})}{(1-\sin x)^{n-1}}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sqrt{\sin x})(1-\sqrt[3]{\sin x})\cdots(1-\sqrt[n]{\sin x})}{(1-\sin x)^{n-1}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sqrt{1+\sin x-1})\cdots(1-\sqrt[n]{1+\sin x-1})}{(1-\sin x)^{n-1}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{[-\frac{1}{2}(\sin x-1)]\cdots[-\frac{1}{n}(\sin x-1)]}{(1-\sin x)^{n-1}}=\frac{1}{n!}.$$

1-18 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos\alpha x\cdot\arctan\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}}{\ln(1-2x)\cdot\ln\cos\beta x}$。

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos\alpha x-1)\cdot\arctan\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}}{\ln(1-2x)\cdot\ln(1+\cos\beta x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos\alpha x-1)\cdot\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}}{-2x\cdot(\cos\beta x-1)}$$

$$=-\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\cos\alpha x-1}{\cos\beta x-1}=-\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{-(\alpha x)^2/2}{-(\beta x)^2/2}=-\frac{1}{4}\frac{\alpha^2}{\beta^2}.$$

1-19 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n})$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(1+\tan\frac{2}{n})^n}{(1-\tan\frac{2}{n})^n}\right)=e^4.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\tan\frac{2}{n})^n=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\tan\frac{2}{n})^{\frac{1}{\tan\frac{2}{n}}\cdot\tan\frac{2}{n}\cdot n}=e^2$,

$\lim\limits_{n\to\infty}(1-\tan\frac{2}{n})^n=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\tan\frac{2}{n})^{\frac{-1}{\tan\frac{2}{n}}\cdot(-\tan\frac{2}{n})\cdot n}=e^{-2}$.

1-20 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$

因为 $\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=\sin(n\pi+\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi)$

$=\sin[n\pi+\pi(\sqrt{n^2+1}-n)]=(-1)^n\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$.

所以 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=0$.

1-21 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[x]{a_1}+\sqrt[x]{a_2}+\cdots+\sqrt[x]{a_n}}{n}\right)(a_i>0)$

$$=\lim_{x\to+\infty}e^{x\ln\frac{\sqrt[x]{a_1}+\sqrt[x]{a_2}+\cdots+\sqrt[x]{a_n}}{n}}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\dfrac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\overset{\frac{1}{x}=t}{=\!=\!=}\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\ln(a_1^t+a_2^t+\cdots+a_n^t)-\ln n}{t}$

1-22 设 $x_1=4$， $x_n=\dfrac{1}{x_{n-1}}+\dfrac{x_{n-1}}{2}$， 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

解：$x_n=\frac{1}{x_{n-1}}+\frac{x_{n-1}}{2}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{x_{n-1}}\frac{x_{n-1}}{2}}=\sqrt{2}$，

$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{x_n}+\frac{x_n}{2}-x_n=\frac{2-x_n^2}{2x_n}\leqslant\frac{2-\sqrt{2}^2}{2x_n}=0$，

所以，$x_n\geqslant x_{n+1}$，即 $x_n$ 单调减少，且有下界，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在。

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{x_{n-1}}+\frac{x_{n-1}}{2})$，得 $\frac{1}{a}+\frac{a}{2}=a$，则 $a=\sqrt{2}$。

1-23　设 $f_n(x)=\sqrt[n]{\mathbf{1}+x^n+(\frac{x^2}{\mathbf{2}})^n}$，　$x\geq\mathbf{0}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$。

解：当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，有：

$$1\leqslant f_n(x)\leqslant\sqrt[n]{3}$$

则：

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=1$$

当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，有：

$$f_n(x)=x\cdot\sqrt[n]{\frac{1}{x^n}+1+(\frac{x}{2})^n},\ x\leqslant f_n(x)\leqslant x\cdot\sqrt[n]{3}$$

则：

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=x$$

当 $x\geqslant 2$ 时，有：

$$f_n(x)=\frac{x^2}{2}\cdot\sqrt[n]{(\frac{2}{x^2})^n+(\frac{2}{x})^n+1},\ \frac{x^2}{2}\leqslant f_n(x)\leqslant\frac{x^2}{2}\cdot\sqrt[n]{3}$$

则：

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\frac{x^2}{2}$$

故：

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x, & 1<x\leqslant 2\\ x^2/2, & x>2\end{cases}$$

1-24　已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(\mathbf{1}+x)}{\cos\dfrac{\pi}{\mathbf{2}}x}, x\leq\mathbf{0}\\ \sin\dfrac{\pi}{x^2-\mathbf{4}}, x>\mathbf{0}\end{cases}$，求 $f(x)$ 的间断点，并说明其类型。

解：可能的间断点：分段点 $x=0$，$f(0^+)=\sin\frac{\pi}{-4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$f(0^-)=0$，

所以 $x=0$ 是第一类间断点。

当 $x<0$ 时，使 $\cos\frac{\pi}{2}x=0$，$x=-1,-3,\cdots$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x(1+x)}{\cos\frac{\pi}{2}x}=-\lim_{x\to -1}\frac{1+x}{\cos\frac{\pi}{2}x}=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to -1}\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}x}=-\frac{2}{\pi},$$

所以 $x=-1$ 为第一类间断点，且可去间断点。

$\lim\limits_{x\to -3}\frac{x(1+x)}{\cos\frac{\pi}{2}x}$ 不存在，$x=-3$ 为第二类间断点，

$x=-3,-5,\cdots-(2n+1)\cdots$ 为第二类间断点，

当时 $x>0$，$x=2$ 无定义，$\lim\limits_{x\to 2}\sin\frac{\pi}{x^2-4}$ 不存在，为第二类间断点。

# 二、一元函数微分学

（竞赛大纲）

1. 导数和微分的概念、导数的几何意义和物理意义、函数的可导性与连续性之间的关系、平面曲线的切线和法线.

2. 基本初等函数的导数、导数和微分的四则运算、一阶微分形式的不变性.

3. 复合函数、反函数、隐函数以及参数方程所确定的函数的微分法.

4. 高阶导数的概念、分段函数的二阶导数、某些简单函数的 n 阶导数.

5. 微分中值定理，包括罗尔定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理和泰勒定理.

6. 洛必达(L’Hospital)法则与求未定式极限.

7. 函数的极值、函数单调性、函数图形的凹凸性、拐点及渐近线(水平、铅直和斜渐近线)、函数图形的描绘.

8. 函数最大值和最小值及其简单应用.

9. 弧微分、曲率、曲率半径.

2-1　设函数 $f$ 具有一阶连续导数，$f''(0)$ 存在，且 $f'(0)=0$，$f(0)=0$，

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0.\end{cases}$$

（1）确定 $a$，使 $g(x)$ 处处连续；

（2）对以上所确定的 $a$，证明 $g(x)$ 具有一阶连续导数.

**解**：（1）因为若 $g(x)$ 处处连续，则 $g(x)$ 在 $x=0$ 处连续．于是 $f(0)=0$，且

$$a=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=0.$$

（2）因 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\frac{1}{2}f''(0)$$

于是 $$g'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}, & x\neq 0,\\ \dfrac{1}{2}f''(0), & x=0,\end{cases}$$

显然，当 $x\neq 0$ 时，$g'(x)$ 连续，当 $x=0$ 时，因为

$$\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f'(x)}{x}-\frac{f(x)}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$$
$$=f''(0)-\frac{1}{2}f''(0)=\frac{1}{2}f''(0)=g'(0)$$

所以 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，故 $g(x)$ 具有一阶连续导数.

2-2　设 $f(x)$ 在 $x=\mathbf{0}$ 的邻域具有二阶导数，且 $\lim\limits_{x\to\mathbf{0}}\left[\mathbf{1}+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{\mathbf{1}}{x}}=e^{\mathbf{3}}$，试求 $f(\mathbf{0})$，$f'(\mathbf{0})$ 及 $f''(\mathbf{0})$.

[解] $\lim\limits_{x\to 0}[1+x+\dfrac{f(x)}{x}]^{\frac{1}{x}}=e^3\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[1+x+\frac{f(x)}{x}]}{x}=3\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\ln[1+x+\dfrac{f(x)}{x}]=0$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)\Rightarrow f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$

由等价无穷小得

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\frac{f(x)}{x}}{x}=3\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{2x}=2\Rightarrow f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=4$

（或由泰勒公式得

$f(x)=\dfrac{1}{2}f''(0)x^2+0(x^2)(x\to 0)\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}[\dfrac{1}{2}f''(0)+\dfrac{0(x^2)}{x^2}]=2\Rightarrow f''(0)=4$）

2-3　设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处有定义，$f(0)=1$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)+\sin x\cdot f(x)}{e^{x^2}-1}=0$。证明：函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，并求 $f'(0)$。

证 由已知条件，知

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)+\sin x\cdot f(x)}{e^{x^2}-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{[\ln(1-x)+x]+\sin x[f(x)-1]+[\sin x-x]}{x^2},$$

其中

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)+x}{x^2}=-\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}=0,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x[f(x)-1]}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x},$$

故

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=\frac{1}{2},$$

即

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{1}{2}.$$

所以，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=\frac{1}{2}$.

2-4 设函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}(x>0)$，证明：存在常数 A、B，使得当 $x\to 0^+$ 时，恒有 $f(x)=e+Ax+Bx^2+o(x^2)$，并求常数 A、B。

证 先将函数 $f(x)$ 展开为带佩亚诺(Peano)余项的二阶麦克劳林(Maclaurin)公式，得

$$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$$

$$=e^{\frac{1}{x}\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right]}=e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)}$$

$$=e\cdot e^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)}$$

$$=e\cdot\left[1+\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right)^2+o(x^2)\right]$$

$$=e\cdot\left[1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{1}{2!}\frac{x^2}{4}+o(x^2)\right]=e-\frac{e}{2}x+\frac{11}{24}ex^2+o(x^2).$$

由此得 $A=-\frac{e}{2}, B=\frac{11}{24}e.$

2-5 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内二阶可导，且 $f''(x)\neq 0$。

（1）证明：对于任何非零实数 $x$，存在唯一的 $\theta(x)(0<\theta(x)<1)$，使得

$$f(x)=f(0)+xf'(x\theta(x))。$$

（2）求 $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)$ 。

证 (1) 对于任何非零实数 $x$，由拉格朗日中值定理知，存在 $\theta(x)$ ($0<\theta(x)<1$)，使得

$$f(x)=f(0)+xf'(x\theta(x)).$$

如果这样的 $\theta(x)$ 不唯一，则存在 $\theta_1(x)$ 与 $\theta_2(x)$ ($\theta_1(x)<\theta_2(x)$)，使得 $f'(x\theta_1(x))=f'(x\theta_2(x))$，由罗尔定理，存在一点 $\xi$，使得 $f''(\xi)=0$. 这与 $f''(x)\neq 0$ 矛盾，所以 $\theta(x)$ 是唯一的.

(2) 因为 $f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x\theta(x))-f'(0)}{x\theta(x)}$，且

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x\theta(x))-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)-f(0)}{x}-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)-xf'(0)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{f''(0)}{2},$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$.

2-6 求使不等式 $(1+\frac{1}{n})^{n+\alpha}\le e\le(1+\frac{1}{n})^{n+\beta}$ 对所有的自然数 $n$ 都成立的最大的数 $\alpha$ 和最小的数 $\beta$ 。

解 已知不等式等价于

$$(n+\alpha)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leqslant 1\leqslant (n+\beta)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

所以

$$\alpha\leqslant\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-n\leqslant\beta.$$

令 $f(x)=\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}, x\in[0,1]$，则

$$f'(x)=-\frac{\frac{1}{1+x}}{\ln^2(1+x)}+\frac{1}{x^2}=\frac{(1+x)\ln^2(1+x)-x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}.$$

再令 $g(x)=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2, x\in[0,1]$，则 $g(0)=0$，且

$$g'(x)=\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)-2x,\quad g'(0)=0,$$

$$g''(x)=\frac{2\ln(1+x)}{1+x}+\frac{2}{1+x}-2=\frac{2[\ln(1+x)-x]}{1+x}<0,$$

故 $g'(x)$ 在 $[0,1]$ 上严格单调递减，所以 $g'(x)<g'(0)=0$. 同理，$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上也严格单调递减，故 $g(x)<g(0)=0$，即 $(1+x)\ln^2(1+x)-x^2<0$，从而 $f'(x)<0(0<x\leqslant 1)$，因此 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上也严格单调递减.

令 $x=\frac{1}{n}$，则 $\alpha\leqslant f(x)\leqslant\beta$，

$$\max\alpha=\lim_{x\to 1^-}\left[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right]=\frac{1}{\ln 2}-1,$$

$$\min\beta=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x+(1+x)\ln(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+\ln(1+x)+1}=\frac{1}{2}.$$

因此，使不等式对所有的自然数 $n$ 都成立的最大的数 $\alpha$ 为 $\frac{1}{\ln 2}-1$，最小的数 $\beta$ 为 $\frac{1}{2}$.

2-7 设 $x_1>0, x_{n+1}=x_n^2+x_n (n=1,2,\ldots)$，试计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\ldots+\frac{1}{x_n+1}\right)$。

**解** 由 $x_{n+1}=x_n(x_n+1)$ 知

$$\frac{1}{x_n+1}=\frac{x_n}{x_{n+1}}=\frac{x_n^2}{x_{n+1}x_n}=\frac{x_{n+1}-x_n}{x_{n+1}x_n}=\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n+1}},$$

于是

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\cdots+\frac{1}{x_n+1}\\&=\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)+\left(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n+1}}\right)=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_{n+1}}.\end{aligned}$$

因为 $x_1>0$，则由 $x_{n+1}=x_n(x_n+1)>x_n>0$ 知，数列 $\{x_n\}$ 递增，从而 $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ 递减，且有下界 0，所以数列 $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ 收敛. 记 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=A$，若 $A\neq 0$，则由 $\frac{1}{x_n+1}=\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n+1}}$ 两边取极限知 $\frac{A}{1+\frac{1}{A}}=A-A$，这是不可能成立的，所以必然有 $A=0$.

因此

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_n}\right)=\frac{1}{x_1}-A=\frac{1}{x_1}.$$

2-8　设 $x_1>0,x_{n+1}=\frac{3(1+x_n)}{3+x_n}(n=1,2,\ldots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

**解　方法 1**　易知 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$，若极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，记 $a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，由极限的保号性知 $a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\geqslant 0$. 再对 $x_{n+1}=\frac{3(1+x_n)}{3+x_n}$ 两边取极限知

$$a=\frac{3(1+a)}{3+a}.$$

解得 $a=\sqrt{3}$.

往证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{3}$. 事实上

$$\begin{aligned}|x_n-\sqrt{3}|&=\left|\frac{3(1+x_{n-1})}{3+x_{n-1}}-\sqrt{3}\right|=\frac{(3-\sqrt{3})|x_{n-1}-\sqrt{3}|}{3+x_{n-1}}\\&\leqslant\frac{3-\sqrt{3}}{3}|x_{n-1}-\sqrt{3}|\leqslant\cdots\leqslant\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)^{n-1}|x_1-\sqrt{3}|,\end{aligned}$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)^{n-1}=0$，由夹逼定理知，$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-\sqrt{3}|=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{3}$.

**方法 2**　前同方法 1. 再证 $\{x_n\}$ 收敛.

(1) 当 $0<x_1\leqslant\sqrt{3}$ 时，设 $0<x_n\leqslant\sqrt{3}$，则

$$0<x_{n+1}=\frac{3(1+x_n)}{3+x_n}=3-\frac{6}{3+x_n}\leqslant 3-\frac{6}{3+\sqrt{3}}=\sqrt{3},$$

则 $\{x_n\}$ 有上界.

又 $x_{n+1}-x_n=\frac{3(1+x_n)}{3+x_n}-x_n=\frac{3-x_n^2}{3+x_n}\geqslant 0$，即 $\{x_n\}$ 单调增加. 因此，$\{x_n\}$ 单调增加有上界，所以 $\{x_n\}$ 收敛.

(2) 当 $x_1>\sqrt{3}$ 时，设 $x_n>\sqrt{3}$，则

$$x_{n+1}=\frac{3(1+x_n)}{3+x_n}=3-\frac{6}{3+x_n}\geqslant 3-\frac{6}{3+\sqrt{3}}=\sqrt{3},$$

即 $\{x_n\}$ 有下界.

又 $x_{n+1}-x_n=\frac{3(1+x_n)}{3+x_n}-x_n=\frac{3-x_n^2}{3+x_n}<0$，即 $\{x_n\}$ 单调减少. 因此，$\{x_n\}$ 单调减少有下界，所以 $\{x_n\}$ 收敛.

**方法 3** 前同方法 1. 再证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{3}$. 事实上，由$\{x_n\}$的通项公式容易得出

$$\frac{x_n-\sqrt{3}}{x_n+\sqrt{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\cdot\frac{x_{n-1}-\sqrt{3}}{x_{n-1}+\sqrt{3}}.$$

记 $y_n=\frac{x_n-\sqrt{3}}{x_n+\sqrt{3}}$，$n=1,2,\cdots$，则 $y_n=qy_{n-1}$，$n=2,3,\cdots$，其中 $q=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$. 于是，$\{y_n\}$是公比为 $q$ 的等比数列，由于 $0<q<1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$. 从而

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{3}\,\frac{1+y_n}{1-y_n}=\sqrt{3}.$$

**注** 在方法 3 中，因为 $\frac{x_n-\sqrt{3}}{x_n+\sqrt{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\cdot\frac{x_{n-1}-\sqrt{3}}{x_{n-1}+\sqrt{3}}$，所以易知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x_n-\sqrt{3}}{x_n+\sqrt{3}}$ 绝对收敛，从而由级数收敛的必要条件知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-\sqrt{3}}{x_n+\sqrt{3}}=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{3}$.

2-9 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导，且 $f(a)f(b)>0$，$f(a)f(\frac{a+b}{2})<0$，证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=f(\xi)$。

**证** 因为函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续，$f(a)f(b)>0$，$f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$，故 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)f(b)<0$，则由零点定理知，至少存在点 $x_1\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$ 及 $x_2\in\left(\frac{a+b}{2},b\right)$，使得 $f(x_1)=0$，$f(x_2)=0$.

作辅助函数 $F(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$，则 $F(x)$ 在$[x_1,x_2]$上可导，且 $F'(x)=\mathrm{e}^{-x}[f'(x)-f(x)]$，因为 $F(x_1)=F(x_2)=0$，由罗尔定理知，存在点 $\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，从而 $f'(\xi)=f(\xi)$.

2-10 设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，在$(a,b)$内二阶可导，且$|f''(x)|\geq m>0$，$m$ 为常数，又 $f(a)=f(b)=0$，证明：$\max\limits_{a\leq x\leq b}|f(x)|\geq\frac{m}{8}(b-a)^2$。

**证** (1) 因函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，则$|f(x)|$在$[a,b]$上连续，故存在 $x_0\in[a,b]$，使

$$\max_{a\leq x\leq b}|f(x)|=|f(x_0)|.$$

由于 $f(a)=f(b)=0$，且 $f(x)$ 在$[a,b]$上不是常数，故 $x_0\neq a$，$x_0\neq b$，即 $x_0\in(a,b)$. 从而，$f(x)$ 在点 $x_0$ 处取得极值，因此 $f'(x_0)=0$. 由泰勒公式，$\forall x\in(a,b)$，恒有

$$f(x)=f(x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2,$$

其中 $\xi$ 在 $x$ 与 $x_0$ 之间，故

$$|f(x_0)-f(x)|\geqslant \frac{m}{2}(x-x_0)^2.$$

分别令 $x=a$ 和 $x=b$，利用 $f(a)=f(b)=0$，得

$$|f(x_0)|\geqslant \frac{m}{2}(x_0-a)^2,\quad |f(x_0)|\geqslant \frac{m}{2}(b-x_0)^2,$$

从而，$|f(x_0)|\geqslant \max\left\{\frac{m}{2}(x_0-a)^2,\frac{m}{2}(b-x_0)^2\right\}\geqslant \frac{m}{8}(b-a)^2$.

2-11　设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可微，且存在常数：$k_1,b_1,k_2,b_2(k_1<k_2)$，使得

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(k_1x+b_1)]=0,\quad \lim_{x\to+\infty}[f(x)-(k_2x+b_2)]=0,$$

则对任意的 $k\in(k_1,k_2)$，存在 $\xi$，使得 $f'(\xi)=k$。

(2) 由题设知 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k_1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k_2$，从而可得

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)-f(0)}{x}=k_1,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(0)}{x}=k_2.$$

因此，对 $k_1<k<k_2$，存在 $x_1<0$，$x_2>0$，使得

$$\frac{f(x_1)-f(0)}{x_1}<k,\quad \frac{f(x_2)-f(0)}{x_2}>k.$$

直接验证（Lagrange 中值公式），存在 $x_1<\xi_1<0$，$0<\xi_2<x_2$，使得 $f'(\xi_1)<k$，$f'(\xi_2)>k$。从而由导函数的中值性可知，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$，使得 $f'(\xi)=k$。

2-12　设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $g'(x)\neq 0(x\in[a,b])$，则函数 $f'(x)/g'(x)$ 可取到 $f'(a)/g'(a)$ 与 $f'(b)/g'(b)$ 之间的一切值。

(3) 不妨假定 $\lambda$：$f'(a)/g'(a)<\lambda<f'(b)/g'(b)$，且作函数 $F(x)=f(x)-\lambda g(x)$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导. 又有

$$F'(a)=f'(a)-\lambda g'(a)<0,\quad F'(b)=f'(b)-\lambda g'(b)>0.$$

从而根据导函数的中值性可知，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$0=F'(\xi)=f'(\xi)-\lambda g'(\xi),\quad f'(\xi)/g'(\xi)=\lambda.$$

2-13　设 $p>1,q>1$，且 $1/p+1/q=1$，则 $ab\leq\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}(a>0,b>0)$。

(2) 视 $b$ 为变量，作函数

$$f(x)=\frac{a^p}{p}+\frac{x^q}{q}-ax\quad (x>0).$$

由 $f'(x)=x^{q-1}-a$ 可知，当 $x=x_0=a^{1/(q-1)}$ 时，$f'(x_0)=0$. 注意到

$$f'(x)<0(x<x_0),\quad f'(x)>0(x>x_0),$$

$f(x_0)$ 是最小值，$f(x_0)=\frac{a^p}{p}+\frac{1}{q}a^{q/(q-1)}-a^{q/(q-1)}=\frac{a^p}{p}+\frac{a^p}{q}-a^p=0$. 这说明 $f(x)\geqslant 0(x>0)$，即对任意的 $b>0$，$f(b)\geqslant 0$.

2-14　已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上三阶可导，且 $f(0)=-1, f(1)=0, f'(0)=0$，证明：$\forall x\in(0,1), \exists\xi\in(0,1),$ 使 $f(x)=-1+x^2+\frac{x^2(x-1)}{3!}f'''(\xi)$。

证　$\forall x\in(0,1)$，作函数 $g(t)=f(t)+1-t^2-\dfrac{f(x)+1-x^2}{x^2(x-1)}t^2(t-1)$，

$t\in[0,1]$. 因为函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上三阶可导，$f(0)=-1$，$f(1)=0$，故 $g(x)=g(0)=g(1)=0$，从而 $\exists\,\xi_1\in(0,x)$，$\xi_2\in(x,1)$，使得 $g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0$，且 $0<\xi_1<x<\xi_2<1$，同时

$$g'(t)=f'(t)-2t-\frac{f(x)+1-x^2}{x^2(x-1)}(3t^2-2t),$$

由 $f'(0)=0$ 知，$g'(0)=0$. 由 $g'(0)=g'(\xi_1)=0$ 知，$\exists\,\eta_1\in(0,\xi_1)$，使得 $g''(\eta_1)=0$；由 $g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0$ 和 $\xi_1<\xi_2$ 知，$\exists\,\eta_2\in(\xi_1,\xi_2)$，使得 $g''(\eta_2)=0$；再由 $g''(\eta_1)=g''(\eta_2)=0$ 知，$\exists\,\xi\in(\eta_1,\eta_2)$，使得 $g'''(\xi)=0$.

又
$$g''(t)=f''(t)-2-\frac{f(x)+1-x^2}{x^2(x-1)}(6t-2),$$
$$g'''(t)=f'''(t)-6\,\frac{f(x)+1-x^2}{x^2(x-1)},$$

由 $g'''(\xi)=0$，得 $f'''(\xi)=6\,\dfrac{f(x)+1-x^2}{x^2(x-1)}$，即 $f(x)=-1+x^2+\dfrac{x^2(x-1)}{3!}f'''(\xi)$.

2-15　设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且满足 $|f''(x)|\le 1$，$f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内取得最大值 $\frac{1}{4}$。证明：$|f(0)|+|f(1)|\le 1$。

证　设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内点 $x_0$ 处取得最大值 $\dfrac{1}{4}$，则 $f'(x_0)=0$. 由泰勒公式知

$$f(0)=f(x_0)-f'(x_0)x_0+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x_0^2,\quad 0<\xi_1<x_0,$$

$$f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2,\quad x_0<\xi_2<1.$$

因为 $|f''(x)|\leqslant 1$，所以

$$|f(0)|+|f(1)|\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2}[x_0^2+(1-x_0)^2].$$

又当 $0<x_0<1$ 时，$x_0^2+(1-x_0)^2=2\left(x_0-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}\leqslant 1$，所以，结论成立.

2-16　设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内二阶可导，且 $f(x)$ 和 $f''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，证明：$f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界。

证　依题意，存在正常数 $M_0, M_2$，使得 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$，恒有

$$|f(x)| \leqslant M_0, \quad |f''(x)| \leqslant M_2.$$

由泰勒公式，有

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2!}f''(\xi), \quad \text{其中 } \xi \text{ 介于 } x \text{ 与 } x+1 \text{ 之间},$$

整理得 $f'(x) = f(x+1) - f(x) - \frac{1}{2}f''(\xi)$，所以，

$$|f'(x)| \leqslant |f(x+1)| + |f(x)| + \frac{1}{2}|f''(\xi)| \leqslant 2M_0 + \frac{M_2}{2}.$$

所以，函数 $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界.

2-17　设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内三阶可导，且 $f(x)$ 和 $f'''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，证明：　$f'(x)$ 和 $f''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界。

证　依题意，存在正常数 $M_0, M_3$，使得 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$，恒有

$$|f(x)| \leqslant M_0, \quad |f'''(x)| \leqslant M_3.$$

由泰勒公式，有

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2!}f''(x) + \frac{1}{3!}f'''(\xi), \text{其中 } \xi \text{ 介于 } x \text{ 与 } x+1 \text{ 之间},$$

$$f(x-1) = f(x) - f'(x) + \frac{1}{2!}f''(x) - \frac{1}{3!}f'''(\eta), \text{其中 } \eta \text{ 介于 } x \text{ 与 } x-1 \text{ 之间},$$

上述两式相加，整理得

$$f''(x) = f(x+1) - 2f(x) + f(x-1) - \frac{1}{6}[f'''(\xi) - f'''(\eta)],$$

所以，

$$|f''(x)| \leqslant |f(x+1)| + 2|f(x)| + |f(x-1)| + \frac{1}{6}[|f'''(\xi)| + |f'''(\eta)|]$$

$$\leqslant 4M_0 + \frac{M_3}{3}.$$

再由两式相减，整理得

$$f'(x) = \frac{1}{2}[f(x+1) - f(x-1)] - \frac{1}{6}[f'''(\xi) + f'''(\eta)],$$

所以，

$$|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}[|f(x+1)| + |f(x-1)|] + \frac{1}{6}[|f'''(\xi)| + |f'''(\eta)|]$$

$$\leqslant M_0 + \frac{M_3}{3}.$$

综上所述，函数 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界.

2-18　设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有二阶导数，并且 $|f(x)| \le M_0$，$|f''(x)| \le M_2$，$-\infty < x < +\infty$。证明：$|f'(x)| \le \sqrt{2M_0M_2}$，$-\infty < x < +\infty$。

**证** 由泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2,\quad \xi \text{介于} x_0 \text{与} x \text{之间}.$$

任取 $h>0$，分别令 $x=x_0-h$ 与 $x_0+h$，那么

$$f(x_0-h)=f(x_0)-f'(x_0)h+\frac{f''(\xi_1)}{2!}h^2,\quad x_0-h<\xi_1<x_0,$$

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(\xi_2)}{2!}h^2,\quad x_0<\xi_2<x_0+h,$$

于是，由以上两式得

$$2f'(x_0)h=f(x_0+h)-f(x_0-h)+\left[\frac{f''(\xi_1)}{2!}-\frac{f''(\xi_2)}{2!}\right]h^2,$$

从而由题设条件知

$$|f'(x_0)|h\leqslant M_0+\frac{M_2}{2}h^2.$$

如果 $M_2=0$，则 $|f'(x_0)|\leqslant\frac{M_0}{h}(h>0)$，令 $h\to+\infty$，得 $f'(x_0)=0$.

如果 $M_2>0$，则二次三项式 $M_2h^2-|f'(x_0)|h+2M_0\geqslant0(h>0)$，故其判别式

$$|f'(x_0)|^2-2M_0M_2\leqslant0.$$

由此得不等式 $|f'(x_0)|\leqslant\sqrt{2M_0M_2}$，其中 $x_0$ 为任意实数.

2-19　设 $0<a<b$，证明：不等式 $\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$ 成立。

**证** 原不等式等价于

$$\frac{2\left(\frac{b}{a}-1\right)}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}<\ln\frac{b}{a}<\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

对于右边的不等式，令$\sqrt{\frac{b}{a}}=t>1$，只需考虑 $\ln t^2<t-\frac{1}{t}, t>1$.

移项构造辅助函数，令 $f(t)=\ln t^2-t+\frac{1}{t}(t\geqslant 1)$，则 $f(1)=0$，且

$$f'(t)=\frac{2}{t}-1-\frac{1}{t^2}=-\frac{t^2-2t+1}{t^2}=-\frac{(t-1)^2}{t^2}<0,$$

从而 $f(t)$在$[1,+\infty)$上单调递减，故当 $t>1$ 时，$f(t)<f(1)=0$，即右侧不等式成立.

再考虑左边的不等式，下面用 3 种方法进行证明.

**方法1** 令 $\frac{b}{a}=t>1$，左侧不等式变为 $\ln t>\frac{2(t-1)}{1+t^2}$. 移项构造辅助函数，令

$$g(t)=(1+t^2)\ln t-2(t-1),\quad t\geqslant 1,$$

则 $g(1)=0$，且 $g'(t)=2t\ln t+\left(\frac{1}{t}+t\right)-2\geqslant 2t\ln t>0$（注意这里用到均值不等式$\frac{1}{t}+t-2>0$），于是 $g(t)$在$[1,+\infty)$上单调递增，从而当 $t>1$ 时，$g(t)>$

$g(1)=0$，即左侧不等式成立.

**方法 2**　取一个参数(例如 $b$)为变量，令

$$h(x)=(a^2+x^2)(\ln x-\ln a)-2x(x-a),\quad x\geqslant a>0,$$

则 $h(a)=0$，$h'(x)=2x(\ln x-\ln a)+\dfrac{1}{x}(a^2+x^2)-2a>2x\cdot\ln\dfrac{x}{a}+\dfrac{1}{x}\cdot 2ax-2a>0$，于是 $h(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调递增，从而当 $x>a$ 时，$h(x)>h(a)=0$，即左侧不等式成立.

**方法 3**　由拉格朗日中值定理得

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=\frac{1}{\xi},\quad a<\xi<b,$$

注意到 $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{\xi}>\dfrac{1}{b}$，则由平均值不等式得到

$$\frac{1}{\xi}>\frac{1}{b}>\frac{1}{b}\cdot\frac{2ab}{a^2+b^2}=\frac{2a}{a^2+b^2},$$

即左侧不等式成立.

**注**　(1) 考虑等式或不等式证明问题时，一般说来都是先将所给表达式变形，构造合适的辅助函数，再根据题目的要求，研究辅助函数的连续性及零点、单调性，或最大、最小值等. 涉及的知识点包括：极限与连续函数的性质、微分中值定理、积分性质和泰勒公式等.

(2) 常用方法

① 初(终)值加单调性分析法：若 $\forall x\in[a,b]$，$f'(x)>0$，则当 $f(a)=0$ 时，$f(x)>0$；当 $f(b)=0$ 时，$f(x)<0$；

② 拉格朗日中值定理法：若函数 $f(x)$ 在 $x\in[a,b]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，再根据 $a<\xi<b$ 对等式进行适当的放大或缩小；

③ 常数变易法：将区间 $[a,b]$ 的某一端点视为变量，构造辅助函数，再根据初(终)值加单调性分析法来证明；

④ 泰勒公式法：在处理等式或不等式证明问题中，若条件含有二阶或二阶以上导数时，可考虑使用泰勒公式.

2-20　设 $f(x)=\mathbf{1}/(x\ln\mathbf{2})-\mathbf{1}/(\mathbf{2}^x-\mathbf{1})(x\neq\mathbf{0})$，　$f(\mathbf{0})=\mathbf{1}/\mathbf{2}$，求 $f'(\mathbf{0})$。

**解**　(1) 令 $2^x-1=t$，则 $x\to0$ 相应于 $t\to0$，从而有

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{1/(x\ln2)-1/(2^x-1)-1/2}{x}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1/\ln(1+t)-1/t-1/2}{\ln(1+t)/\ln2}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\ln2}{2}\cdot\frac{2t-2\ln(1+t)-t\ln(1+t)}{t\ln^2(1+t)}$$

$$=\frac{\ln2}{2}\lim_{t\to0}\frac{2t-2t+t^2-2t^3/3+O(t^4)-t^2+t^3/2+O(t^4)}{t^3}$$

$$=\frac{\ln2}{2}\lim_{t\to0}\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)=-\frac{\ln2}{12}.$$

2-21　设 $f(x)=x^3\arcsin x$，求 $f^{(2008)}(0)$.

**Solution 3.** 由级数公式 $(\arcsin x)'=(1-x^2)^{-1/2}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}x^{2n}$，$x\in(-1,1)$. 因此 $(\arcsin x)^{(2005)}|_{x=0}=(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}x^{2n})^{(2004)}|_{x=0}=\frac{2003!!\cdot2004!}{2^{1002}\cdot1002!}$. 而 $(x^3)^{(k)}|_{x=0}\neq0$ 当且仅当 $k=3$. 由Leibniz公式 $f^{(2008)}(0)=\sum\limits_{k=0}^{2008}C_{2008}^{k}(x^3)^{(k)}(\arcsin x)^{(2008-k)}|_{x=0}=3!C_{2008}^{3}\cdot(\arcsin x)^{(2005)}|_{x=0}=3!C_{2008}^{3}\cdot\frac{2003!!\cdot2004!}{2^{1002}\cdot1002!}$

2-22　求函数 $f(x,y)=4x^4+y^4-2x^2-2\sqrt{2}xy-y^2$ 的极值。

**Solution 4.** *做伸缩变换 $\sqrt{2}x=z$ 后函数在相同点取到极值，而对于函数 $g(z,y)=z^4+y^4-z^2-2zy-y^2$ 的极值很容易求出，之后再代换回来即可.*

2-23　已知 $t$ 为常数，且 $\max\limits_{x\in[0,2\pi]}|\cos x+x-t|=\pi$，求 $t$ 的值。

**Solution 6.** *因为 $(\cos x+x-t)'_x=1-\sin x\ge 0$，则 $\cos x+x-t$ 在 $[0,2\pi]$ 上单调增加，于是 $|\cos x+x-t|$ 在 $[0,x_0]$ 上单调减少，在 $[x_0,2\pi]$ 上单调增加. 此处 $x_0$ 满足 $\cos x_0+x_0=t$，于是 $|\cos x+x-t|$ 的最大值只可能在 $x=0$ 和 $x=2\pi$ 处取到，而 $|\cos 0+0-t|=|1-t|$，$|\cos 2\pi+2\pi-t|=|1+2\pi-t|$，于是 $\max\{|1-t|,|1+2\pi-t|\}=\pi$，从而 $t=\pi+1$.*

2-24　（1）证明 $f_n(x)=x^n+nx-2$（$n$ 为正整数）在 $(0,+\infty)$ 上有唯一正根 $a_n$；

（2）计算 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+a_n)^n$

*Proof.* (1). $f_n(0)=-2<0$，又 $f_n(2)=2^n+2n-2>0$，则 $f_n(x)$ 至少有一个正零点. 又因为 $f_n'(x)=nx^{n-1}+n>0$，则 $f_n(x)$ 至多有一个零点.

(2).事实上 $a_{n+1}\le a_n$. 否则，反设$a_{n+1}>a_n$. 由于 $f_n(a_n)=a_n^n+na_n-2=0$，$f_{n+1}(a_{n+1})=0$，则 $0=f_{n+1}(a_{n+1})=a_{n+1}^{n+1}+(n+1)a_{n+1}-2>a_n^n+na_n-2+a_n=a_n$，这与 $a_n>0$ 矛盾. 从而 $\{a_n\}$ 单调下降，而且有下界,根据 $a_n^n+na_n=2$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n)^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n\ln(1+a_n)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}na_n}=e^2$. □

2-25　证明：对 $\forall x\in\boldsymbol{R}$，$1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^4}{4!}>0$。

*Proof.* 令 $f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}$，则 $f'(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$，$f''(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}$. 由于 $\forall x\in\mathbb{R}$，$f''(x)>0$. 又 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$，则 $f'(x)=0$ 有唯一的实根，而且显然驻点 $x_0<0$. 由于 $f''(x_0)>0$ 则 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的最小值，从而 对任意 $x\in\mathbb{R}$，$f(x)\ge f(x_0)=1+x_0+\frac{x_0^2}{2!}+\frac{x_0^3}{3!}+\frac{x_0^4}{4!}=f'(x_0)+\frac{x_0^4}{4!}=\frac{x_0^4}{4!}>0$. □

2-26　求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+e^{3x}}{3}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

**Solution 1.** 因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$，则 $\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{x}{\sin x}}=e$. 而 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}}{3}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+e^x+e^{2x}}{3}\right)^{\frac{1}{\sin x}}\cdot e^{\frac{x}{\sin x}}$，又 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+e^x+e^{2x}}{3}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+e^x+e^{2x})}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+2e^{2x}}{1+e^x+e^{2x}}}=e$. 于是 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}}{3}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=e^2$.

2-27　已知 $f(x)$ 具有连续的二阶导数，且 $\lim\limits_{x\to\mathbf{0}}\dfrac{f(x)}{\mathbf{1}-\cos x}=\mathbf{2}$，求 $f''(\mathbf{0})$。

解：$f(0)=0$，

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=2\cdot 0=0.$$

因此 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)}{\cos x}=f''(0)$，

所以 $f''(0)=2$.

2-28　设 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的某领域内有五阶导数，且

$$f'(x_0)=f''(x_0)=f'''(x_0)=f^{(4)}(x_0)=0,$$

而 $f^{(5)}(x_0)>0$，问 $x_0$ 是否为 $f(x)$ 的极值点？（$x_0$，$f(x_0)$）的拐点？

解：由于 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的某邻域内有五阶连续的导数，所以在点 $x_0$ 某邻域内 $f^{(5)}(\xi)$ 与 $f^{(5)}(x_0)$ 同号，将 $f(x)$ 在 $x_0$ 点进行 4 阶泰勒展开得：

$$f(x)=f(x_0)+\frac{1}{n!}f^{(5)}(\xi)(x-x_0)^5$$

因为 $f^{(5)}(x_0)>0$，则在点 $x_0$ 某邻域内 $f^{(5)}(\xi)>0$，而当 $x<x_0$ 时，$\frac{1}{n!}f^{(5)}(\xi)(x-x_0)^5<0$，则有 $f(x)<f(x_0)$，而当 $x>x_0$ 时，$\frac{1}{n!}f^{(5)}(\xi)(x-x_0)^5>0$，则有 $f(x)>f(x_0)$，所以 $f(x_0)$ 就不是极值.

因为 $f^{(5)}(x_0)>0$，则在点 $x_0$ 某邻域内 $f^{(5)}(x)>0$，则 $f^{(4)}(x)$ 单调增加，且 $f^{(4)}(x_0)=0$，当 $x<x_0$ 时，$f^{(4)}(x)<f^{(4)}(x_0)=0$，则 $f'''(x)$ 单调减少，当 $x>x_0$ 时，$f^{(4)}(x)>f^{(4)}(x_0)=0$，则 $f'''(x)$ 单调增加. 因为 $f'''(x_0)=0$，当 $x<x_0$ 时，$f'''(x)>f'''(x_0)=0$，则 $f''(x)$ 单调增加，当 $x>x_0$ 时，$f'''(x)>f'''(x_0)=0$，则 $f''(x)$ 单调增加. 因为 $f''(x_0)=0$，当 $x<x_0$ 时，$f''(x)<f''(x_0)=0$，当 $x>x_0$ 时，$f''(x)>f''(x_0)=0$，所以 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

2-29　设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$，且 $f''(x)>0$，证明：$f(x)\geq x$。

证明：（利用泰勒公式）

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$，则 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，由泰勒公式得：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2=x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2\ (\xi \text{在} 0 \text{与} x \text{之间})$$

而 $f''(x)>0$，故 $f''(\xi)>0$，所以 $f(x)>x$.

2-30　设 $f''(x)<0$，$f(0)=0$，证明：对任意有 $x_1>0$，$x_2>0$，有

$$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)。$$

证明：方法 1　不妨设 $0<x_1<x_2$，有：

$f(x_1+x_2)-f(x_1)-f(x_2)=f(x_1+x_2)-f(x_2)-[f(x_1)-f(0)]$

$=f'(\xi_2)x_1-f'(\xi_1)x_1=[f'(\xi_2)-f'(\xi_1)]x_1\ (0<\xi_1<x_1,\ x_2<\xi_2<x_1+x_2)$

$=f''(\xi)(\xi_2-\xi_1)x_1<0\quad (\xi_1<\xi<\xi_2)$

所以：

$$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$$

方法 2（把其中之一变为 $x$）

作函数 $F(x)=f(x+x_2)-f(x)-f(x_2)$，则 $F(0)=0$，

$$F'(x)=f'(x+x_2)-f'(x)=f''(\xi)x_2<0$$

则 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调减少，$F(x)<F(0)=0$，显然

$$F(x_1)<F(0)=0$$

即：

$$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$$

2-31　设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上二次可导，若有

$$f(-1)=0，\quad f(0)=0，\quad f(1)=1，$$

则存在 $\xi\in(-1,1)$，使得 $f''(\xi)=1$。

证明　(1) 应用 Taylor 公式，我们有

$1=f(1)=f(0)+f'(0)+f''(\xi_1)/2,\qquad 0<\xi_1<1,$

$0=f(-1)=f(0)+f'(0)(-1)+f''(\xi_2)/2,\quad -1<\xi_2<0,$

将上两式相加，得到

$1=[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]/2,\qquad f''(\xi_1)+f''(\xi_2)=2.$

如果 $f''(\xi_1)=1$ 以及 $f''(\xi_2)=1$，那么结论自然成立。如果 $f''(\xi_1)<1$（或 $f''(\xi_2)<1$），则 $f''(\xi_2)>1$（或 $f''(\xi_1)>1$），那么根据导函数的介值性可知，存在 $\xi\in(-1,1)$，使得 $f''(\xi)=1$。

2-32　设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上三次可导，若有

$$f(-1)=f(0)=0，\quad f(1)=1，\quad f'(0)=0，$$

则存在 $\xi\in(-1,1)$，使得 $f'''(\xi)\geq 3$。

(2) 应用 Taylor 公式，我们有

$1=f(1)=f''(0)/2+f'''(\xi_1)/3!,\qquad 0<\xi_1<1,$

$0=f(-1)=f''(0)/2-f'''(\xi_2)/3!,\quad -1<\xi_2<0.$

将上两式相减，可得 $f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)=6$，由此即知 $f'''(\xi_1)\geq 3$ 或 $f'''(\xi_2)\geq 3$，证毕。

2-33　设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可微，证明：若存在极限

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=a，\quad \lim_{x\to+\infty}xf'(x)=b$$

则 $b=0$。

证明　(1) 对正整数 $n, N, n<N$，作 $[n, N]$ 上函数 $F(x)=xf(x)$，则由中值定理可知，存在 $\xi_n\in(n,N)$，使得

$$F'(\xi_n)=[Nf(N)-nf(n)]/(N-n).$$

因为根据题设可得

$$\lim_{N\to\infty}\frac{Nf(N)-nf(n)}{N-n}=\lim_{N\to+\infty}\frac{f(N)-nf(n)/N}{1-n/N}=a,$$

所以对充分大的 $n$，必有 $|F'(\xi_n)-a|<1/n$，注意到 $\xi_n\to+\infty(n\to\infty)$，以及 $F'(x)=f(x)+xf'(x)$，可知存在极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}F'(x)=a+b$，再注意到 $\lim\limits_{x\to+\infty}F'(x)=\lim\limits_{n\to\infty}F'(\xi_n)=a$，即得 $b=0$。

2-34　计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\sin x}{x}$

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin x-\ln x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{2x^3}$

$=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}=-\dfrac{1}{6}$。

2-35　设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可微，且满足

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy, x,y\in(-\infty,+\infty),$$

证明：$f(x)=x^2+f'(0)x$。

证明　(1) 取 $x=y=0$，可得 $f(0)=2f(0)$，即 $f(0)=0$，将原式改写为

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\frac{f(y)}{y}+2x,\quad y\neq 0,$$

可得

$$f'(x)=\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{f(y)-f(0)}{y}+2x$$
$$=2x+f'(0).$$

由此知 $\int f'(x)dx=\int[2x+f'(0)]dx=x^2+f'(0)\cdot x+C$，即 $f(x)$ 的一般表达式为 $f(x)=x^2+f'(0)x+C$.

因为当 $x=0$ 时，$f(0)=0$，所以有 $C=0$，可知 $f(x)=x^2+f'(0)x$.

2-36　设 $f$ 在 $[a,b]$ 上二阶可微，$f(a)=f(b)=0$，$f'_+(a)f'_-(b)>0$，则方程 $f''(x)=0$ 在 $(a,b)$ 内至少有一个根．

证明：　因为 $f'_+(a)f'_-(b)>0$，不妨设 $f'_+(a)>0, f'_-(b)>0$，

因 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$，故 $\exists(a,a+\delta)$，使

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0,$$

从而 $\exists x_1>a$，使 $f(x_1)>f(a)=0$。

因 $\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}>0$，故 $\exists(b-\delta,b)$，使

$$\frac{f(x)-f(b)}{x-b}>0,$$

从而 $\exists x_2<b$，使得 $f(x_2)<f(b)=0$。

又因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，所以 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续，由零点存在定理知，

$\exists x_0\in(x_1,x_2)$，使 $f(x_0)=0$.

于是在$[a,x_0]$及$[x_0,b]$上分别利用 Rolle 定理得，存在$\xi_1<\xi_2$，使得

$$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0. \quad (a<\xi_1<x_0, x_0<\xi_2<b).$$

再在$[\xi_1,\xi_2]$上用 Rolle 定理得，$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使$f''(\xi)=0$. 即方程$f''(x)=0$在$(a,b)$内至少有一个根.

2-37　设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在$(a,b)$上可微，且$f(a)=f(b)=\mathbf{0}$，则在$[a,b]$上任一连续函数$\varphi(x)$，有$\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)+\varphi(\xi)f(\xi)=\mathbf{0}$。

(2) 因为$\varphi(x)$连续，所以存在原函数，用符号$\int\varphi(x)dx$记之，则作

$$F(x)=e^{\int\varphi(x)dx}\cdot f(x).$$

依题设易知：$F\in C([a,b])$且在$(a,b)$上可微，又$F(a)=F(b)=0$，从而根据 Rolle 定理，一定存在$\xi\in(a,b)$，使得$F'(\xi)=e^{\int\varphi(x)dx}[f'(\xi)+\varphi(\xi)f(\xi)]=0$. 由此立即推出$f'(\xi)+\varphi(\xi)f(\xi)=0$.

2-38　设$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，在$[a,+\infty)$上可导，且$f'(x)>\mathbf{1}$，若$f(a)<\mathbf{0}$，证明：方程$f(x)=\mathbf{0}$在$(a,a-f(a))$内有唯一实根。

证明：因为$f'(x)>1$，所以$f(x)$在$[a,+\infty)$单调增加，由拉格朗日中值定理得：

$$f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a),a<\xi<x$$

又因为$f'(x)>1$，$f'(\xi)>1$，所以$f(x)-f(a)\geqslant x-a$，

即：

$$f(x)\geqslant f(a)+x-a\to+\infty(x\to+\infty)$$

因此方程　$f(x)=0$在$[a,+\infty)$内必有唯一实根.

下面仅证明实根在$(a,a-f(a))$内，由拉格朗日中值定理得，存在$\xi\in(a,a-f(a))$，使：

$$f[a-f(a)]-f(a)=f'(\xi)(-f(a))>-f(a)$$

所以，$f[a-f(a)]>0$，又因为$f(a)<0$，由零点定理和$f(x)=0$在$(a,a-f(a))$内至少存在根.

所以方程$f(x)=0$在$(a,a-f(a))$内有唯一实根.

2-39　设$f(x)$在$[\mathbf{1},\mathbf{2}]$上连续，在$(\mathbf{1},\mathbf{2})$内可导，且$f(\mathbf{1})=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$，　$f(\mathbf{2})=\mathbf{2}$，证明：存在$\xi\in(\mathbf{1},\mathbf{2})$，使得$f'(\xi)=\dfrac{\mathbf{2}f(\xi)}{\xi}$。

证明：$f'(\xi)=\frac{2f(\xi)}{\xi}$变来$f'(x)=\frac{2f(x)}{x}$，这是微分方程$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2}{x}$，积分$\ln f(x)=\ln Cx^2$，$f(x)=Cx^2$，即$\frac{f(x)}{x^2}=C$.

故可设辅助函数$F(x)=\frac{f(x)}{x^2}$，$F(x)$在$[1,2]$上连续，在$(1,2)$内可导，且$F(1)=\frac{1}{2}=F(2)$，由罗尔定理，至少存在一点$\xi\in(1,2)$，使：

$$F'(\xi)=0$$

即：

$$f'(\xi)=\frac{2f(\xi)}{\xi}$$

2-40　设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在$(a,b)$内可导，且$f(a)=f(b)=\mathbf{1}$，证明：存在

$\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=\mathbf{1}$。

证明：只要证明 $e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]=e^{\xi}$

令 $F(x)=e^{x}f(x)$，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导，则由拉格朗日中值定理得：

$$F(b)-F(a)=F'(\eta)(b-a)\quad(\eta\in(a,b))$$

即 $e^{b}f(b)-e^{a}f(a)=[e^{\eta}f(\eta)+e^{\eta}f'(\eta)](b-a)$.

因为 $f(a)=f(b)=1$，即有：

$$e^{b}-e^{a}=e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)](b-a)$$

再对 $e^{x}$ 在 $[a,b]$ 用拉格朗日中值定理得：

$$e^{\xi}(b-a)=e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)](b-a)\quad(\xi\in(a,b))$$

所以 $e^{\xi}=e^{\eta}(f(\eta)+f'(\eta))$，即：

$$e^{\eta-\xi}(f(\eta)+f'(\eta))=1$$

注：此处 $\xi=\eta$ 时，令 $G(x)=e^{x}[f(x)-1]$，$G(a)=G(b)=0$，则有 $G'(\eta)=0$，即 $f(\eta)+f'(\eta)=1$.

2-41　设 $f(x)$ 在 $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ 上连续，在 $(\mathbf{0},\mathbf{1})$ 内可导，且 $f(\mathbf{0})=\mathbf{0}$，对于 $x\in(\mathbf{0},\mathbf{1})$，有 $|f'(x)|\leq|f(x)|$，证明：在 $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ 上 $f(x)\equiv\mathbf{0}$。

证明：由拉格朗日中值定理知 $f(x)-f(0)=f'(\xi_1)x$，$(0<\xi_1<x\leq1)$，即：

$$f(x)=f'(\xi_1)x$$

且：

$$|f(x)|=|f'(\xi_1)x|\leq|f(\xi_1)|x$$

这就有：

$$|f(x)|\leq|f(\xi_1)|x$$

又：

$$f(\xi_1)-f(0)=f'(\xi_2)\xi_1\ \xi_2\in(0,\xi_1)$$

于是：

$$|f(\xi_1)|\leq|f(\xi_2)|\xi_1\ (0<\xi_2<\xi_1<x\leq1)$$

继续下去：

$$|f(x)|\leq|f(\xi_{n+1})|\xi_n\xi_{n-1}\cdots\xi_2\xi_1x$$

$$0<\xi_{n+1}<\xi_n<\cdots<\xi_3<\xi_2<\xi_1<x\leq1$$

$$|f(x)|\leq|f(\xi_{n+1})|x^n$$

当 $n\to\infty$ 时 $|f(x)|\leq0$，所以 $f(x)=0$.

2-42　设 $f(x)$ 在 $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ 上具有二阶连续导数，且有 $f(\mathbf{0})=f(\mathbf{1})=\mathbf{0}$，$|f''(x)|\leq A$，$x\in(\mathbf{0},\mathbf{1})$，证明：$|f'(x)|\leq\dfrac{A}{\mathbf{2}}$。

证明：$\forall x_0\in(0,1)$，有泰勒公式，

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_0)^2$（$\xi$ 在 $x_0$ 与 $x$ 之间）或

$\forall x\in(0,1)$，有：

$f(y)=f(x)+f'(x)(y-x)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(y-x)^2$（$\xi$ 在 $y$ 与 $x$ 之间）

取 $x=0$，取 $y=1$，

$f(0)=f(x)+f'(x)(-x)+\frac{1}{2!}f''(\xi_1)(-x)^2\ (0<\xi_1<x)$

$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{1}{2!}f''(\xi_2)(1-x)^2\ (x<\xi_2<1)$

相减得：

$$f'(x)=\frac{1}{2!}[f''(\xi_1)x^2-f''(\xi_2)(1-x)^2]$$

$$|f'(x)|\leq\frac{1}{2!}[|f''(\xi_1)|x^2+|f''(\xi_2)|(1-x)^2]$$

$$\leq\frac{A}{2!}[x^2+(1-x)^2]\leq\frac{A}{2!},$$

因为 $0\leq x^2+(1-x)^2\leq1\ (\forall x\in(0,1))$，所以 $|f'(x)|\leq\frac{A}{2}$.

2-43 设 $f(x)$ 在 $[\mathbf{0,2}]$ 上具有三阶连续导数，且 $f(\mathbf{0})=\mathbf{1}$， $f(\mathbf{2})=\mathbf{2}$， $f'(\mathbf{1})=\mathbf{0}$，证明：在 $(\mathbf{0,2})$ 内至少存在一点 $\xi$，使得 $|f'''(\xi)|\geq \mathbf{3}$。

证明：由泰勒公式：

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{1}{2!}f''(1)(x-1)^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi)(x-1)^3$$

即：

$$f(x)=f(1)+\frac{1}{2!}f''(1)(x-1)^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi)(x-1)^3$$

（$\xi$ 在 $x$ 与 1 之间）

所以有：

$$f(0)=f(1)+\frac{1}{2!}f''(1)-\frac{1}{3!}f'''(\xi_1)\quad (0<\xi_1<1)$$

$$f(2)=f(1)+\frac{1}{2!}f''(1)+\frac{1}{3!}f'''(\xi_2)\quad (1<\xi_2<2)$$

前两式相减得：

$$f(2)-f(0)=\frac{1}{6}[f'''(\xi_2)-f'''(\xi_1)]$$

$$1=\frac{1}{6}[f'''(\xi_2)-f'''(\xi_1)]$$

$$\leq\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}[|f'''(\xi_2)|+|f'''(\xi_1)|]\leq\frac{1}{3}|f'''(\xi)|.$$

其中，$|f'''(\xi)|=\max\{|f'''(\xi_2)|,|f'''(\xi_1)|\}$.

所以，在 $(0,2)$ 内至少存在一点 $\xi$，使 $|f'''(\xi)|\geq 3$.

2-44 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且满足条件 $|f(x)|\leq a$， $|f''(x)|\leq b$，其中 $a,b$ 都是非负常数，$c$ 是 $(0,1)$ 内的任一点，证明 $|f'(c)|\leq 2a+\dfrac{b}{2}$。

证明： 因 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数，故存在 $\xi_1\in(0,c)$ 使得

$$f(0)=f(c)+f'(c)(0-c)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(0-c)^2$$

同理存在 $\xi_2\in(c,1)$ 使得

$$f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-c)^2$$

将上面的两个等式两边分别作差，得

$$f(1)-f(0)=f'(c)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-c)^2-\frac{1}{2}f''(\xi_1)c^2$$

即

$$f'(c)=f(1)-f(0)-\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-c)^2+\frac{1}{2}f''(\xi_1)c^2$$

因此

$$|f'(c)|\leq|f(1)|+|f(0)|+\frac{1}{2}|f''(\xi_2)|(1-c)^2+\frac{1}{2}|f''(\xi_1)|c^2$$
$$\leq 2a+\frac{b}{2}(1-c)^2+\frac{b}{2}c^2$$

而 $(1-c)^2+c^2=2c^2-2c+1=2c(c-1)+1\leq 1$，故 $|f'(c)|\leq 2a+\dfrac{b}{2}$。

2-45 设 $f \in C^3[0,1], f(0)=1, f(1)=2, f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$．证明：$\exists\, \xi \in (0,1)$，使$|f'''(\xi)| \geq 24$

证明：将 $f(x)$ 在点 $x=\frac{1}{2}$ 处展开泰勒公式，得

$$f(x)=f(\frac{1}{2})+f'(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}f''(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{6}f'''(\xi)(x-\frac{1}{2})^3$$（$\xi$ 在 $x$ 与 $\frac{1}{2}$ 之间）

令 $x=0$ 得

$$f(0)=f(\frac{1}{2})+f'(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}f''(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{6}f'''(\xi_1)(-\frac{1}{2})^3, \xi_1 \in (0,\frac{1}{2}).$$

令 $x=1$ 得

$$f(0)=f(\frac{1}{2})+f'(\frac{1}{2})\frac{1}{2}+\frac{1}{2}f''(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{6}f'''(\xi_2)(\frac{1}{2})^3, \xi_2 \in (\frac{1}{2},1).$$

因为 $f'(\frac{1}{2})=0$，所以

$$|f(1)-f(0)| \leq \frac{1}{6}[|f'''(\xi_1)|+|f'''(\xi_2)|]\left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

令 $f'''(\xi)=\max\{|f'''(\xi_1)|, f'''(\xi_2)\}$， 则

$$|f(1)-f(0)| \leq \frac{1}{24}|f'''(\xi)|,$$

代入 $f(0)=1, f(1)=2$，得 $|f'''(\xi)| \geq 24$.

2-46 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有三阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$（有限），$\lim\limits_{x\to\infty} f'''(x)=\mathbf{0}$，证明：$\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to\infty} f''(x)=\mathbf{0}$。

证明：$\forall x \in (-\infty,+\infty)$，在 $x$ 的某领域内的 $t$ 都有泰勒公式：

$$f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+\frac{1}{2!}f''(x)(t-x)^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi)(t-x)^3, (\xi\text{在}x\text{与}t\text{之间}),$$

$$f(\mathrm{u})=f(x)+f'(x)(u-x)+\frac{1}{2!}f''(x)(u-x)^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi)(u-x)^3, (\xi\text{在}u\text{与}t\text{之间}),$$

当 $u=x+\mathbf{1}$ 时，则有

$$f(\mathrm{x})=f(x)+f'(x)+\frac{1}{2!}f''(x)+\frac{1}{3!}f'''(\xi_1), (\xi_1\text{在}x\text{与}\mathbf{1}+x\text{之间}) \quad （1）$$

当 $u=x+\mathbf{1}$ 时，则有

$$f(\mathrm{x})=f(x)-f'(x)+\frac{1}{2!}f''(x)-\frac{1}{3!}f'''(\xi_2), (\xi_2\text{在}x-\mathbf{1}\text{与}x\text{之间}) \quad （2）$$

式（1）-式（2）得：

$$f(x+\mathbf{1})-f(x-\mathbf{1})=\mathbf{2}f'(x)+\frac{1}{3!}[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)] \quad （3）$$

因为 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$（有限），$\lim\limits_{x\to\infty} f'''(x)=\mathbf{0}$。由式（3）得：

$$A-A=\mathbf{2}\lim_{x\to\infty} f'(x)+\mathbf{0}$$

所以： $$\lim_{x\to\infty} f'(x)=\mathbf{0}$$

再由式（1）得： $$A=A+\mathbf{0}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2!}}\lim_{x\to\infty} f''(x)+\mathbf{0}$$

所以： $\lim\limits_{x\to\infty} f''(x)=\mathbf{0}$。

2-47　证明：$\dfrac{\frac{1}{n^{p+1}}}{(p+1)^2}\ln n < n^{\frac{1}{p}} - n^{n^{\frac{1}{p+1}}} - \dfrac{1}{n^{p+1}} < \dfrac{n^{\frac{1}{p}}}{p^2}\ln n$， $n>1, p\geq 1$。

**证明**　根据类比知结论中 $n^{\frac{1}{p}}-n^{\frac{1}{p+1}}$ 相当于拉格朗日定理中的 $f(b)-f(a)$，从而寻得 $f(x)$ 之形为 $f(x)=n^{\frac{1}{x}}$，进而可定出 $b=p, a=p+1$，显然，$f(x)=n^{\frac{1}{x}}$ 在 $[p,p+1]$ 上满足拉格朗日定理条件，故至少存在一点 $\xi\in(p,p+1)$，使：

$$f(p)-f(p+1)=n^{\frac{1}{p}}-n^{\frac{1}{p+1}}=f'(\xi)[p-(p+1)]=n^{\frac{1}{\xi}}\left(-\frac{1}{\xi^2}\right)(-1)\ln n$$

于是 $n^{\frac{1}{p}}-n^{\frac{1}{p+1}}=\frac{1}{\xi^2}n^{\frac{1}{\xi}}\ln n, \xi\in(p,p+1)$，而

$$\frac{1}{(p+1)^2}n^{\frac{1}{p+1}}\ln n<\frac{1}{\xi^2}\cdot n^{\frac{1}{\xi}}\ln n<\frac{1}{p^2}\cdot n^{\frac{1}{p}}\ln n$$

所以：

$$\frac{n^{\frac{1}{p+1}}}{(p+1)^2}\ln n<n^{\frac{1}{p}}-n^{\frac{1}{p+1}}<\frac{n^{\frac{1}{p}}}{p^2}\ln n$$

注：因为 $n>1$，可知 $\ln n>0$。

2-48　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\left[1-\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}\cdots\sqrt[n]{\cos nx}\right]$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\Big[0+\sin x\cdot\sqrt{\cos 2x}\cdots\sqrt[n]{\cos nx}+\frac{1}{2x}\cos x\cdot\frac{\sin 2x\cdot 2}{2\sqrt{\cos 2x}}\cdots\sqrt[n]{\cos nx}+\frac{1}{2x}\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}\cdots\frac{\sin nx\cdot n}{n\sqrt[n]{\cos nx}}\Big]$$

$$=\frac{1}{2}(1+2+\cdots+n)=\frac{n(n+1)}{4}$$

2-49　$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\dfrac{a}{n}-\arctan\dfrac{a}{n+1}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\dfrac{1}{1+\xi_n^2}\left(\dfrac{a}{n}-\dfrac{a}{n+1}\right)$，$\xi_n$ 在 $\dfrac{a}{n}$ 与 $\dfrac{a}{n+1}$ 之间（当 $n\to\infty$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\xi_n^2}=1$）

$=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\dfrac{a}{n(n+1)}=a$。

2-50　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2+1-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$

解：因为 $\sqrt{1+x^2}=1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)$，

$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)$，$e^{x^2}=1+\frac{1}{2}x^2+o(x^4)$，

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2+1-[1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)]}{[(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2))-(1+\frac{1}{2}x^2+o(x^4))]x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{8}x^4+o(x^4)]}{-\frac{3}{2}x^4+o(x^2)}$

$=-\frac{2}{24}$

2-51　设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 确定，求 $y=y(x)$ 的驻点，并判断它是否为极值点。

**解**　方程两边对 x 求导，得

$$6y^2y'-4yy'+2xy'+2y-2x=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{（*）}$$

即　$$y'=\frac{x-y}{3y^2-2y+x}$$

令 y'=0，得 x=y 将 x=y 代入原方程得唯一驻点 x=1。

为求 y''（1)，（*）式两边对 x 求导。得

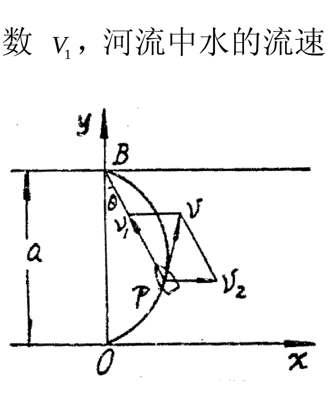
$$(3y^2-2y+x)y''+y'(6yy'-2y'+1)=1-y'$$

将 x-1，y=1，y'=0 代入上式得

$$y'(1)=\frac{1}{2}>0$$

因此，x=1 为 y=y(x)的极小点，且极小值为 y=1。

2-52　如图所示，设河宽为 $a$，一条船从岸边一点 $O$ 出发驶向对岸，船头总是指向对岸与点 $O$ 相对的一点 $B$。假设在静水中船速为常数 $V_1$，河流中水的流速为常数 $V_2$，试求船过河所走的路线(曲线方程)；

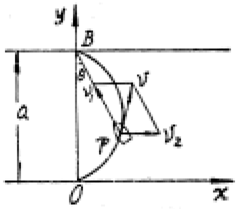



并讨论在什么条件下

（1）船能到达对岸；

（2）船能到达点 $B$.

分析：利用物理学知识容易建立运动轨迹的数学模型，该模型是微分方程，求解微分方程，对字母进行讨论。




解：如图所示，设 $P(x,y)$ 为船在要时刻的位置

此时两个分速度为 $\frac{dx}{dt}=v_2-v_1\sin\theta$　$\frac{dy}{dt}=v_1\cos\theta$ $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$，

消去 t 得 $\frac{dy}{dx}=\frac{v_1\cos\theta}{v_2-v_1\sin\theta}=\frac{\cos\theta}{k-\sin\theta}(k=\frac{v_2}{v_1})=\frac{1}{k\sec\theta-\tan\theta}$，

又 $\tan\theta=\frac{x}{a-y}$,则 $\sec\theta=\frac{\sqrt{x^2+(a-y)^2}}{a-y}$, 代入得

$\frac{dy}{dx}=\frac{a-y}{k\sqrt{x^2+(a-y)^2}-x}$(路线满足的微分方程) 令 $a-y=ux$，则有

$-u-x\frac{du}{dx}=\frac{u}{k\sqrt{1+u^2}-1},\frac{dx}{x}=\left(\frac{1}{ku\sqrt{1+u^2}}-\frac{1}{u}\right)du$ 积分 $\ln x=-\frac{1}{k}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1+u^2}}{u}\right)-\ln u+\ln c$

$(a-y)^k=c\frac{a-y}{x+\sqrt{x^2+(y-a)^2}}$　由 $y(0)=0$ 得 $c=a$,化简得 $x=\frac{a}{2}[(\frac{a-y}{a})^{1-k}-(\frac{a-y}{a})^{1+k}]$

讨论：①当 $1-k>0$,即 $k<1,v_2<v_1$ 时,则 $\lim\limits_{y\to a^-}x=0$,可到点 $B(0,a)$;

②当 $1-k=0$,即 $k=1,v_2=v_1,1+k=2$ 时,则 $\lim\limits_{y\to a^-}x=\frac{a}{2}$,可达对岸点 $(\frac{a}{2},a)$

③当 $1-k<0$ 即 $k>1,v_2>v_1,1+k>2$ 时, $\lim\limits_{y\to a^-}x$ 不∃,不能对达对岸.

# 三、一元函数积分学

（竞赛大纲）

1. 原函数和不定积分的概念.
2. 不定积分的基本性质、基本积分公式.
3. 定积分的概念和基本性质、定积分中值定理、变上限定积分确定的函数及其导数、牛顿-莱布尼茨(Newton-Leibniz)公式.
4. 不定积分和定积分的换元积分法与分部积分法.
5. 有理函数、三角函数的有理式和简单无理函数的积分.
6. 广义积分.
7. 定积分的应用：平面图形的面积、平面曲线的弧长、旋转体的体积及侧面积、平行截面面积为已知的立体体积、功、引力、压力及函数的平均值.

3-1　计算不定积分 $I=\int\sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}dx$。

解　$I=\int\frac{\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}}{\sqrt{1+x^2}}dx$（这里 $d\ln(x+\sqrt{1+x^2})=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$）

$=\int\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}\,d\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

$=\frac{2}{3}[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^{\frac{3}{2}}+C$

3-2　计算 $\int\frac{dx}{\cos(3+x)\cdot\sin(5+x)}$.

**Solution 2.** 令 $u=x+3$. 因为 $\sin(5+x)=\cos(x+3)\sin 2+\sin(x+3)\cos 2$, 则 $\int\frac{dx}{\cos(3+x)\sin(5+x)}=\int\frac{du}{\cos^2 u\sin 2+\sin u\cos u\cos 2}=\int\frac{d\tan u}{\sin 2+\tan u\cos 2}=\frac{1}{\cos 2}\ln|\cos 2\cdot\tan u+\sin 2|+C=\frac{1}{\cos 2}\ln|\cos 2\cdot\tan(x+3)+\sin 2|+C$.

3-3　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内二阶可导，且 $f''(x)\neq 0$，满足关系式 $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx=0$。证明：$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上恰好有两个零点。

证　因为 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$，则 $f(x)$在$(0,1)$内不能同号，从而由闭区间上连续函数的性质知，$f(x)$在$(0,1)$内至少有一个零点.

假定 $x=\alpha$ 是 $f(x)$在$(0,1)$内的唯一零点，不妨设当 $0<x<\alpha$ 时，$f(x)<0$，当 $\alpha<x<1$ 时，$f(x)>0$，则 $\int_0^1 (x-\alpha)f(x)\mathrm{d}x > 0$，但是 $\int_0^1 (x-\alpha)f(x)\mathrm{d}x = 0$，矛盾. 所以，$f(x)$在$(0,1)$内至少有两个零点.

如果 $f(x)$在$[0,1]$上至少有 3 个零点，设为 $x_1,x_2,x_3(x_1<x_2<x_3)$，则 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=0$，由罗尔定理知，存在点 $a\in(x_1,x_2)$，$b\in(x_2,x_3)$，使 $f'(a)=0$，$f'(b)=0$. 对 $f'(x)$在$[a,b]$上应用罗尔定理知，存在 $\xi\in(a,b)\subset(0,1)$，使得 $f''(\xi)=0$，这与 $f''(x)\neq 0$ 矛盾. 所以，$f(x)$在$[0,1]$上恰好有两个零点.

3-4　设 $y=f(x)$ 是区间$[0,1]$上的正值连续函数。

（1）证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得在区间 $[0,\xi]$ 上以 $f(\xi)$ 为高的矩形面积，等于在区间 $[\xi,1]$ 上以 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形面积；

（2）如果 $f(x)$ 在（0,1）内可导，且 $f'(x)>-\frac{2f(x)}{x}$，证明：（1）中的 $\xi$ 是唯一的。

证　(1) 问题等价于证明方程

$$\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t - xf(x) = 0$$

在区间$(0,1)$内有实数根. 作辅助函数

$$F(x) = x\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t,\quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

则 $F(x)$在$[0,1]$上可导，且

$$F'(x) = \int_x^1 f(t)\mathrm{d}t - xf(x).$$

又因为 $F(0)=F(1)=0$，则至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，即 $\xi f(\xi) = \int_\xi^1 f(x)\mathrm{d}x$.

(2) 依条件知，$F''(x) = -2f(x) - xf'(x) < 0\,(0<x<1)$，所以 $F'(x)$在区间$[0,1]$上严格单调减少，从而 $F'(x)$在区间$[0,1]$上只有唯一的零点.

3-5　设在 $(-\infty,+\infty)$ 内，函数 $f(x)$ 连续，$g(x)=f(x)\int_0^x f(t)dt$ 单调减少，证明：$f(x)\equiv 0$。

证 作辅助函数

$$F(x)=\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2,$$

则

$$F'(x)=2f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=2g(x)$$

在$(-\infty,+\infty)$内单调减少. 因为, $F'(0)=0$, 则当 $x\leqslant 0$ 时,

$$F'(x)\geqslant F'(0)=0,$$

当 $x>0$ 时,

$$F'(x)\leqslant F'(0)=0.$$

所以, $F(x)$在$(-\infty,0]$内单调增加, 在$(0,+\infty)$内单调减少, 所以 $F(x)$在 $x=0$ 处取最大值. 从而, 对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$, 恒有

$$F(x)\leqslant F(0)=0,$$

但 $F(x)\geqslant 0$, 所以, $F(x)\equiv 0$. 于是,

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\equiv 0,$$

所以, $f(x)\equiv 0$.

3-6 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶连续可导，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\tfrac{a+b}{2})+\tfrac{(b-a)^3}{24}f''(\xi)。$$

证 设 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, 将 $F(x)$ 在 $x=\frac{a+b}{2}$ 处展开成三阶泰勒公式, 得

$$F(x)=F\left(\frac{a+b}{2}\right)+F'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2!}F''\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$$
$$+\frac{1}{3!}F'''(\eta)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3,\quad 其中\ \eta\ 在\ x\ 与\ \frac{a+b}{2}\ 之间.$$

令 $x=a$ 和 $x=b$ 得

$$F(a)=F\left(\frac{a+b}{2}\right)-F'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{2}+\frac{1}{2!}F''\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$
$$-\frac{1}{3!}F'''(\eta_1)\left(\frac{b-a}{2}\right)^3,\quad 其中\ a<\eta_1<\frac{a+b}{2}.$$

$$F(b)=F\left(\frac{a+b}{2}\right)+F'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{2}+\frac{1}{2!}F''\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}F'''(\eta_2)\left(\frac{b-a}{2}\right)^3,\quad \text{其中}\frac{a+b}{2}<\eta_2<b.$$

将以上两式相减，并注意到 $F(a)=0, F(b)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x, F'(x)=f(x)$，有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{24}\cdot\frac{1}{2}[f''(\eta_1)+f''(\eta_2)].$$

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶连续可导，由介值定理，$\exists\xi\in(\eta_1,\eta_2)\subset(a,b)$，使得

$$\frac{1}{2}[f''(\eta_1)+f''(\eta_2)]=f''(\xi),$$

从而

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi).$$

3-7 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数，在 $(a,b)$ 内二阶可导，且 $f(a)=f(b)=0$，$\int_a^b f(x)dx=0$，证明：

（1）在 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$，使得 $f'(\xi)=f(\xi)$；

（2）在 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\eta$，$\eta\neq\xi$，使得 $f''(\eta)=f(\eta)$。

证 （1）由积分中值定理知，至少存在一点 $c\in(a,b)$，使得

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0.$$

设 $G(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$，则 $G(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导，且

$G(a)=G(b)=G(c)=0,\quad G'(x)=\mathrm{e}^{-x}f'(x)-\mathrm{e}^{-x}f(x)=\mathrm{e}^{-x}[f'(x)-f(x)].$

由罗尔定理知，分别存在 $\xi_1\in(a,c)$ 和 $\xi_2\in(c,b)$，使得 $G'(\xi_1)=G'(\xi_2)=0$，从而 $f'(\xi_1)=f(\xi_1), f'(\xi_2)=f(\xi_2)$.

（2）设 $F(x)=\mathrm{e}^{x}[f'(x)-f(x)]$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可导，且

$$F(\xi_1)=F(\xi_2)=0,$$

$$F'(x)=\mathrm{e}^{x}[f''(x)-f'(x)]+\mathrm{e}^{x}[f'(x)-f(x)]=\mathrm{e}^{x}[f''(x)-f(x)].$$

对 $F(x)$ 在区间 $[\xi_1,\xi_2]$ 上应用罗尔定理，即存在 $\eta\in(\xi_1,\xi_2)$，使得 $F'(\eta)=0$，故有 $f''(\eta)=f(\eta)$，且 $\eta\neq\xi_i(i=1,2)$.

3-8 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数，且 $f(0)=f(1)=0$。证明：$|\int_0^1 f(x)dx|\leq\frac{1}{4}\max\limits_{x\in[0,1]}\{|f'(x)|\}$。

**证** **方法 1** 设 $k=\max\limits_{x\in[0,1]}\{|f'(x)|\}$，则 $-k\leqslant f'(x)\leqslant k, x\in[0,1]$.

引进辅助函数 $g_1(x)=f(x)-kx, 0\leqslant x\leqslant 1$，则

$$g_1'(x)=f'(x)-k\leqslant 0,$$

由 $g_1(0)=f(0)=0$，故 $g_1(x)\leqslant g_1(0)$，即

$$f(x)\leqslant kx,\quad x\in[0,1].$$

类似地，作辅助函数

$$g_2(x)=f(x)+kx,$$

$$g_3(x)=f(x)-k(x-1),$$

$$g_4(x)=f(x)+k(x-1),$$

可证 $f(x)\geqslant -kx, f(x)\geqslant k(x-1), f(x)\leqslant -k(x-1)$，从而有

$$|f(x)|\leqslant kx \quad 且 \quad |f(x)|\leqslant k(1-x),$$

故

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{k}{4}=\frac{1}{4}\max_{x\in[0,1]}\{|f'(x)|\}.$$

**方法 2** 设 $k=\max\limits_{x\in[0,1]}\{|f'(x)|\}$，因 $f(x)$ 是 $f'(x)$ 的原函数，且 $f(0)=f(1)=0$，对

$$-k\leqslant f'(x)\leqslant k$$

两边同时在区间 $[0,x]$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$ 上积分，得

$$\int_0^x(-k)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^x k\mathrm{d}x,$$

即

$$-kx\leqslant f(x)\leqslant kx,\quad x\in[0,1].$$

同样，两边同时在区间 $[x,1]$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$ 上积分，得

$$-k(1-x)\leqslant f(x)\leqslant k(1-x),\quad x\in[0,1].$$

故有

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{k}{4}=\frac{1}{4}\max_{x\in[0,1]}\{|f'(x)|\}.$$

**方法 3** 设 $k=\max\limits_{x\in[0,1]}\{|f'(x)|\}, x\in(0,1)$，在 $[0,x]$ 及 $[x,1]$ 上使用拉格朗日中值定理，得

$$f(x)=f(0)+f'(\xi_1)x=f'(\xi_1)x,\quad 0<\xi_1<x,$$

$$f(x)=f(1)+f'(\xi_2)(x-1)=f'(\xi_2)(x-1),\quad 0<\xi_2<x.$$

从而

$$|f(x)|\leqslant kx \quad 且 \quad |f(x)|\leqslant k(1-x).$$

由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，故

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1|f(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_0^{\frac{1}{2}}kx\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1 k(1-x)\mathrm{d}x=\frac{k}{4}=\frac{1}{4}\max_{x\in[0,1]}\{|f'(x)|\}.$$

注 （1）在本题中，区间$[0,1]$是非本质的，如果将区间$[0,1]$改为$[a,b]$的话，问题可重新表述为：函数$f(x)$在$[a,b]$上有连续的导数，且$f(a)=f(b)=0$. 则有

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}\max_{x\in[a,b]}\{|f'(x)|\}.$$

（2）若$F'(x)=f(x)$，上述结论又可表示为

$$|F(b)-F(a)| \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}\max_{x\in[a,b]}\{|f'(x)|\}.$$

也即

$$\max_{x\in[a,b]}\{|f'(x)|\} \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}|F(b)-F(a)|.$$

（3）由上面的讨论，问题又可表述为：设函数$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导，且有

$$f'(a)=f'(b)=0,$$

则在$[a,b]$内必存在一点$c(a<c<b)$，使得

$$f''(c) \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

下面用泰勒公式证明此问题.

令$x\in(a,b)$，由题设知$f(x)$在点$a,b$的泰勒公式分别为

$$f(x)=f(a)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(x-a)^2,\quad a<\xi_1<x,$$

$$f(x)=f(b)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(x-b)^2,\quad x<\xi_2<b.$$

令$x=\frac{a+b}{2}$，有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2, a<\xi_1<\frac{a+b}{2},$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2, \frac{a+b}{2}<\xi_2<b.$$

将两式相减，得

$$0=f(a)-f(b)+\frac{1}{2!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)],$$

即

$$\frac{2!\times 2^2}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|=|f''(\xi_1)-f''(\xi_2)| \leqslant |f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|$$

$$\leqslant 2\max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\}=2|f''(c)|.$$

其中，$c$为$\xi_1$或$\xi_2$. 上式即为

$$f''(c) \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|,\quad a<c<b.$$

（4）通过观察该命题，并审视其证明过程，不难将该命题推广到更一般的情况，即设函数$f(x)$在$[a,b]$上存在直到$n$阶导数，且有

$$f^{(k)}(a)=f^{(k)}(b)=0,\quad k=1,2,\cdots,n-1,$$

则在$[a,b]$内必存在一点$c(a<c<b)$，使得

$$f^{(n)}(c) \geqslant \frac{2^{n-1}\cdot n!}{(b-a)^n}|f(b)-f(a)|.$$

3-9 设函数$f(x)$在$(0,+\infty)$内可微，且$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=0$。证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$。

**证** 记 $g(x)=f(x)+f'(x)$，则有

$$[e^x f(x)]'=g(x)e^x,$$

由此得

$$e^x f(x)=\int_a^x g(x)e^x\,dx+C.$$

依题意，$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$，则 $\forall\varepsilon>0$，取上述正数 $a$，使得当 $x>a$ 时，恒有 $|g(x)|<\varepsilon$，于是 $|f(x)|\le\varepsilon(1-e^{a-x})+|C|e^{-x}$。

再取 $X>a$，使当 $x>X$ 时，恒有 $|f(x)|<2\varepsilon$，因此 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$。

3-10　计算反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x^2}}{(x^2+\frac{1}{2})^2}dx$。

**解**

$$\begin{aligned}\int\frac{e^{-x^2}}{(x^2+1/2)^2}dx&=\int\frac{e^{-x^2}}{2x}d\left(\frac{-1}{x^2+1/2}\right)\\&=\frac{e^{-x^2}}{2x}\cdot\frac{-1}{x^2+1/2}-\int\frac{e^{-x^2}}{x^2}dx\\&=-\frac{e^{-x^2}}{2x(x^2+1/2)}+\frac{e^{-x^2}}{x}+2\int e^{-x^2}dx\\&=\frac{xe^{-x^2}}{x^2+1/2}+2\int e^{-x^2}dx.\end{aligned}$$

因此 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x^2}}{(x^2+1/2)^2}dx=2\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}.$

3-11　计算定积分 $I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$。

**解** 令 $x=\tan\theta$，则

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan\theta)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos\theta+\sin\theta)d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos\theta d\theta\\&=I_1-I_2,\end{aligned}$$

其中 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)d\theta=\frac{\pi}{8}\ln 2+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)d\theta.$

令 $\frac{\pi}{4}-\theta=\varphi$，有

$$I_1=\frac{\pi}{8}\ln 2+I_2,$$

所以 $I=\frac{\pi}{8}\ln 2.$

3-12　计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$，其中 $f(x)=\int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{x}}\frac{1}{1+\tan u^2}du$。

**解** 方法 1 利用分部积分法计算.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}\sqrt{x}=2\left[\sqrt{x}f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x}f'(x)\mathrm{d}x\right]$$

$$=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x}f'(x)\mathrm{d}x,$$

而 $f'(x)=\frac{1}{1+\tan x}\frac{1}{2\sqrt{x}}$，$2\sqrt{x}f'(x)=\frac{1}{1+\tan x}$，因此

$$I=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\tan x}=-\frac{\pi}{4}.$$

**方法 2** 利用二次积分交换次序计算.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}\int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{x}}\frac{\mathrm{d}u}{1+\tan u^2}$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\frac{\mathrm{d}u}{1+\tan u^2}=-\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\frac{\mathrm{d}u}{1+\tan u^2}\int_0^{u^2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$$

$$=-\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\frac{2u\mathrm{d}u}{1+\tan u^2}=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{1+\tan t}=-\frac{\pi}{4}.$$

**注** (1) 关于 $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\tan x}$ 的计算.

**方法 1** 记 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$，$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$，则

$$I_1+I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},$$

$$I_1-I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=-\ln(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=0,$$

故 $I_1=I_2=\frac{\pi}{4}$，所以，$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\tan x}=\frac{\pi}{4}$.

**方法 2** 令 $u=\frac{\pi}{2}-x$，得 $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\tan x}=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{-\mathrm{d}u}{1+\cot u}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{1+\tan x}\mathrm{d}x$，

则 $J=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$.

(2) 试计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}$.

(3) 设 $f(x)=\int_x^{\sqrt{x}}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，试计算 $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

3-13 设 $f'(x)=\arcsin(x-\mathbf{1})^2$ 及 $f(\mathbf{0})=\mathbf{0}$，求 $\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}}f(x)\ dx$.

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(x)d(x-1)=[(x-1)f(x)]_0^1-\int_0^1(x-1)f'(x)dx=-\int_0^1(x-1)\arcsin(x-1)^2dx$$

$$\xlongequal{令x-1=u}-\int_{-1}^0 u\arcsin u^2du=-\frac{1}{2}\int_{-1}^0\ \arcsin u^2du^2=-\frac{1}{2}[u^2\arcsin u^2\ \Big|_{-1}^0-\int_{-1}^0\frac{2u^3}{\sqrt{1-u^4}}du]$$

$$=\frac{1}{2}[-\frac{\pi}{2}+\sqrt{1-t^4}\ \Big|_{-1}^0]=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

3-14 设 $A=\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{(x+2)^2}dx$，将积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{x+1}dx$ 表示成 A 的表达式。

**解** $I=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{2x+2}\mathrm{d}(2x)\xlongequal{u=2x}\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{u+2}\mathrm{d}u=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\cos u}{u+2}$

$=-\frac{1}{2}\frac{\cos u}{u+2}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\cos u}{(u+2)^2}\mathrm{d}u=-\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{\pi+2}-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}A$

$=\frac{\pi+4}{4(\pi+2)}-\frac{1}{2}A.$

3-15　求定积分$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx$。

**解** $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sec^2\frac{x}{2}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\tan\frac{x}{2}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

$=\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}-\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}\tan\frac{\pi}{8}.$

3-16　设$f(x),g(x)$都是$[0,a]$上的连续函数，且对任意$x\in[0,a]$，恒有

$$f(x)=f(a-x),g(x)+g(a-x)=k,$$

其中$k$为常数，证明：$\int_0^a f(x)g(x)dx=\frac{k}{2}\int_0^a f(x)dx$。

**证** $\int_0^a f(x)g(x)\mathrm{d}x\xlongequal{x=a-u}\int_0^a f(a-u)g(a-u)\mathrm{d}u=k\int_0^a f(x)\mathrm{d}x-\int_0^a f(x)g(x)\mathrm{d}x$. 整理即得结论.

3-17　求定积分$I_{2n}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n}xdx$。

**解** $I_{2n}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^{2n}x}{\cos^{2n}x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2n-1}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^{2n-1}x\mathrm{d}\frac{1}{\cos^{2n-1}x}$

$=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n-1}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(2n-1)\sin^{2n-2}x\cos x}{\cos^{2n-1}x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2n-1}-I_{2(n-1)},$

所以

$$I_{2n}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{2n-5}-\cdots+(-1)^{n-1}+(-1)^n\frac{\pi}{4}.$$

3-18　计算极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}[\sqrt{n^2-1}+2\sqrt{n^2-2^2}+...+(n-1)\sqrt{n^2-(n-1)^2}]$。

**解**

$A_n=\frac{1}{n^3}[\sqrt{n^2-1}+2\sqrt{n^2-2^2}+\cdots+(n-1)\sqrt{n^2-(n-1)^2}]$

$=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{2}{n}\sqrt{1-\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{n-1}{n}\sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}\right.$

$\left.+\frac{n}{n}\sqrt{1-\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right],$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{1}{3}.$

3-19　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{n}{(n+n)^2}]$。

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2}+\frac{1}{(1+\frac{2}{n})^2}+\cdots+\frac{1}{(1+\frac{n}{n})^2}]$$

$$=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}dx=\frac{1}{2}$$

3-20　求 $\lim\limits_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})]^{\frac{1}{n}}$。

解：记 $J_n=[(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})]^{\frac{1}{n}}$

$$\ln J_n=\ln[(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})]^{\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{1}{n}[\ln(1+\frac{1}{n})+\ln(1+\frac{2}{n})+\cdots+\ln(1+\frac{n}{n})]$$

$$=\int_0^1\ln(1+x)dx=2\ln 2-1.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\ln J_n=2\ln 2-1,\lim_{n\to\infty}J_n=e^{2\ln 2-1}=\frac{4}{e}$$

3-21　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+j^2}$。

解　记 $I_n=\sum\limits_{j=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+j^2}$. 一方面，

$$I_n\leqslant\int_0^{n^2}\frac{dx}{1+x^2}=\arctan n^2\to\frac{\pi}{2},\quad n\to\infty,$$

另一方面，考虑函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 在 $[0,k]$ $(n>k)$ 上的积分和，得

$$\sum_{j=1}^{nk}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{nk}j\right)^2}\frac{k}{nk}=\sum_{j=1}^{nk}\frac{n}{n^2+j^2}<I_n,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}I_n\geqslant\int_0^k\frac{dx}{1+x^2}=\arctan k\to\frac{\pi}{2}(k\to\infty)$. 因此，$\lim\limits_{n\to\infty}I_n=\frac{\pi}{2}$.

3-22　$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $f(0)=0$，又 $f(x)$ 满足关系 $f'(x)\int_0^1 f(x)dx=25$，求 $f(x)$。

解　令

$$A=\int_0^1 f(x)dx,$$

则 $f'(x)=\frac{25}{A}$，又 $f(0)=0$，所以 $f(x)=\frac{25}{A}x$. 于是，代入上式有

$$A=\int_0^1\frac{25}{A}x\,dx=\frac{25}{2}\frac{1}{A},$$

解得 $A=\pm\frac{5}{\sqrt{2}}$. 因此，$f(x)=\pm 5\sqrt{2}x$.

3-23　求所有 $(0,+\infty)$ 上的正连续函数 $g(x)$，使得 $\forall x>0$ 有

$\frac{1}{2}\int_0^x [g(t)]^2 dt = \frac{1}{x}(\int_0^x g(t)dt)^2$。

**解** 对题设等式两边求导并整理得

$$\left(\int_0^x g(t)\mathrm{d}t\right)^2 - 2xg(x)\int_0^x g(t)\mathrm{d}t + \frac{x^2}{2}g^2(x) = 0,$$

解得

$$\int_0^x g(t)\mathrm{d}t = \left(1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)xg(x).$$

再对上式两边求导数得

$$\frac{\mp\sqrt{2}}{2\pm\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{g'(x)}{g(x)},$$

解得 $g(x) = Cx^{1-\sqrt{2}}$ 或 $g(x) = Cx^{1+\sqrt{2}}$ $(x>0)$.

3-24 问：是否存在区间[0,1]上连续的正函数 $f(x)$，使得下面的三个式子同时成立 $\int_0^1 f(x)dx = 1,\ \int_0^1 xf(x)dx = a,\ \int_0^1 x^2 f(x)dx = a^2$，其中 $a$ 为常数。

**解** 一方面，

$$\int_0^1 (x-a)^2 f(x)\mathrm{d}x > 0.$$

另一方面，

$$\int_0^1 (x-a)^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x - 2a\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x + a^2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

因此，满足题意的函数 $f(x)$ 不存在.

3-25 设 $f''(x)$ 在[0,1]上连续，且 $f(0) = f(1) = 0$，求证：

（1）$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x(x-1)f''(x)dx$；

（2）$\left|\int_0^1 f(x)dx\right| \le \frac{1}{12}\max\limits_{0\le x\le 1}\left|f''(x)\right|$。

**证** （1）

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^1 x(x-1)f''(x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^1 x(x-1)\mathrm{d}f'(x) \\ &= \frac{1}{2}x(x-1)f'(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)(2x-1)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^1 (2x-1)\mathrm{d}f(x) \\ &= -\frac{1}{2}(2x-1)f(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由条件 $f(0)=f(1)=0$ 知结论成立.

（2）记 $M = \max\limits_{0\le x\le 1}|f''(x)|$，则由（1）有

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{M}{2}\int_0^1 x(1-x)\mathrm{d}x = \frac{M}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = \frac{M}{12}.$$

3-26 设 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上具有一阶连续导数，且 $f'(x) \ge 0$，求证：对任意自然数 $n$ 有 $\left|\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx\right| \le \frac{2}{n}[f(2\pi) - f(0)]$。

证

$$\text{不等式左端}=\left|\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}f(x)\mathrm{d}\cos nx\right|=\left|\frac{1}{n}f(x)\cos nx\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}f'(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{n}[f(2\pi)-f(0)]+\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}f'(x)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{2}{n}[f(2\pi)-f(0)]=\text{右端}.$$

3-27　设 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的非负连续函数，且 $f^2(x)\le 1+2\int_0^x f(t)dt$，证明：

$f(x)\le 1+x$，$x\in[0,1]$。

证　令 $F(x)=1+2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $f^2(x)\leqslant F(x)$，且 $F'(x)=2f(x)\leqslant 2\sqrt{F(x)}$，于是

$$\sqrt{F(x)}-1=\int_0^x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{F(t)}\,\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{F'(t)}{2\sqrt{F(t)}}\mathrm{d}t\leqslant\int_0^x\mathrm{d}t=x,$$

因此 $f(x)\leqslant\sqrt{F(x)}\leqslant 1+x$.

3-28　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$0\le f'(x)\le 1$ 且 $f(0)=0$，证明：

$(\int_0^1 f(x)dx)^2\ge\int_0^1 f^3(x)dx$。

证　只需证明一般情形

$$\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2\geqslant\int_0^x f^3(t)\mathrm{d}t.$$

令 $F(x)=\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2-\int_0^x f^3(t)\mathrm{d}t$，则

$$F'(x)=2f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^3(x)=f(x)\left[2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(x)\right],$$

再令 $G(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(x)$，则

$$G'(x)=2f(x)-2f(x)f'(x)=2f(x)[1-f'(x)],$$

由已知条件知 $G(x)\geqslant 0$，从而 $F(x)\geqslant 0$.

3-29　设 $|a|\le 1$，求 $I(a)=\int_{-1}^1|x-a|e^x dx$ 的最大值。

解　$I(a)=\int_{-1}^a(a-x)e^x\mathrm{d}x+\int_a^1(x-a)e^x\mathrm{d}x$

$$=e^x(a-x)\Big|_{-1}^a+\int_{-1}^a e^x\mathrm{d}x+e^x(x-a)\Big|_a^1-\int_a^1 e^x\mathrm{d}x$$
$$=-a(e+e^{-1})+2e^a-2e^{-1},$$

$I'(a)=-(e+e^{-1})+2e^a$，$I''(a)=2e^a>0$. 因此，$I(a)$ 只能在 $a=\pm 1$ 处取得最大值，而

$$I(1)=e-3e^{-1},\quad I(-1)=e+e^{-1},$$

所以 $I(a)$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值为 $I(-1)=e+e^{-1}$.

3-30　设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，且 $F(0)=1$，$F(x)f(x)=\cos 2x$，求 $\int_0^\pi|f(x)|dx$.

解：$F'(x)=f(x)$，$F(x)F'(x)=\cos 2x$，$\int F(x)F'(x)dx=\int\cos 2xdx$

$F^2(x)=\sin 2x+C$，由 $F(0)=1$ 知 $C=1$，$F(x)=\sqrt{1+\sin 2x}=|\cos x+\sin x|$，

$|f(x)|=\frac{|\cos 2x|}{|F(x)|}=\frac{|\cos^2 x-\sin^2 x|}{|\cos x+\sin x|}=|\cos x-\sin x|$

$\int_0^{\pi}|f(x)|dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(\sin x-\cos x)dx=(\sqrt{2}-1)+(1+\sqrt{2})=2\sqrt{2}.$

3-31　设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=0$，且其反函数为 $g(x)$，若 $\int_0^{f(x)}g(t)dt=x^2e^x$，求 $f(x)$。

解：$\because f(x)$ 与 $g(x)$ 互为反函数，$\therefore g[f(x)]=x$

由 $\int_0^{f(x)}g(t)dt=x^2e^x$，得 $g[f(x)]\cdot f'(x)=2xe^x+x^2e^x$，

$\Rightarrow f'(x)=2e^x+xe^x$，$\therefore f(x)=\int(2e^x+xe^x)dx=e^x+xe^x+C$，

$\because f(0)=0$，$\Rightarrow c=-1$，$\therefore f(x)=e^x+xe^x-1$

3-32　计算 $I=\int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|\frac{d}{dx}\cos(\ln\frac{1}{x})\right|dx$，其中 $n$ 为自然数。

解：$I=\int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|\frac{d}{dx}\cos(\ln\frac{1}{x})\right|dx=\int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|-\sin(\ln\frac{1}{x})\cdot x\cdot(-\frac{1}{x^2})\right|dx=\int_{e^{-2n\pi}}^{1}\left|\sin(\ln\frac{1}{x})\cdot\frac{1}{x}\right|dx$

$\overset{令\ln\frac{1}{x}=u}{=}\int_0^{2n\pi}|\sin u|du=2n\int_0^{\pi}|\sin u|du=4n$

$\overset{或令\frac{1}{x}=t}{=}\int_{e^{2n\pi}}^{1}|\sin(\ln t)|\cdot t\cdot(-\frac{1}{t^2})dt=\int_1^{e^{2n\pi}}|\sin(\ln t)|d(\ln t)\overset{令\ln t=u}{=}\int_0^{2n\pi}|\sin u|du=4n$

3-33　设 $f(x)$ 在[0，1]上连续，在（0，1）内可导，$f(0)=0$，$0\le f'(x)\le 1$，求证：$[\int_0^1 f(x)dx]^2\ge\int_0^1 f^3(x)dx$

证明：令 $F(x)=[\int_0^x f(x)dx]^2-\int_0^x f^3(x)dx$，则

$F'(x)=2\int_0^x f(x)dx\cdot f(x)-f^3(x)=f(x)[2\int_0^x f(x)dx-f^2(x)]$，

再令 $\varphi(x)=2\int_0^x f(x)dx-f^2(x)$，则 $\varphi'(x)=2f(x)-2f(x)f'(x)=2f(x)[1-f'(x)]$，

因为 $f(0)=0$，$f'(x)\ge 0$，所以当 $x\ge 0$ 时，$f(x)\ge f(0)=0$，

所以 $\varphi'(x)\ge 0$，$\varphi(x)\ge\varphi(0)=0$，因此有 $F'(x)\ge F(0)=0$，故 $F(1)\ge 0$，

从而有 $[\int_0^1 f(x)dx]^2\ge\int_0^1 f^3(x)dx$。

3-34　设 $y=y(x)$ 是由方程 $y(x-y)^2=x$ 所确定的隐函数，试求 $I=\int\frac{dx}{x-3y}$.

解 (1) 令 $x-y(x)=t$，则原式可写为 $yt^2=x$，由此知

$$x=\frac{t^2}{t^2-1},\qquad y=\frac{t}{t^2-1},$$

$$dx=\frac{t^2(t^2-3)}{(t^2-1)^2}dt,\qquad x-3y=\frac{t(t^2-3)}{t^2-1}.$$

从而我们有 $I=\int\frac{t\,dt}{t^2-1}=\frac{1}{2}\ln|(x-y(x))^2-1|+C.$

---

3-35 求不定积分 $I=\int\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+x}}}\,dx$（其中 $\sqrt{\ }$ 有 $n$ 重）。

解 令 $x=2\cos t$，则可得

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+x}}}=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+2\cos t}}}$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}}=\cdots=2\cos\left(\frac{t}{2^n}\right).$$

从而我们有

$$I=-4\int\sin t\cos\left(\frac{t}{2^n}\right)dt=-2\int\left[\sin\left(\frac{2^n+1}{2^n}t\right)-\sin\left(\frac{2^n-1}{2^n}t\right)\right]dt$$

$$=\frac{2^{n+1}}{2^n+1}\cos\left(\frac{2^n+1}{2^n}\arccos\left(\frac{x}{2}\right)\right)-\frac{2^{n+1}}{2^n-1}\cos\left(\frac{2^n-1}{2^n}\arccos\left(\frac{x}{2}\right)\right)+C.$$

3-36 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上严格递增的可微函数，且 $F'(x)=f(x)$，$g(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数，用 $F(x)$，$g(x)$ 表示 $g(x)$ 的原函数 $G(x)$。

解 在 $G(x)=\int g(x)dx$ 中令 $x=f(y)$，则有

$$G(x)=\int g[f(y)]df(y)=\int y\,df(y)$$

$$=yf(y)-\int f(y)dy=g(x)\cdot x-\int f[g(x)]dg(x)$$

$$=xg(x)-\int f[g(x)]g'(x)dx=xg(x)-\int[F(g(x))]'dx$$

$$=xg(x)-F[g(x)]+C.$$

3-37 设有抛物线 $l_1: y=ax^2+bx+c(a<0)$，且 $l_1$ 过两点 $(0,0)$，$(1,2)$，试求 $a,b,c$ 的值，使得曲线 $l_1$ 与曲线 $l_2:-x^2+2x$ 所围成的平面区域之面积 $S$ 最小。

解 (1) 由题设易知 $c=0$，$a+b=2$。又 $l_1$ 与 $l_2$ 的另一交点横坐标为 $a/(1+a)$，由此得

$$S=\int_0^{a/(1+a)}[ax^2+(2-a)x+x^2-2x]dx=-a^3/6(1+a)^2.$$

由 $\frac{dS}{da}=0$ 易知 $a=-3$ 是最小值点。

3-38 证明：$I=\lim\limits_{n\to\infty}n^3\int_n^{2n}\frac{xdx}{1+x^5}=\frac{7}{24}$。

证明 (1) 对积分作变量替换 $x=1/t$，可知 $\int_n^{2n}\frac{x\,dx}{1+x^3}=\int_{1/2n}^{1/n}\frac{t^2\,dt}{1+t^3}$。为求 $I$，将 $n$ 以连续变量的无限增大来考察。即 $1/n\to 0$ 变为 $x\to 0+$，我们有

$$I=\lim_{n\to\infty}n^2\int_{1/2n}^{1/n}\frac{t^2\,dt}{1+t^3}=\lim_{x\to 0+}\int_{x/2}^{x}\frac{t^2\,dt}{1+t^3}\Big/x^2$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{3}\,\frac{x^2/(1+x^3)-(x^2/4)/2[1+(x/2)^3]}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x^3}-\frac{2^2}{2^3+x^3}\right)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^3}\right)=\frac{7}{24}.$$

3-39　计算积分 $\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{a-x}dx(a>1)$

解　$I\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{a-x}dx\underline{\underline{t=-x}}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}}{a+t}dt=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)\sqrt{1-x^2}dx=a\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{a^2-x^2}dx$

$=2a\int_0^1\frac{\sqrt{1-x^2}}{a^2-x^2}dx\ \underline{\underline{x=\sin\theta}}\ 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\theta}{a^2-\sin^2\theta}d\theta=2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2\theta}{a^2-\sin^2\theta}d\theta$

$=2a\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta+(1-a^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a^2-\sin^2\theta}d\theta\right)=\pi a-a\sqrt{a^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(a^2-1)\tan^2\theta+a^2}d\left(\sqrt{a^2-1}\tan\theta\right)$

$=\pi\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)$.

3-40　求极限 $\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{3^2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$

解：令 $I=\left[\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{3^2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$，

$\ln I=\frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)+\ln\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i^2}{n^2}\right)$

$\lim_{n\to\infty}\ln I=\int_0^1\ln\left(1+x^2\right)dx$

$=\ln 2+\frac{\pi-4}{2}$　从而 $\lim_{n\to\infty}I=2e^{\frac{\pi-4}{2}}$，即原式 $=2e^{\frac{\pi-4}{2}}$

3-41　求 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{n+\sqrt{n}}+\frac{1}{n+\sqrt{2n}}+\frac{1}{n+\sqrt{3n}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n\cdot n}}\right)$

解：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\sqrt{n}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n\cdot n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\sqrt{\frac{k}{n}}}=\int_0^1\frac{1}{1+\sqrt{x}}dx=2-2\ln 2.$$

3-42　设 $f(x)\in C[\mathbf{0,1}]$，则有 $\int_0^1\left[\int_0^x\left(\int_0^y f(x)f(y)f(t)dt\right)dy\right]dx=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^3$。

证明 (4) 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，易知 $F(0)=0$。我们有

$$\int_0^1\left[\int_0^x\left(\int_0^y f(x)f(y)f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\left[\int_0^x f(x)f(y)F(y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\left[\int_0^x F(y)\mathrm{d}F(y)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 f(x)\cdot\frac{1}{2}F^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 F^2(x)\mathrm{d}F(x)=\frac{1}{6}F^3(1).$$

3-43　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一阶导数连续，$f(a)=f(b)=0$，且 $\int_a^b f^2(x)dx=1$，则有：

$$\left(\int_a^b [f'(x)]^2dx\right)\left(\int_a^b x^2f^2(x)dx\right)>\frac{1}{4}\text{。}$$

(3) (i) 首先指出，对任给 $\lambda>0$，有 $f'(x)+\lambda xf(x)\not\equiv 0$。实际上，若存在 $\lambda_0>0$，使得 $f'(x)+\lambda_0 xf(x)=0(a\leqslant x\leqslant b)$，则令 $F(x)=e^{\frac{\lambda_0}{2}x^2}f(x)$，可知

$$F'(x)=e^{\frac{\lambda_0}{2}x^2}[f'(x)+\lambda_0 xf(x)]\equiv 0\qquad(a\leqslant x\leqslant b).$$

从而得 $F(x)=C$(常数)，又知 $f(x)=C\cdot e^{-\frac{\lambda_0}{2}x^2}$，因为 $f(a)=f(b)=0$，所以 $C=0$，这样我们有 $f(x)\equiv 0$，矛盾。

(ii) 由(i)知 $\int_a^b[f'(x)+\lambda xf(x)]^2\mathrm{d}x>0$，即

$$\int_a^b[f'(x)]^2dx+2\lambda\int_a^b xf(x)f'(x)dx+\lambda^2\int_a^b f^2(x)dx>0$$

视上式为变量 $\lambda$ 的二次方程，易知

$$\left(\int_a^b xf(x)f'(x)dx\right)^2<\left(\int_a^b[f'(x)]^2dx\right)\bullet\left(\int_a^b x^2f^2(x)dx\right)$$

根据分部积分法以及题设可得

上式左端 $=\left[\frac{1}{2}\int_a^b xdf^2(x)\right]^2=\left[\frac{x}{2}f^2(x)\Big|_a^b-\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx\right]^2=\frac{1}{4}$，即为所证。

3-44　设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调减少的连续函数，证明：

$$\int_0^x(x^2-3t^2)f(t)dt\geq 0\text{。}$$

证明：作函数 $F(x)=\int_0^x(x^2-3t^2)f(t)\mathrm{d}t$，$F(0)=0$，

只要证明 $F(x)$ 单调增加，而：

$$F(x)=x^2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x 3t^2f(t)\mathrm{d}t$$

$$F'(x)=2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+x^2f(x)-3x^2f(x)$$

$$=2x[f(\xi)-f(x)]x=2x^2[f(\xi)-f(x)]\geqslant 0$$

所以 $F(x)$ 单调增加，$F(x)\geqslant F(0)=0$，即：

$$\int_0^x(x^2-3t^2)f\mathrm{d}t\geqslant 0$$

3-45　设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一阶导数连续，且有 $\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f^2(x)dx<+\infty$，$\int_{-\infty}^{+\infty}[f'(x)]^2dx<+\infty$，证明:

$$(1)\ xf^2(x)\leq 4\left(\int_x^{+\infty}tf^2(t)\right)^{1/2}\left(\int_x^{+\infty}[f'(t)]^2dt\right)^{1/2}(x\geq 0).$$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)dx \le 2\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f^2(x)dx\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}[f'(x)]^2 dx\right)^{1/2} (x \ge 0)$

证明：

(4) (i) 令 $f_0=f_0(x)=f(x)(x\geq 0)$，以及

$$\alpha^2=\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f^2(t)\mathrm{d}t,\quad \beta^2=\int_{-\infty}^{+\infty}[f'(x)]^2\mathrm{d}t.$$

注意到 $f(x+t)-f(x)=\int_x^{x+t} f'(u)\mathrm{d}u\,(t\geq 0)$，故可推出不等式 $|f(x+t)-f(x)|\leq\beta\sqrt{t}\,(t\geq 0)$。假定 $0\leq h\leq f_0^2/\beta^2$，则对 $0\leq t\leq h$，有 $|f(x+t)|\geq f_0-\beta\sqrt{h}\geq 0$。显然 $\alpha\geq x\sqrt{h}(f_0-\beta\sqrt{h})$。取 $\sqrt{h}$ 之值使得上式右端达最大值，即 $\sqrt{h}=f_0/2\beta$。从而导出 $xf_0^2(x)\leq 4\alpha\beta$。

(ii) 实际上，结论(i)对 $x<0$ 亦真，从而知 $\lim_{|x|\to+\infty} x\cdot f^2(x)=0$。应用分部积分公式，我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x=-\int_{-\infty}^{+\infty} x[2f'(x)f(x)]\mathrm{d}x \leq 2\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}[f'(x)]^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

3-46　求 $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x \sin(\frac{\pi}{x+t})dt$。

解 (1) 应用公式 $x-x^3/6<\sin x<x\,(x>0)$，可知

$$\int_0^x \frac{\pi\mathrm{d}t}{x+t}-\frac{\pi^3}{6}\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{(x+t)^3}<\int_0^x\sin\left(\frac{\pi}{x+t}\right)\mathrm{d}t<\int_0^x\frac{\pi\mathrm{d}t}{x+t}.$$

注意到 $\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{x+t}=\ln 2$，$\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{(x+t)^3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4x^2}\right)$，故在上式中令 $x\to+\infty$，即得

$$\pi\ln 2\leq I\leq\pi\ln 2,\qquad I=\pi\ln 2.$$

3-47　设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上可微，$f(1)=1$，若有 $f'(x)=1/(x^2+f^2(x))(1\le x<\infty)$，

则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)<1+\frac{\pi}{4}$。

证明 (1) 易知 $f'(x)>0$，$f(x)$递增，故有

$$f(t)>f(1)=1,\qquad f'(t)=\frac{1}{t^2+f^2(t)}<\frac{1}{t^2+1}.$$

从而可知

$$f(x)=1+\int_1^x f'(t)\mathrm{d}t<1+\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}<1+\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=1+\pi/4\qquad(x>1).$$

由此即可得证。

3-48　计算积分 $I=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}(a>1)$。

解 (1) 令 $x=\sin\theta$，我们有

$$I=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{a-\sin\theta}\quad\left(令\tan\frac{\theta}{2}=t\right)$$

$$=2\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{at^2-2t+a}=\frac{2}{a}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{\left(t-\frac{1}{a}\right)^2+1-\left(\frac{1}{a}\right)^2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\arctan\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\left(t-\frac{1}{a}\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\left(\arctan\frac{a-1}{\sqrt{a^2-1}}+\arctan\frac{a+1}{\sqrt{a^2-1}}\right)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\left(\arctan\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}+\arctan\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

3-49　确定 $a,b,c$，使得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^2)}{t}dt}=c\neq 0$。

解：因为分子 $a-\sin x\to 0$，则分母

$\int_b^x \frac{\ln(1+t^2)}{t}dt\to\int_b^0\frac{\ln(1+t^2)}{t}dt=0$，必有 $b=0$。

$\left(t>0,\frac{\ln(1+t^2)}{t}>0;t<0,\frac{\ln(1+t^2)}{t}>0\right)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_0^x\frac{\ln(1+t^2)}{t}dt}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{\frac{\ln(1+x^2)}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{x^2}$$

则 $a=1$，否则极限为无穷大，此时 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$，$c=\frac{1}{2}$。

3-50　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{\dfrac{(n+k)(n+k+1)}{n^4}}$。

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k+1}{n}\right)}\cdot\frac{1}{n}$$

$$\left(1+\frac{k}{n}<\sqrt{\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k+1}{n}\right)}<1+\frac{k+1}{n}\right)$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1(1+x)dx=\frac{3}{2}$。

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k+1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)+1\right]\cdot\frac{1}{n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}+0=\int_0^1(1+x)dx=\frac{3}{2}$

所以：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{(n+k)(n+k+1)}{n^4}}=\int_0^1(1+x)dx=\frac{3}{2}.$$

3-51　设 $f(x)=\int_0^x(t-t^2)\sin^n t\,dt\,(n\in N)$，证明：$0\le x\le\pi$ 时，$f(x)\le\dfrac{1}{(n+2)(n+3)}$。

证明：由 $f'(x)=(x-x^2)\sin^n x=0$，得 $x=0,x=1,x=\pi$。

在 $(0,\pi)$ 内有唯一驻点 $x=1$。

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$，当 $1<x<\pi$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(1)$ 为唯一极小值，就是最大值。

$$f(1)=\int_0^1(t-t^2)\sin^n t\,dt\leqslant\int_0^1(t-t^2)t^n dt=\frac{1}{(n+2)(n+3)}.$$

所以 $f(x)\leqslant\frac{1}{(n+2)(n+3)}$。

3-52　设 $f(x)$ 在 $[-2a,2a](a>0)$ 上具有连续导数，计算

$$I=\lim_{a\to 0^+}\frac{1}{4a^2}\int_{-a}^{a}[f(t+a)-f(t-a)]dt.$$

解：$I=\lim\limits_{a\to0^+}\frac{1}{4a^2}[f(\xi+a)-f(\xi-a)]2a=\lim\limits_{a\to0^+}\frac{1}{2a}[f(\xi+a)-f(\xi-a)]$

$=\lim\limits_{a\to0^+}\frac{1}{2a}f'(\eta)[(\xi+a)-(\xi-a)]=\lim\limits_{a\to0^+}f'(\eta)=f'(0)$

3-53　计算$\int_{-1}^{1}[(\frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x})''+\sin x]dx$。

解:值为 0，因为奇函数的导数为偶函数，偶函数的导数为奇函数。

3-54　计算积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx$。

$I_n-I_{n-1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x}{\sin x}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2nx\,dx=0$,

所以，$I_n=I_{n-1}$,

$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x}dx=\frac{\pi}{2}$

$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 3x}{\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2x+x)}{\sin x}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x}{\sin x}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cos^2 x+(\cos^2 x-\sin^2 x)\sin x}{\sin x}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\cos^2 x-\sin^2 x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx.$

所以，

3-55　计算积分$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^n)(1+x^2)}dx$。

$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^n)(1+x^2)}dx$ (令 $t=\frac{1}{x}$ 或 $x=\tan t$)

$=\int_{+\infty}^{0}\frac{1}{(1+1/t^n)(1+1/t^2)}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$

$=\int_0^{+\infty}\frac{t^n}{(1+t^n)(1+t^2)}dt$

$=\int_0^{+\infty}\frac{t^n+1-1}{(1+t^n)(1+t^2)}dt$

$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt-\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^n)(1+t^2)}dt$

所以：

$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^n)(1+t^2)}dt=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{4}$

3-56　设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续且单调增加，证明

$$\int_a^b xf(x)dx\geq\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx。$$

证明：只要证明$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x-\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$。

令$F(t)=\int_a^t xf(x)\mathrm{d}x-\frac{a+t}{2}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$，则$F(t)$在$[a,b]$上连续可导，且$F(a)=0$。

$$F'(t)=tf(t)-\frac{1}{2}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x-\frac{a+t}{2}f(t)$$
$$=\frac{1}{2}tf(t)-\frac{1}{2}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x-\frac{a}{2}f(t)$$
$$=\frac{1}{2}(t-a)f(t)-\frac{1}{2}f(\xi)(t-a)\quad(a\leqslant\xi\leqslant t)$$
$$=\frac{1}{2}[f(t)-f(\xi)](t-a)\geqslant 0$$

（因为$f(x)$在$[a,b]$上连续且单调增加，则$f(t)-f(\xi)\geqslant 0$）

$F(x)$在$[a,b]$上连续且单调增加，故$F(b)\geqslant 0$，即有

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

3-57　设$f(x)$在$[a,b]$上具有连续导数，证明：

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|+\int_a^b|f'(x)|dx\geq\max_{a\leq x\leq b}|f(x)|$$

证明：由积分中值定理$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\ (a\leqslant\xi\leqslant b)$

$\forall x\in[a,b]$（包括最大点）

$$|f(x)|-|f(\xi)|\leqslant|f(x)-f(\xi)|$$
$$=\left|\int_\xi^x f'(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_\xi^x|f'(t)|\mathrm{d}t\leqslant\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x$$

所以
$$|f(x)|\leqslant\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x$$
$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x$$

3-58　设$f'(x)$在$[0,2\pi]$上连续，且$f'(x)>0$，证明：对任意$n$有：

$$\left|\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx dx\right|\leq\frac{2}{n}[f(2\pi)-f(0)]。$$

证明：因为

$$\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=-\frac{1}{n}\left[f(x)\cos nx\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}f'(x)\cos nx\mathrm{d}x\right]$$
$$=-\frac{1}{n}\left[f(2\pi)-f(0)-\int_0^{2\pi}f'(x)\cos nx\mathrm{d}x\right]$$
$$\left|\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right|=\left|-\frac{1}{n}\left[f(2\pi)-f(0)-\int_0^{2\pi}f'(x)\cos nx\mathrm{d}x\right]\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{n}[f(2\pi)-f(0)]+\int_0^{2\pi}f'(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{n}[f(2\pi)-f(0)]$$

3-59　设实值函数$F(x)$满足$F(1)=1$，并且对于$x\geq 1$，若$F'(x)=\dfrac{1}{x^2+F^2(x)}$

证明：$\lim_{x\to\infty}F(x)$存在，并且小于$1+\dfrac{\pi}{4}$。

证明：

$F'(x)>0$，所以$F(x)$是严格增函数，当$x>1$时，有$F(x)>F(1)=1$，则

$$F'(x)<\frac{1}{x^2+1},$$

$$F(x)=1+\int_1^x F'(y)dy<1+\int_1^x\frac{1}{y^2+1}dy<1+\int_1^{\infty}\frac{1}{y^2+1}dy=1+\frac{\pi}{4}$$

既然$F(x)$是有界严格增函数，所以$\lim\limits_{x\to\infty}F(x)$存在，并且

$$\lim_{x\to\infty}F(x)=1+\int_1^{\infty}F'(x)dy<1+\int_1^{\infty}\frac{1}{y^2+1}dy=1+\frac{\pi}{4}.$$

3-60　设 $f(u)\in C^2$，且 $F(x,y)=\int_x^y f(xyz)dz$，求 $F_x(x,y)$。

解：令 $xyz=u, z=\frac{1}{xy}u, dz=\frac{1}{xy}du$，

且当 $z=y$ 时，$u=xy^2$；当 $z=x$ 时，$u=x^2y$，则 $F(x,y)=\frac{1}{xy}\int_{x^2y}^{xy^2}f(u)du$，

所以 $F_x(x,y)=\dfrac{[f(xy^2)y^2-f(x^2y)\cdot 2x]xy-y\int_{x^2y}^{xy^2}f(u)du}{(xy)^2}$

$$=\frac{y}{x}f(xy^2)-\frac{2}{y}f(x^2y)-\frac{1}{x^2y}\int_{x^2y}^{xy^2}f(u)du.$$

3-61　假设曲线$L_1$：$y=1-x^2$（$0\le x\le 1$）、$x$轴和$y$所围成的平面区域被曲线$L_2$：$y=ax^2$分为面积相等的的两部分，其中$a$是大于零的常数，试确定$a$的值。

解：先求出两条曲线交点的横坐标 $x=\sqrt{\frac{1}{a+1}}$

积分 $\int_0^{\sqrt{\frac{1}{a+1}}}(1-x^2-ax^2)dx=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{a+1}}$　　又，$\frac{1}{2}\int_0^1(1-x^2)dx=\frac{1}{3}$　　由 $\frac{2}{3\sqrt{1+a}}=\frac{1}{3}$ 知，$a=3$

3-62　求曲线 $y=x\sin x, x\in[\pi,2\pi]$ 与 $x$ 轴围成的平面图形绕 $y$ 轴旋转所得的旋转体体积。

**Solution 5.** 当 $x$ 从 $\pi$ 变化到 $\frac{3}{2}\pi$ 形成的一段弧记为 $x=\phi_1(y)$，当 $x$ 从 $\frac{3}{2}\pi$ 变化到 $2\pi$ 形成的一段弧记为 $x=\phi_2(y)$，则旋转体的体积为

$V=\pi\int_{-\frac{3}{2}\pi}^{0}\phi_2^2(y)dy-\pi\int_{-\frac{3}{2}\pi}^{0}\phi_1^2(y)dy=\pi\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}x^2d(x\sin x)-\pi\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\pi}x^2d(x\sin x)=\pi\int_{\pi}^{2\pi}x^2d(x\sin x)=\pi\int_{\pi}^{2\pi}x^2(x\cos x+\sin x)dx=\pi(10\pi^2-8).$

3-63　设 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 连续，$F(x)=\frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a}f(t)\,dt\ (a>0)$，$G(x)=\int_0^x f(t)\,dt$，

试解答下列问题：（1）用 $G(x)$ 表示 $F(x)$；（2）求 $F'(x)$；

（3）求证：$\lim\limits_{a\to 0} F(x) == f(x)$；

（4）设 $f(x)$ 在 $[x-a,x+a]$ 内的最大值和最小值分别是 $M$、$m$ ,求证：$\left|F(x)-f(x)\right| \le M-m$.

解（1）$F(x)=\frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} f(t)dt=\frac{1}{2a}[\int_0^{x+a} f(t)dt-\int_0^{x-a} f(t)dt]=\frac{1}{2a}[G(x+a)-G(x-a)]$

（2）$F'(x)=\frac{1}{2a}[G'(x+a)-G'(x-a)]=\frac{1}{2a}[f(x+a)-f(x-a)]$

（3）$\lim\limits_{a\to 0}F(x)=\lim\limits_{a\to 0}\frac{G(x+a)-G(x-a)}{2a}=\lim\limits_{a\to 0}\frac{[G(x+a)-G(x)]+[G(x)-G(x-a)]}{2a}$

$=\frac{1}{2}[G'(x)+G'(x)]=G'(x)=f(x)$

（4）$|F(x)-f(x)|=|\frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} f(t)dt-f(x)|=|\frac{1}{2a}[(x+a)-(x-a)]f(\xi)-f(x)|$

$=|f(\xi)-f(x)|\le M-m \quad (x-a\le\xi\le x+a)$

# 四、多元函数微分学

（竞赛大纲）

1. 多元函数的概念、二元函数的几何意义.
2. 二元函数的极限和连续的概念、有界闭区域上多元连续函数的性质.
3. 多元函数偏导数和全微分、全微分存在的必要条件和充分条件.
4. 多元复合函数、隐函数的求导法.
5. 二阶偏导数、方向导数和梯度.
6. 空间曲线的切线和法平面、曲面的切平面和法线.
7. 二元函数的二阶泰勒公式.
8. 多元函数极值和条件极值、拉格朗日乘数法、多元函数的最大值、最小值及其简单应用.

4-1 设 $z=z(x,y)$ 二阶连续可微，并且满足方程 $A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，其中，$B^2-AC>0$，若令 $u=x+\alpha y,\ v=x+\beta y$，试确定常数 $\alpha,\beta$ 的值，使原方程变为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，并求出 $z(x,y)$。

**解** 将 $x,y$ 看成自变量，$u,v$ 看成中间变量，利用链式法则，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\left(\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\right)z,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\alpha\frac{\partial z}{\partial u}+\beta\frac{\partial z}{\partial v}=\left(\alpha\frac{\partial}{\partial u}+\beta\frac{\partial}{\partial v}\right)z,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\right)z=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\left(\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\right)^2 z,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial u}+\beta\frac{\partial}{\partial v}\right)z=\alpha^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\alpha\beta\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\beta^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$=\left(\alpha\frac{\partial}{\partial u}+\beta\frac{\partial}{\partial v}\right)^2 z,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial u}+\beta\frac{\partial}{\partial v}\right)z=\alpha\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(\alpha+\beta)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\beta\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\alpha\frac{\partial}{\partial u}+\beta\frac{\partial}{\partial v}\right)z.$$

由此可得

$$0=A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$=(A+2B\alpha+C\alpha^2)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2[A+B(\alpha+\beta)+C\alpha\beta]\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$$

$$+(A+2B\beta+C\beta^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

只要取 $\alpha,\beta$ 使得

$$\begin{cases}A+2B\alpha+C\alpha^2=0,\\ A+2B\beta+C\beta^2=0,\end{cases}$$

则可得 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$. 由于 $B^2-AC>0$，方程 $A+2Bt+Ct^2=0$ 有两个不同实根，分别为

$$\alpha=-B+\sqrt{B^2-AC},\quad \beta=-B-\sqrt{B^2-AC}.$$

又

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0\Rightarrow\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial v}=\varphi(v)\Rightarrow z=\int\varphi(v)\mathrm{d}v+f(u),$$

所以，$z=f(u)+g(v)=f(x+\alpha y)+g(x+\beta y)$.

4-2　设 $f(x,y)=\begin{cases}x^2\arctan\dfrac{y}{x}-y^2\arctan\dfrac{x}{y}, & xy\neq 0\\ 0 & xy=0\end{cases}$，当 $xy=0$ 时，求 $f_{xy}(x,y)$。

2. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2\arctan\dfrac{y}{x}-y^2\arctan\dfrac{x}{y}, & xy\neq 0 \\ 0 & xy=0 \end{cases}$，当 $xy=0$ 时，求 $f''_{xy}(x,y)$。

【解】(1) $x=y=0$，按照偏导数的定义，有

$$f''_{xy}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f'_x(0,\Delta y)-f'_x(0,0)}{\Delta y},$$

由函数表达式，得到

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0,$$

$$f'_x(0,\Delta y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,\Delta y)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\arctan\dfrac{\Delta y}{\Delta x}-(\Delta y)^2\arctan\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}{\Delta x}=-\Delta y$$

所以 $f''_{xy}(0,0)=-1$。

(2) $x\neq 0, y=0$，按照偏导数的定义，有

$$f''_{xy}(x,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f'_x(x,\Delta y)-f'_x(x,0)}{\Delta y},$$

由函数表达式，得到

$$f'_x(x,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,0)-f(x,0)}{\Delta x}=0,$$

$$f'_x(x,\Delta y)=2x\arctan\frac{\Delta y}{x}-\frac{x^2\Delta y}{x^2+(\Delta y)^2}-\frac{(\Delta y)^3}{x^2+(\Delta y)^2}$$

所以 $f''_{xy}(x,0)=1$。

(3) $x=0, y\neq 0$ 时，同 (2) 可以得到 $f''_{xy}(0,y)=-1$。

4-3　设函数 $u(x,y)$ 满足 $u_{xx}-u_{yy}=0$ 与 $u(x,\ 2x)=x$，$u_x(x,\ 2x)=x^2$，求 $u_{xx}(x,\ 2x)$，$u_{xy}(x,\ 2x)$，$u_{yy}(x,\ 2x)$（$u_x$ 表示 $u$ 对 $x$ 的一阶偏导数，其他类推）.

[解]等式 $u(x,2x)=x$ 两端对 $x$ 求导,得 $u_x(x,2x)+2u_y(x,2x)=1$

$\because u_x(x,2x)=x^2 \therefore u_y(x,2x)=\frac{1}{2}(1-x^2)$　这两个等式,对 $x$ 求导得

$u_{xx}(x,2x)+2u_{xy}(x,2x)=2x$，$u_{yx}(x,2x)+2u_{yy}(x,2x)=-x.$

由已知条件得 $u_{xx}=u_{yy}, u_{xy}=u_{yx}$,故解得 $u_{xx}=u_{yy}=-\frac{4}{3}x$，　$u_{xy}=\frac{5}{3}x$.

4-4　在曲面 $(x^2y+y^2z+z^2x)^2+(x-y+z)=0$ 上点（0,0,0）处的切平面内求一点 P，使点 P 到点 A（2,1,2）和点 B（-3,1,-2）的距离的平方和最小。

**解** **方法1** 令 $G(x,y,z)=(x^2y+y^2z+z^2x)^2+(x-y+z)$，则其在点(0,0,0)处的切平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\{G'_x,G'_y,G'_z\}_{(0,0,0)}=(1,-1,1).$$

从而 $\pi$ 的方程为 $x-y+z=0$.

设所求点为 $P(x,y,z)$，于是问题就是在条件 $x-y+z=0$ 下，求

$$u=(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2+(x+3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2$$

的最小值. 采用拉格朗日乘数法，设辅助函数

$$F=(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2+(x+3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2+\lambda(x-y+z),$$

其中 $\lambda$ 为常数. $F$ 对 $x,y,z$ 求偏导数并令其为零，得

$$F'_x=4x+2+\lambda=0,\quad F'_y=4y-4-\lambda=0,\quad F'_z=4z+\lambda=0.$$

解以上 3 式与条件 $x-y+z=0$ 联立的方程组，可得唯一驻点：$x=0,y=\frac{1}{2}$，$z=\frac{1}{2}$. 由问题本身知最小值必定存在，所以，唯一可能的极值点 $\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 即为问题的最小值点. 此时，最小值 $u\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=22$.

**方法2** 方法 1 所得的 $\pi$ 的方程写成 $z=y-x$，将其代入到 $u(x,y,z)$ 中得

$$u(x,y)=(x-2)^2+(x+3)^2+2(y-1)^2+(y-x-2)^2+(y-x+2)^2$$

再求 $u(x,y)$ 的无条件极值. 将 $u(x,y)$ 对 $x,y$ 求偏导数并令其为零，得

$$\begin{cases}u'_x=8x-4y+2=0,\\ u'_y=8y-4x-4=0,\end{cases}$$

解此方程组，得 $x_0=0,y_0=\frac{1}{2}$. 因为

$$A=u''_{xx}(x_0,y_0)=8,\quad B=u''_{xy}(x_0,y_0)=-4,\quad C=u''_{yy}(x_0,y_0)=8,$$

于是，在点 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 处，有 $B^2-AC=-48<0$ 且 $A>0$，所以函数 $u$ 在点 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 处取极小值. 又由于 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 是唯一的极小值点，故 $u\left(0,\frac{1}{2}\right)=22$ 为最小值，将 $x=0$ 和 $y=\frac{1}{2}$ 代入 $z=y-x$ 得 $z=\frac{1}{2}$，于是所求点为 $\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

**注** (1) 本题是一个典型的条件极值问题，上述两种方法是使用“升元法”和“降元法”来求极值.

(2) 考虑到问题本身具有的特殊情况，下面采用更简捷的方法求解. 下面的方法 3 中将用到如下结论：设 $a>0,b>0$，则有

$$a^2+b^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2)+\frac{1}{2}(a^2+b^2)\geqslant\frac{1}{2}(a^2+b^2)+ab=\frac{1}{2}(a+b)^2.$$

其中等号当且仅当 $a=b$ 时成立.

**方法 3** 容易求出 $\pi$ 的方程为 $x-y+z=0$. 设已知点 $A(2,1,2)$ 和点 $B(-3,1,-2)$ 在 $\pi$ 上的投影为 $A_0$ 和 $B_0$，设过点 $A,B$ 垂直于 $\pi$ 的直线为 $l_A$ 和 $l_B$，则

$l_A: x=2+t, y=1-t, z=2+t$；　$l_B: x=-3+t, y=1-t, z=-2+t$.

它们分别与 $\pi$ 的方程联立求解，可得 $A_0, B_0$ 的坐标为 $A_0(1,2,1), B_0(-1,-1,0)$. 于是

$$|A_0B_0|^2=(1+1)^2+(2+1)^2+1^2=14;$$
$$|AA_0|^2=(2-1)^2+(1-2)^2+(2-1)^2=3;$$
$$|BB_0|^2=(-3+1)^2+(1+1)^2+(-2)^2=12.$$

设点 $P(x,y,z)$ 为平面内的任意一点，则有

$$u(x,y,z)=|AP|^2+|BP|^2=(|AA_0|^2+|A_0P|^2)+(|BB_0|^2+|B_0P|^2)$$
$$=3+|A_0P|^2+12+|B_0P|^2\geqslant 15+\frac{1}{2}(|A_0P|+|B_0P|)^2.$$

由于 $A_0$ 和 $B_0$ 为定点，且 $P$ 与 $A_0, B_0$ 在同一平面 $\pi$ 上，故

$$u(x,y,z)\geqslant 15+\frac{1}{2}|A_0B_0|^2=15+7=22.$$

当且仅当 $|A_0P|=|B_0P|=\frac{1}{2}|A_0B_0|$，即 $P$ 为 $|A_0B_0|$ 的中点 $\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 时，上式等号成立，所以 $P\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 为所求点，最小值为 $u\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=22$.

4-5　求 $a,b$ 的值，使得包含在圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 内部的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的面积最小（$a>0$，$b>0, a\neq b$）。

解：由题设知，圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 的外切椭圆的面积最小，切点 $A$ 处，对于椭圆 $\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}y'=0$，$k_1=y'=-\frac{b^2x}{a^2y}$，$y_1^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$，

对于圆 $2(x-1)+2yy'=0$，$k_2=y'=\frac{1-x}{y}$，$y_2^2=1-(1-x)^2$。

由 $k_1=k_2$，$y_1^2=y_2^2$，得切点 $A$ 处满足条件 $a^2+b^4-a^2b^2=0$。

问题是求椭圆的面积 $S(a,b)=\pi ab$ 在条件 $a^2+b^4-a^2b^2=0$ 下的最小值.

令 $F(a,b)=\pi ab+\lambda(a^2+b^4-a^2b^2)$，

$$\begin{cases}F_a=\pi b+\lambda(2a-2ab^2)=0 & (1)\\ F_b=\pi b+\lambda(4b^3-2a^2b)=0 & (2)\\ a^2+b^4-a^2b^2=0 & (3)\end{cases}$$

$\pi ab+\lambda(2a^2-2a^2b^2)=0$　(4)

$\pi ab+\lambda(4b^4-2a^2b^2)=0$　(5)

由式(4)、式(5)得 $a^2-2b^4=0$　(6)

式(6)代入式(3)得 $3b^4-2b^6=0$

$b^2=\frac{3}{2}$，$a^2=2\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{2}$，

即当 $a=\frac{3}{\sqrt{2}}$，$b=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$（唯一驻点）时，椭圆的面积最小为 $S\left[\frac{3}{\sqrt{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right]=\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$.

4-6　设椭球面 $\Sigma: x^2+3y^2+z^2=1$，$\pi$ 为 $\Sigma$ 在第一卦限内的切平面。求：

（1）使 $\pi$ 与三坐标平面所围成的四面体的体积最小的切点坐标；

（2）使 $\pi$ 与三坐标平面截出的三角形面积最小的切点坐标。

**解** 记 $F(x,y,z)=x^2+3y^2+z^2-1$，则椭球面 $\Sigma$ 在第一卦限部分点 $P(x,y,z)$ 处的法向量为

$$n=(F'_x,F'_y,F'_z)_P=2(x,3y,z)_P,$$

故 $\Sigma$ 在点 $P$ 处的切平面 $\pi$ 为 $x(X-x)+3y(Y-y)+z(Z-z)=0$，即

$$xX+3yY+zZ=1 \quad \text{或} \quad \frac{X}{\frac{1}{x}}+\frac{Y}{\frac{1}{3y}}+\frac{Z}{\frac{1}{z}}=1,$$

故切平面 $\pi$ 与 $x,y,z$ 轴分别交于点 $A\left(\frac{1}{x},0,0\right)$，$B\left(0,\frac{1}{3y},0\right)$ 和 $C\left(0,0,\frac{1}{z}\right)$.

(1) $\pi$ 与三坐标平面所围成的四面体的体积为 $V_{OABC}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{3y}\cdot\frac{1}{z}=\frac{1}{18xyz}$. 由于点 $P$ 在 $\Sigma$ 上，即满足约束条件 $x^2+3y^2+z^2=1$，故

$$xyz=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2\cdot 3y^2\cdot z^2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\left(\frac{x^2+3y^2+z^2}{3}\right)^3}=\frac{1}{9},$$

其中，等号当且仅当 $x^2=3y^2=z^2$ 即 $x=z=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$y=\frac{1}{3}$ 时成立. 此时 $xyz$ 取最大值 $\frac{1}{9}$，从而 $V_{OABC}$ 取最小值 $\frac{1}{2}$，故所求点为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

(2) 为求出 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}$ 的表达式，先求出

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left[-\frac{1}{x},\frac{1}{3y},0\right]\times\left[-\frac{1}{x},0,\frac{1}{z}\right]=\left[\frac{1}{3yz},\frac{1}{zx},\frac{1}{3xy}\right],$$

于是 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{9y^2z^2}+\frac{1}{z^2x^2}+\frac{1}{9x^2y^2}}$.

记 $f(x,y,z)=9\times(2S_{\triangle ABC})^2=\frac{1}{y^2z^2}+\frac{9}{z^2x^2}+\frac{1}{x^2y^2}$. 因为 $S_{\triangle ABC}>0$，则 $S_{\triangle ABC}$ 与 $f(x,y,z)$ 同时取最小值. 为求 $f(x,y,z)$ 在条件 $x^2+3y^2+z^2=1$ 下的最小值，作拉格朗日函数如下

$$F(x,y,z)=\frac{1}{y^2z^2}+\frac{9}{z^2x^2}+\frac{1}{x^2y^2}+\lambda(x^2+3y^2+z^2-1),$$

其中，$\lambda$ 为某一常数. 令

$$\begin{cases} F'_x=-\frac{2}{x^3}\left(\frac{1}{y^2}+\frac{9}{z^2}\right)+2x\lambda=0, \\ F'_y=-\frac{2}{y^3}\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{x^2}\right)+6y\lambda=0, \\ F'_z=-\frac{2}{z^3}\left(\frac{9}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)+2z\lambda=0, \\ F'_\lambda=x^2+3y^2+z^2-1. \end{cases}$$

上述方程组中，第一式$\times\left(-\frac{x}{2}\right)$、第二式$\times\left(-\frac{y}{2}\right)$、第三式$\times\left(-\frac{z}{2}\right)$，整理得

$$\frac{1}{x^2y^2}+\frac{9}{x^2z^2}=\lambda x^2,\quad \frac{1}{y^2z^2}+\frac{1}{x^2y^2}=3\lambda y^2,\quad \frac{9}{z^2x^2}+\frac{1}{y^2z^2}=\lambda z^2,$$

将它们相加并化简得 $\frac{1}{x^2y^2}+\frac{1}{y^2z^2}+\frac{9}{x^2z^2}=\frac{\lambda}{2}$. 再将此式与前三式相减可推得

$$\frac{2}{\lambda}=y^2z^2(1-2x^2)=\frac{1}{9}z^2x^2(1-6y^2)=x^2y^2(1-2z^2),$$

整理得 $y^2=\frac{z^2}{9-12z^2}$，$z^2=x^2$. 代入约束条件方程得

$$8x^4-11x^2+3=0.$$

解之得，$x^2=1$，$x^2=\frac{3}{8}$. 因为 $x^2=1$ 时 $y^2<0$，舍去，于是，由 $x>0$ 知 $x=\sqrt{\frac{3}{8}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$，从而有

$$z=x=\frac{\sqrt{6}}{4},\quad y=\sqrt{\frac{1-x^2-z^2}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

于是 $f(x,y,z)$ 在第一卦限内的唯一驻点为 $P\left(\frac{\sqrt{6}}{4},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$，因为题设中具有最小面积的三角形 $S_{\triangle ABC}$ 是实际存在的，从而 $f(x,y,z)$ 存在最小值. 所以，$S_{\triangle ABC}$ 与 $f(x,y,z)$ 的最小值在唯一可能极值点 $P\left(\frac{\sqrt{6}}{4},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$ 处取得，也即 $P\left(\frac{\sqrt{6}}{4},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$ 为所求.

**注** (1) 在第(2)问中求目标函数 $S_{\triangle ABC}$ 或 $f(x,y,z)$ 有多种方法，譬如，视$\triangle ABC$为四面体 $O\text{-}ABC$ 的底面，则顶点 $O$ 到底面的高 $h$ 即原点$(0,0,0)$到切平面 $\pi$ 的距离为

$$h=\frac{|-1|}{\sqrt{x^2+(3y)^2+z^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+9y^2+z^2}},$$

故由$\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot h=V_{O\text{-}ABC}=\frac{1}{18xyz}$，有

$$S_{\triangle ABC}=\frac{3V_{O\text{-}ABC}}{h}=\frac{\sqrt{x^2+9y^2+z^2}}{6xyz}.$$

可以用减元法的思想求 $f(x,y,z)=(6S_{\triangle ABC})^2=\frac{x^2+9y^2+z^2}{x^2y^2z^2}$ 的最小值. 由 $x$ 与 $z$ 的对称性知，将条件 $x^2+3y^2+z^2=1$ 代入函数 $f(x,y,z)$ 中，消去 $y$ 是合理的，于是

$$f(x,z)=\frac{x^2+3(1-x^2-z^2)+z^2}{x^2z^2\cdot\frac{1}{3}[1-(x^2+z^2)]}=\frac{9-6(x^2+z^2)}{x^2z^2[1-(x^2+z^2)]}.$$

令 $f'_x(x,z)=0$，化简整理得

$$2x^4+2z^4+4x^2z^2-6x^2-5z^2+3=0,$$

因为 $f(x,z)$ 是对称函数，故 $f'_z(x,z)=0$ 的结果中只需将上式中的 $x$ 与 $z$ 互换即得

$$2x^4+2z^4+4x^2z^2-5x^2-6z^2+3=0.$$

两式相减得 $x^2=z^2$. 注意到 $x>0,z>0$，故 $x=z$，且 $8x^4-11x^2+3=0$.

(2) 从椭球面 $\Sigma$ 的方程知，互换其中的 $x$ 与 $z$，方程不变，可见 $\Sigma$ 关于平面 $x=z$ 对称，由此猜想：使 $S_{\triangle ABC}$ 取得最小值的点可能在曲线

$$\begin{cases}x^2+3y^2+z^2=1,\\ x=z\end{cases}$$

上(前面的推导正好说明了该猜想的正确性). 利用这一点，约束条件可化为

$$x^2+3y^2+x^2=1\quad 或\quad y^2=\frac{1-2x^2}{3}.$$

代入 $f(x,y,z)$，可将目标函数化为

$$f(x,y,z)=\frac{x^2+9y^2+z^2}{x^2y^2z^2}=\frac{2x^2+3(1-2x^2)}{x^4\cdot\frac{1}{3}(1-2x^2)}=\frac{9-12x^2}{x^4-2x^6}.$$

进而问题化为一元函数的极值问题.

4-7　设函数 $f(u)$ 可导且 $f'(u)\neq 0$，证明：旋转曲面 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 的法线与转

轴相交。

证 方法1 设 $u=\sqrt{x^2+y^2}$，则 $z=f(u)$。因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\frac{x}{u},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\frac{y}{u},$$

所以旋转面上 $P(x,y,z)$ 点处的法线 $l$ 的方程为

$$\frac{X-x}{\frac{x}{u}f'(u)}=\frac{Y-y}{\frac{y}{u}f'(u)}=\frac{Z-z}{-1}.$$

易见旋转面的转轴为 $z$ 轴，其方程为 $\begin{cases}X=0,\\ Y=0,\end{cases}$ 解它们联立的方程组得 $l$ 与 $z$ 轴相交且交点为 $\left[0,0,z+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{f'(\sqrt{x^2+y^2})}\right]$.

方法2 设 $u=\sqrt{x^2+y^2}$，$z=f(u)$，于是旋转面在点 $P(x,y,z)$ 处的法线 $l$ 的方向向量可取为

$$\boldsymbol{s}=[xf'(u),yf'(u),-u],$$

而旋转面转轴为 $z$ 轴，其方向向量为 $\boldsymbol{k}=(0,0,1)$，又 $z$ 轴上点 $O(0,0,0)$ 到 $l$ 上点 $P(x,y,z)$ 的向量为 $\overrightarrow{OP}=(x,y,z)$。由于三向量 $\boldsymbol{k},\boldsymbol{s},\overrightarrow{OP}$ 的混合积

$$[\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{s}\,\overrightarrow{OP}]=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ xf'(u) & yf'(u) & -u\\ x & y & z\end{vmatrix}=0,$$

所以法线 $l$ 与 $z$ 轴共面。若 $P$ 为 $(0,0,f(0))$，则 $P$ 点已在 $z$ 轴上。否则，$P(x,y,z)\neq(0,0,f(0))$，因为 $f'(u)\neq0$，故必有 $\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 不平行。于是，$l$ 与 $z$ 轴共面又不平行，则 $l$ 与 $z$ 轴必为相交。

4-8 设 $f(x,y)$ 在 $R^2$ 中连续，$f(0,0)=0$，$f(x,y)$ 存在偏导数，且当 $x^2+y^2\le5$ 时，

$|gradf|\le1$，证明：$|f(1,2)|\le\sqrt{5}$。

证 由二元函数的中值公式，有 $f(1,2)=f(1,2)-f(0,0)=f'_x(\xi,\eta)+2f'_y(\xi,\eta)$，故

$$\begin{aligned}|f(1,2)|^2&=|f'^2_x(\xi,\eta)+4f'^2_y(\xi,\eta)+4f'_x(\xi,\eta)f'_y(\xi,\eta)|\\&\leqslant f'^2_x(\xi,\eta)+4f'^2_y(\xi,\eta)+2|2f'_x(\xi,\eta)||f'_y(\xi,\eta)|\\&\leqslant f'^2_x(\xi,\eta)+4f'^2_y(\xi,\eta)+4f'^2_x(\xi,\eta)+f'^2_y(\xi,\eta)\\&=5|f'_x(\xi,\eta)+f'_y(\xi,\eta)|\leqslant5.\end{aligned}$$

所以，$|f(1,2)|\leqslant\sqrt{5}$.

4-9 在平面上给一边长分别为 $a$、$b$、$c$ 的三角形，在它上面做无数个定高 $h$ 的锥体，求侧面积最小的锥体。

【解】锥顶$H$在底面的投影记为$O$，从$O$到三边$BC$、CA、AB的距离分别为$x$、$y$、$z$，则锥的侧面积（目标函数）为

$$S=\frac{1}{2}a\sqrt{h^2+x^2}+\frac{1}{2}b\sqrt{h^2+y^2}+\frac{1}{2}c\sqrt{h^2+z^2} \qquad (1)$$

规定：若点$O$与$\Delta ABC$的内心在$BC$的同侧，则$x$算作为正，否则算作为负。对$y,z$做同样的规定，此时，点$O$与$\Delta ABC$的内部还是外部，恒有

$$\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}by+\frac{1}{2}cz=S_{\Delta ABC} \qquad (2)$$

即
$$ax+by+cz=2S_{\Delta ABC}\ \underline{\underline{记作}}\ m$$

其中
$$S_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},p=\frac{a+b+c}{2}$$

记
$$L=a\sqrt{h^2+x^2}+b\sqrt{h^2+y^2}+c\sqrt{h^2+z^2}-\lambda(ax+by+cz-m)$$

令$L_x'=L_y'=L_z'=0$，得

$$\lambda=\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}=\frac{y}{\sqrt{h^2+y^2}}=\frac{z}{\sqrt{h^2+z^2}} \qquad (3)$$

从实际背景来看，问题有最小值，无最大值。现在只有一个可疑点，故它对应最小值。(3）式表明最小值发生在三侧面与底面成等角的时候。因此，当$x=y=z$，即$o$与三角形内心重合时，侧面积最小。此时

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{h^2+r^2}(a+b+c),$$

其中$r=(圆内接半径)=\dfrac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a+b+c}$， $p=\dfrac{a+b+c}{2}$。

4-10　设$\Delta ABC$为正三角形，边长为$a$，$P$为$\Delta ABC$内任意一点，由$P$向三边引垂线与三边的交点分别为$D$、$E$、$F$。试求$\Delta DEF$的面积最大值。

【解】记$P$点至三边的距离分别为$x$、$y$、$z$，注意到：

$$\angle DPF=\angle DPE=\angle EPF=\frac{2}{3}\pi$$

所以$\Delta DEF$的面积

$$S_{\Delta DEF}=S_{\Delta DPF}+S_{\Delta DPE}+S_{\Delta EPF}$$

$$=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}(xz+xy+yz)=\frac{\sqrt{3}}{4}(xz+xy+yz)$$

由$S_{\Delta PBC}+S_{\Delta CPA}+S_{\Delta APB}=S_{\Delta ABC}$得约束方程为：

$$\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}ay+\frac{1}{2}az=\frac{1}{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

即
$$x+y+z=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

由此可得
$$x=y=z=\frac{\sqrt{3}}{6}a$$

最后得到答案为：$\max S_{\Delta DEF}=\dfrac{\sqrt{3}}{16}a^2$

4-11 设函数 $f(x,y)$ 可微，$f_x'(x,y)=-f(x,y), f(0,\frac{\pi}{2})=1$，且满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{f(0,y+\frac{1}{n})}{f(0,y)}\right]^n=e^{\cot y}$，求 $f(x,y)$。

**解　方法 1**　先计算极限：

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(0,y+\frac{1}{n}\right)}{f(0,y)}\right]^n=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{f\left(0,y+\frac{1}{n}\right)-f(0,y)}{f(0,y)}\right]^n$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f\left(0,y+\frac{1}{n}\right)-f(0,y)}{\frac{1}{n}f(0,y)}}=e^{\frac{f_y'(0,y)}{f(0,y)}},$$

依题意，得 $\frac{f_y'(0,y)}{f(0,y)}=\frac{\mathrm{d}\ln f(0,y)}{\mathrm{d}y}=\cot y$，对 $y$ 积分得 $\ln f(0,y)=\ln\sin y+\ln C$，故 $f(0,y)=C\sin y$. 代入 $f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=1$ 得 $C=1$，即

$$f(0,y)=\sin y.$$

又由 $\frac{\partial f}{\partial x}=-f$ 积分得 $f(x,y)=\varphi(y)e^{-x}$，由 $f(0,y)=\sin y$ 知，$\varphi(y)=\sin y$，所以 $f(x,y)=e^{-x}\sin y$.

**方法 2**　视 $y$ 为常数，求解分离变量方程 $\frac{\mathrm{d}f(x,y)}{f(x,y)}=-\mathrm{d}x$，得

$$\ln f(x,y)=-x+\ln\varphi(y),\quad 即\quad f(x,y)=\varphi(y)e^{-x}.$$

依题意，得

$$e^{\cot y}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\varphi\left(y+\frac{1}{n}\right)}{\varphi(y)}\right]^n=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{\varphi\left(y+\frac{1}{n}\right)-\varphi(y)}{\varphi(y)}\right]^n=e^{\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}}$$

及　$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$

于是，有 $\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}=\cot y$，两边积分并整理得 $\varphi(y)=C\sin y$，代入初始条件得 $C=1$，所以，$f(x,y)=e^{-x}\sin y$.

# 五、多元函数积分学

（竞赛大纲）

1. 二重积分和三重积分的概念及性质、二重积分的计算(直角坐标、极坐标)、三重积分的计算(直角坐标、柱面坐标、球面坐标).
2. 两类曲线积分的概念、性质及计算、两类曲线积分的关系.
3. 格林(Green)公式、平面曲线积分与路径无关的条件、已知二元函数全微分求原函数.
4. 两类曲面积分的概念、性质及计算、两类曲面积分的关系.
5. 高斯(Gauss)公式、斯托克斯(Stokes)公式、散度和旋度的概念及计算.
6. 重积分、曲线积分和曲面积分的应用(平面图形的面积、立体图形的体积、曲面面积、弧长、质量、质心、转动惯量、引力、功及流量等)

5-1　计算下述积分：

$$\iint_D\sqrt{|y-x^2|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D 是矩形区域 $|x|\le 1$，$0\le y\le 2$。

解： 记 $D_1=\{(x,y)\mid |x|\le 1, 0\le y\le 2, y-x^2\le 0\}$

$D_2=\{(x,y)\mid |x|\le 1, 0\le y\le 2, 0\le y-x^2\}$，

$$\iint_D \sqrt{|y-x^2|}\,dx\,dy=\iint_{D_1}\sqrt{x^2-y}\,dx\,dy+\iint_{D_2}\sqrt{y-x^2}\,dx\,dy$$

$$=\int_{-1}^{1}dx\int_0^{x^2}(x^2-y)^{\frac{1}{2}}dy+\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{2}(y-x^2)^{\frac{1}{2}}dy$$

$$=\frac{2}{3}\int_{-1}^{1}(x^2)^{\frac{3}{2}}dx+\frac{2}{3}\int_{-1}^{1}(2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=\frac{4}{3}\int_{0}^{1}(x^2)^{\frac{3}{2}}dx+\frac{4}{3}\int_{0}^{1}(2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^1 x^3\,dx+\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^4 t\,dt \quad (\text{这里} x=\sqrt{2}\sin t)$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 dt$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+2\cos 2t+\frac{1+\cos 4t}{2}\right)dt$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\left[\frac{3}{2}t+\sin 2t+\frac{\sin 4t}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \qquad =\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\left(\frac{3\pi}{8}+1\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{5}{3}$$

5-2 设 $f(x)\in C[\mathbf{0},+\infty)$ 且满足方程 $f(t)=e^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\le 4t^2} f(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2})dxdy$，求 $f(t)$。

解：$\iint\limits_{x^2+y^2\le 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2t} rf\left(\frac{1}{2}r\right)dr=2\pi\int_0^{2t} rf\left(\frac{1}{2}r\right)dr$

即 $f(t)=e^{4\pi t^2}+2\pi\int_0^{2t} rf\left(\frac{1}{2}r\right)dr$，求导得：$f'(t)=8\pi te^{4\pi t^2}+4\pi\cdot 2tf(t)$

即 $f'(t)-8\pi tf(t)=8\pi te^{4\pi t^2}$.

从而求得通解 $f(t)=e^{\int 8\pi t dt}\left(\int 8\pi te^{4\pi t^2}e^{-\int 8\pi t dt}dt+c\right)=e^{4\pi t^2}(4\pi t^2+c)$.

又 $f(0)=1+0$，故 $c=1$，所以 $f(t)=e^{4\pi t^2}(4\pi t^2+1)$.

5-3 将均匀的抛物形体 $\Omega: x^2+y^2\le z\le 1$ 放在水平桌面上，证明：当形体处于稳定平衡时，它的轴线与桌面的夹角为 $\theta=\arctan\sqrt{\frac{3}{2}}$。

**解** 当重心最低时，物体处于稳定平衡状态. 由于

$$M=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^1\mathrm{d}z=\frac{\pi}{2},$$

$$M_{xy}=\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^1 z\mathrm{d}z=\frac{\pi}{3},$$

于是 $\bar{z}=\frac{M_{xy}}{M}=\frac{2}{3}$. 所以，物体的重心为 $P\left(0,0,\frac{2}{3}\right)$.

求点 $P$ 到抛物面 $z=x^2+y^2$ 的最短距离. 作拉格朗日函数

$$F(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+\left(z-\frac{2}{3}\right)^2+\lambda(x^2+y^2-z),$$

由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=2x+2\lambda x=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2y+2\lambda y=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=2\left(z-\dfrac{2}{3}\right)-\lambda=0\end{cases}$$

解得 $x=y=\frac{1}{\sqrt{12}}, z=\frac{1}{6}$. 记 $Q\left(\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{1}{6}\right)$，则

$$\overrightarrow{QP}=\left[-\frac{1}{\sqrt{12}},-\frac{1}{\sqrt{12}},\frac{1}{2}\right]=\sqrt{\frac{5}{12}}\left[-\sqrt{\frac{1}{5}},-\sqrt{\frac{1}{5}},\sqrt{\frac{3}{5}}\right].$$

所以，$\sin\theta=\cos\gamma=\sqrt{\frac{3}{5}}$，故 $\tan\theta=\sqrt{\frac{3}{2}}$，因此 $\theta=\arctan\sqrt{\frac{3}{2}}$.

5-4　设 $D: x^2+y^2\le 1$，证明：$\frac{61}{165}\pi\le\iint\limits_D\sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}dxdy\le\frac{2}{5}\pi$。

**证** $\iint\limits_D\sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\sin\rho^3\mathrm{d}\rho=2\pi\int_0^1\rho\sin\rho^3\mathrm{d}\rho.$

利用二阶及四阶泰勒公式：

$$\sin x=x-\frac{\cos\theta_1 x}{3!}x^3,\quad \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{\cos\theta_2 x}{5!}x^5,\quad 0<\theta_1,\theta_2<1,$$

得不等式

$$x-\frac{x^3}{3!}\leqslant\sin x\leqslant x,\quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

所以，$\frac{61}{330}=\int_0^1\left(\rho^4-\frac{\rho^{10}}{6}\right)\mathrm{d}\rho\leqslant\int_0^1\rho\sin\rho^3\mathrm{d}\rho\leqslant\int_0^1\rho^4\mathrm{d}\rho=\frac{1}{5}$. 因此，有

$$\frac{61}{165}\pi\leqslant\iint\limits_D\sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\frac{2}{5}\pi.$$

5-5　设 $D=\{(x,x)\,|\,0\le x\le 2, 0\le y\le 2\}$，(1) 计算 $B=\iint\limits_D|xy-1|dxdy$；(2) 设 $f(x,y)$ 在 D 上连续，且有 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=0, \iint\limits_D xyf(x,y)dxdy=1$，试证：存在 $(\xi,\eta)\in D$，使得 $|f(\xi,\eta)|\ge\frac{1}{B}$。

证 (1)

$$B=\iint_{D_1}(1-xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}(xy-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_0^2(1-xy)\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{2}}^2\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{x}}(1-xy)\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{2}}^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^2(xy-1)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{3}{2}+\ln 2.$$

(2) 由条件知 $\iint_D(xy-1)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$，从而由二重积分的性质知

$$\iint_D|xy-1||f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant 1.$$

又由二重积分中值定理知，存在 $(\xi,\eta)\in D$，使得

$$\iint_D|xy-1||f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=|f(\xi,\eta)|\iint_D|xy-1|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=|f(\xi,\eta)|B.$$

故存在 $(\xi,\eta)\in D$，使得 $|f(\xi,\eta)|\geqslant\frac{1}{B}$.

5-6　设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：$\int_0^1 e^{f(x)}dx\int_0^y e^{-f(y)}dy\geq 1$。

证　方法 1　将二次积分化为累次积分：$I=\int_0^1 \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x\int_0^1 \mathrm{e}^{-f(y)}\mathrm{d}y=\iint_D \mathrm{e}^{f(x)-f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 由对称性，知 $I=\iint_D \mathrm{e}^{f(y)-f(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint_D\left(\frac{\mathrm{e}^{f(x)}}{\mathrm{e}^{f(y)}}+\frac{\mathrm{e}^{f(y)}}{\mathrm{e}^{f(x)}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant 1$.（最后一步用到均值不等式）

方法 2　由泰勒公式知，$\forall x\in\mathbb{R}$，恒有

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{\mathrm{e}^{\xi}}{2!}x^2\geqslant 1+x,\quad \text{其中 } \xi \text{ 介于 } 0 \text{ 和 } x \text{ 之间},$$

所以，有

$$\mathrm{e}^{f(x)-f(y)}\geqslant 1-f(x)-f(y).$$

从而

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x\int_0^1 \mathrm{e}^{-f(y)}\mathrm{d}y\geqslant\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(1-f(x)-f(y))\mathrm{d}y$$

$$=1-\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x)\mathrm{d}y-\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y=1.$$

**注**　练习：试证明 $\iint_D\frac{\ln(2+x^2)}{\ln(2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant 1, D:0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1.$

5-7　已知 $\int_0^2\sin(x^2)dx=a$, 求 $\iint_D\sin(x-y)^2dxdy$，其中 $D=\{(x.y)||x|\leq 1,|y|\leq 1\}$。

析：　用 $y=x$ 首先将积分区域 $D$ 分割成上下两部分 $D_1;D_2$，再做变量代换 $x;y=u;$ $y=v$ 分别在两部分将积分化成累次积分即可.

5-8　计算 $\int_0^a dx\int_0^b e^{\max\{b^2x^2,a^2y^2\}}dy$。

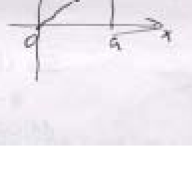
4. 计算 $\int_0^a dx\int_0^b e^{\max\{b^2x^2,a^2y^2\}}dy$，(a>0，b>0)

解　原积分 $=\int_0^a dx\int_0^{\frac{b}{a}x}e^{b^2x^2}dy+\int_0^b dy\int_0^{\frac{a}{b}y}e^{a^2y^2}dx$

$=\int_0^a\frac{b}{a}xe^{b^2x^2}dx+\int_0^b\frac{a}{b}ye^{a^2y^2}dy$

$=\frac{1}{2ab}(e^{a^2b^2}-1)+\frac{1}{2ab}(e^{a^2b^2}-1)$

$=\frac{1}{ab}(e^{a^2b^2}-1)$



5-9　计算曲线积分 $\int_{ACB}[f(y)\cos x-\pi y]dx+[f'(y)\sin x-\pi]dy$，其中 $ACB$ 为连接点 $A(\pi,2)$ 与点 $B(3\pi,4)$ 的线段 $\overline{AB}$ 之下方的任意路线，且该路线与线段 $\overline{AB}$ 所围成的图形的面积为 1，$f(x)$ 是连续可导的函数。

**解**　添加辅助线 $\overline{BA}$，使 $\widehat{ACBA}$ 构成闭曲线，则

$$\int_{\widehat{ACB}}[f(y)\cos x-\pi y]dx+[f'(y)\sin x-\pi]dy$$

$$=\int_{\widehat{ACBA}}[f(y)\cos x-\pi y]dx+[f'(y)\sin x-\pi]dy+\int_{\overline{AB}}[f(y)\cos x-\pi y]dx+[f'(y)\sin x-\pi]dy$$

$$=\iint_D[f'(y)\cos x-f'(y)\cos x+\pi]dxdy+\int_{\overline{AB}}[f(y)\cos x-\pi y]dx+[f'(y)\sin x-\pi]dy$$

$$=\pi+\int_{\overline{AB}}[f(y)\cos x-\pi y]dx+[f'(y)\sin x-\pi]dy,$$

因为线段 $\overline{AB}$ 的方程为：$x=\pi y-\pi$，所以

$$\int_{\overline{AB}}[f(y)\cos x-\pi y]dx+[f'(y)\sin x-\pi]dy$$

$$=\int_2^4\{[f(y)\cos(\pi y-\pi)-\pi y]\pi+[f'(y)\sin(\pi y-\pi)-\pi]\}dy$$

$$=-\int_2^4\{[f(y)\cos(\pi y)+\pi y]\pi+[f'(y)\sin(\pi y)+\pi]\}dy$$

$$=-\int_2^4(\pi^2 y+\pi)dy-\int_2^4\pi f(y)\cos(\pi y)dy-\int_2^4 f'(y)\sin(\pi y)dy$$

$$=-6\pi^2-2\pi-\int_2^4\pi f(y)\cos(\pi y)dy-\int_2^4\sin(\pi y)df(y)$$

$$=-6\pi^2-2\pi-\int_2^4\pi f(y)\cos(\pi y)dy-f(y)\sin(\pi y)\Big|_2^4+\int_2^4\pi f(y)\cos(\pi y)dy$$

$$=-6\pi^2-2\pi$$

故原式 $=\pi-6\pi^2-2\pi=-6\pi^2-\pi$ .

5-10　求曲线积分 $I=\int_L(e^x\sin y-b(x+y))dx+(e^x\cos y-ax)dy$，其中 a 与 b 为正常数，L 为从点 A（2a，0）沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 O（0,0）的弧。

解　因$e^x \sin y dx + e^x \cos y dy = d(e^x \sin y)$ 故

$$\int_L e^x \sin y dx + e^x \cos y dy = e^x \sin y \Big|_{(2a,0)}^{(0,0)} = 0$$

而 L 的参数方程为

$$x = a + a\cos t,\ \ y = a\sin t,\quad 0 \le t \le \pi,$$

所以

$$-\int_L b(x+y)dx + axdy$$

$$= -\int_0^{\pi} \left[-ba^2(\sin t + \sin t\cos t + \sin^2 t) + a^3(1+\cos t)\cos t\right]dt$$

$$= a^2 b\left(\frac{\pi}{2} + 2\right) - \frac{1}{2}\pi a^3$$

因此

$$\mathrm{I} = a^2 b\left(\frac{\pi}{2} + 2\right) - \frac{1}{2}\pi a^3$$

注：也可利用格林公式来做。

5-11 计算 $\oiint\limits_{\Sigma}(x-y)dxdy + (y-z)xdydz$ ，其中 $\Sigma$ 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0, z=3$ 所　围成的空间闭区域$\Omega$的边界曲面的外侧。

**解**　记 $P=(y-z)x, Q=0, R=x-y$，由高斯公式，得

$$\text{原式} = \iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V$$

$$= \iiint\limits_{\Omega}[(y-z)+0+0]\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega}(y-z)\mathrm{d}V.$$

下面给出上式左端三重积分计算的 3 种求解方法.

**方法 1（利用对称性和三重积分的物理意义计算）**

(1) $\iiint\limits_{\Omega} y\mathrm{d}V = 0$，其中 $\Omega$ 关于 $xOz$ 面对称，被积函数为 $y$ 的奇函数.

(2) $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V = \bar{z}\cdot V = \frac{3}{2}\cdot 3\pi = \frac{9}{2}\pi$，这里依据物理意义知，$\Omega$ 的质心坐标为$(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \left(0,0,\frac{3}{2}\right)$，$\Omega$ 的体积为 $3\pi$.

因此，原式$=0-\frac{9}{2}\pi=-\frac{9}{2}\pi$.

**方法 2（利用对称性和截面法计算）**

$$\text{原式} = 0 - \iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V = -\int_0^3 z\mathrm{d}z \iint\limits_{D_z: x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}\sigma$$

$$= -\pi\int_0^3 z\mathrm{d}z = -\frac{9}{2}\pi.$$

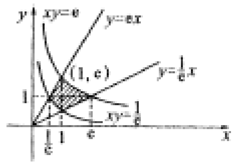
**方法 3（在柱坐标下直接计算）**

$$\text{原式} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r\mathrm{d}r \int_0^3 (r\sin\theta - z)\mathrm{d}z = -\frac{9}{2}\pi.$$

**注** 1）由于重积分、线积分与面积分是转化为累次积分或定积分来求解的，所以，重积分、线积分与面积分的对称性本质上是定积分对称性的体现，而且，这些积分的对称性经常能从物理学角度得到很好的理解．一般地，二重积分、三重积分、对弧长的曲线积分与对面积的曲面积分的对称性依赖于被积函数与积分区域，在物理上，可以借助质量与质心来理解；对坐标的曲线积分与对坐标的曲面积分的对称性不仅依赖于被积函数与积分区域，还分别依赖于对应曲线与曲面的定向，在物理上，可以分别借助变力做功与流量来理解．

5-12　求曲线 $|\ln x|+|\ln y|=1$ 所围成的平面图形的面积。

[解 1]去掉绝对值曲线为：$\begin{cases} xy=e, & x\ge 1且y\ge 1, \\ y=\frac{1}{e}x, & x\ge 1且0<y<1 \\ y=ex, & 0<x<1且y\ge 1 \\ xy=\frac{1}{e}, & 0<x<1且0<y<1 \end{cases}$




$$A=\int_{\frac{1}{e}}^{1}(ex-\frac{1}{ex})dx+\int_1^e(\frac{e}{x}-\frac{x}{e})dx=e-\frac{1}{e}$$

[解 2]令 $\ln x=u$, $\ln y=v$, 则 $x=e^u$, $y=e^v$, $D':|u|+|v|\le 1$, $J=\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^u & 0 \\ 0 & e^v \end{vmatrix}=e^u\cdot e^v$.

$$\iint_D dxdy=\iint_{D'}|J|\,dudv=\iint_{D'}e^u\cdot e^v\,dudv=\int_{-1}^0 e^u du\int_{-u-1}^{u+1}e^v dv+\int_0^1 e^u du\int_{u-1}^{1-u}e^v dv=e-\frac{1}{e}.$$

5-13　设曲面 $s$ 为曲线 $\begin{cases} z=\mathrm{e}^y \\ x=0 \end{cases}$ $(1\le y\le 2)$ 绕 $z$ 轴旋转一周所成曲面的下侧，计算曲面积分

$$I=\iint_S 4zx\ \mathrm{d}y\mathrm{d}z-2z\ \mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-z^2)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

[解 1]$S$ 的方程为 $z=e^{\sqrt{x^2+y^2}}$　$(1\le x^2+y^2\le 4)$

补两平面 $S_1: z=e(x^2+y^2\le 1, 下侧)$　$S_2: z=e^2(x^2+y^2\le 4, 上侧)$

$$\oiint_{S+S_1+S_2}=2\iiint_V z\,dV=2\int_e^{e^2}z\,dz\iint_{D(z)}d\sigma=2\pi\int_e^{e^2}z\ln^2 z\,dz=\frac{5\pi}{2}e^4-\frac{\pi}{2}e^2$$

$$\iint_{S_1}4zx\,dydz-2z\,dzdx+(1-z^2)dxdy=-\iint_{D_{xy}}(1-e^2)dxdy=-(1-e^2)\cdot\pi=\pi(e^2-1);$$

$$\iint_{S_2}=\iint_{D_{xy}}(1-e^4)dxdy=4\pi(1-e^4);\quad I=\oiint_{S+S_1+S_2}-\iint_{S_1}-\iint_{S_2}=\frac{5\pi}{2}e^4-\frac{\pi}{2}e^2-\pi(e^2-1)-4\pi(1-e^4)$$

$$=\frac{13}{2}\pi e^4-\frac{3}{2}\pi e^2-3\pi$$

[解 2]$I=\iint_D(4zx,-2z,1-z^2)\cdot(z_x,z_y,-1)dxdy$

$$=\iint_D e^{2\sqrt{x^2+y^2}}\left[\frac{4x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}+1\right]dxdy-\iint_D dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2 e^{2r}(4r\cos^2\theta-2\sin\theta+1)r\,dr-\pi(4-1)$$

$$=\frac{13}{2}\pi e^4-\frac{3}{2}\pi e^2-3\pi\qquad(D:1\le x^2+y^2\le 4)$$

5-14　计算$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2 dV$，其中$\Omega: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$。

**解**　令$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz)\mathrm{d}V$，由对称性知$\iiint\limits_{\Omega}xy\,\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}xz\,\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}yz\,\mathrm{d}V=0$.

**方法1**　用截面法求$\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}V$.

$$\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}V=2\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}V=2\int_0^c z^2\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}}\mathrm{d}\sigma$$

$$=2\int_0^c z^2\cdot\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi abc^3,$$

由对称性

$$\iiint\limits_{\Omega}x^2\mathrm{d}V=\frac{4}{15}\pi a^3bc,\quad\iiint\limits_{\Omega}y^2\mathrm{d}V=\frac{4\pi}{15}ab^3c,$$

故原式$=\frac{4\pi}{15}abc(a^2+b^2+c^2)$.

**方法2**　利用对称性求$\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}V$. 由轮换对称性知

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{z^2}{c^2}\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}\frac{x^2}{a^2}\mathrm{d}V=\iiint\limits_{\Omega}\frac{y^2}{b^2}\mathrm{d}V,$$

并利用广义球坐标变换：$x=ar\cos\theta\sin\varphi$，$y=ar\sin\theta\sin\varphi$，$z=cr\cos\varphi$，得

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{z^2}{c^2}\mathrm{d}V=\frac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\cdot abcr^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{4\pi}{15}abc,$$

故原式$=\frac{4\pi}{15}abc(a^2+b^2+c^2)$.

5-15　计算$I=\oint_{\Gamma}[(x+2)^2+(y-3)^2]ds$，其中$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\x+y+z=0\end{cases}$，$a>0$。

**解(利用对称性)**　$I=\oint_{\Gamma}(x^2+y^2+4x-6y+13)\mathrm{d}s$. 曲线$\Gamma$是平面$x+y+z=0$在球面$x^2+y^2+z^2=a^2$上截下的大圆，它是一个半径为$a$的圆周. 由对称性

$$\oint_{\Gamma}x^2\mathrm{d}s=\oint_{\Gamma}y^2\mathrm{d}s=\oint_{\Gamma}z^2\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\oint_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{a^2}{3}\oint_{\Gamma}\mathrm{d}s,$$

其中$\oint_{\Gamma}\mathrm{d}s$等于$\Gamma$的长度，即$2\pi a$. 于是$\oint_{\Gamma}x^2\mathrm{d}s=\frac{2\pi a^3}{3}$.

同时，$\oint_{\Gamma}x\,\mathrm{d}s=\oint_{\Gamma}y\,\mathrm{d}s=\oint_{\Gamma}z\,\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\oint_{\Gamma}(x+y+z)\mathrm{d}s=0$，故

$$I=\frac{4\pi}{3}a^3+13\times 2\pi a=\frac{4\pi}{3}a^3+26\pi a.$$

(1) 如果将曲线改为 $\Gamma_1$：$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x+y+z=a, \end{cases}$ 这样，$\Gamma_1$ 是平面 $x+y+z=a$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上截下的小圆. 由于球心 $(0,0,0)$ 到平面 $x+y+z=a$ 的距离为 $d=\frac{a}{\sqrt{3}}$，则 $\Gamma_1$ 的半径为 $r=\sqrt{a^2-d^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$. 于是，$\oint_{\Gamma_1} x^2 ds = \frac{a^2}{3}\oint_{\Gamma_1} ds = \frac{2\sqrt{6}}{9}\pi a^3$.

同时，$\oint_{\Gamma} x ds = \oint_{\Gamma} y ds = \oint_{\Gamma} z ds = \frac{1}{3}\oint_{\Gamma}(x+y+z)ds = \frac{a}{3}\oint_{\Gamma} ds = \frac{2\sqrt{6}}{9}\pi a^2$.

所以，$I_1 = \oint_{\Gamma_1}(x^2+y^2+4x-6y+13)ds = \frac{\sqrt{6}}{9}\pi a(4a^2-4a+13)$.

(2) 如果将曲线改为 $\Gamma_2$：$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x+y=0, \end{cases}$ 则可先利用对称性化简.

由对称性知道 $\oint_{\Gamma_2} x^2 ds = \oint_{\Gamma_2} y^2 ds$，$\oint_{\Gamma_2} x ds = \oint_{\Gamma_2} y ds = \frac{1}{2}\oint_{\Gamma_2}(x+y)ds = 0$，那么

$$I_2 = \oint_{\Gamma_2}(x^2+y^2+4x-6y+13)ds = \oint_{\Gamma_2}(2x^2+13)ds.$$

再将 $\Gamma_2$ 写成参数方程：$x=\frac{a}{\sqrt{2}}\cos\theta, y=-\frac{a}{\sqrt{2}}\cos\theta, z=a\sin\theta$，得

$$ds = \sqrt{x'^2(\theta)+y'^2(\theta)+z'^2(\theta)}\,d\theta = a\,d\theta,$$

于是 $I_2 = \int_0^{2\pi}(a^2\cos^2\theta+13)a\,d\theta = \pi a^3 + 26\pi a$.

5-16 计算 $\oiint_{\Sigma}(x^2+2y^2+3z^2)dS$，其中 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=2y$。

**解** **方法 1(利用对称性)** 从曲面方程 $\Sigma: x^2+(y-1)^2+z^2=1$ 中看出，$x$ 与 $z$ 地位对等，且曲面 $\Sigma$ 关于平面 $y=1$ 是对称的，故有

$$\oiint_{\Sigma} x^2 dS = \oiint_{\Sigma} z^2 dS, \quad \oiint_{\Sigma}(y-1)dS = 0.$$

所以，有

$$I = 2\oiint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS = 4\oiint_{\Sigma} y dS = 4\oiint_{\Sigma}[(y-1)+1]dS = 4\oiint_{\Sigma} dS = 16\pi.$$

**方法 2（Ⅰ型化Ⅱ型）** 曲面 $\Sigma: x^2+(y-1)^2+z^2=1$ 的外法线单位向量为 $n^0=[x,y-1,z]$，将第一型曲面积分化为第二型曲面积分，得

$$I_1=\oiint_{\Sigma}[x,2(y+1),3z]\cdot n^0\,dS=\oiint_{\Sigma}(x^2+2y^2+3z^2-2)\,dS$$

$$=I-2\oiint_{\Sigma}dS=I-2\times4\pi=I-8\pi.$$

又由高斯公式，知

$$I_1=\oiint_{\Sigma外侧}x\,dydz+2(y+1)\,dzdx+3z\,dxdy=\iiint_{\Omega}(1+2+3)\,dV=6\times\frac{4}{3}\pi=8\pi,$$

其中，$\Omega$ 是由曲面 $\Sigma$ 所围成的球体：$x^2+(y-1)^2+z^2\leqslant1$. 所以，$I=I_1+8\pi=16\pi$.

**方法 3（直接计算）** 将曲面 $\Sigma$ 分成上下两个半球面，上半球面的方程为

$$\Sigma_1: z=\sqrt{2y-x^2-y^2},\quad (x,y)\in D_{xy}: x^2+y^2\leqslant 2y.$$

且 $dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,d\sigma=\frac{1}{\sqrt{2y-x^2-y^2}}\,d\sigma$.

因为被积函数 $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2$ 是关于 $z$ 的偶函数，曲面 $\Sigma$ 关于 $xOy$ 面对称，那么，$I=2\iint_{\Sigma_1}(x^2+2y^2+3z^2)\,dS=2\iint_{\Sigma_1}(6y-2x^2-y^2)\,dS=2\iint_{D_{xy}}\frac{6y-2x^2-y^2}{\sqrt{2y-x^2-y^2}}\,d\sigma$.

作广义极坐标变换，$x=r\cos\theta, y=1+r\sin\theta$，得

$$I=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{5+4r\sin\theta-r^2-r^2\sin^2\theta}{\sqrt{1-r^2}}\,r\,dr=2\pi\int_0^1\frac{10r-3r^3}{\sqrt{1-r^2}}\,dr,$$

其中，$\int_0^{2\pi}\sin\theta\,d\theta=0$，$\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta=\pi$. 在上式右端积分中，再令 $r=\sin t$，得

$$I=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(10\sin t-3\sin^3 t)\,dt=2\pi\left(10-3\times\frac{2}{3}\right)=16\pi.$$

5-17　已知函数 $f(x,y,z)=\begin{cases}x^2+y^2, z\ge x^2+y^2\\ 0, z<x^2+y^2\end{cases}$，计算曲面积分 $\iint_{\Sigma}f(x,y,z)dS$，其中 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=2$。

解　球面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=2$ 与抛物面 $z=x^2+y^2$ 的交线为 $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ z=1.\end{cases}$

$\Sigma$ 夹在抛物面内的部分记作 $\Sigma_1: z=\sqrt{2-x^2-y^2}$，$(x,y)\in D: x^2+y^2\leqslant1$. 则

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}\,d\sigma=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-x^2-y^2}}\,d\sigma,$$

于是

$$\iint_{\Sigma}f(x,y,z)\,dS=\iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\,dS=\iint_{D}(x^2+y^2)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-x^2-y^2}}\,d\sigma$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{\sqrt{2}r^2}{\sqrt{2-r^2}}\,r\,dr=8\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3 t\,dt=\frac{2}{3}\pi(8-5\sqrt{2}).$$

5-18　计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma}(y^2-2y)dzdx+(z+1)^2dxdy$，其中，$\Sigma$ 为曲面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $z=1$ 与 $z=2$ 截下的那部分的外侧。

解 记 $P=0, Q=y^2-2y, R=(z+1)^2$，则 $\frac{\partial P}{\partial x}=0, \frac{\partial Q}{\partial y}=2y-2, \frac{\partial R}{\partial z}=2(z+1)$，补面 $\Sigma_1: z=1(x^2+y^2\leqslant 1)$，下侧；$\Sigma_2: z=2(x^2+y^2\leqslant 2)$，上侧．由高斯公式知

$$I_0=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}(y^2-2y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=\iiint_\Omega(2y+2z)\mathrm{d}V.$$

由对称性知，$\iiint_\Omega y\mathrm{d}V=0$，且利用截面法得

$$\iiint_\Omega z\mathrm{d}V=\int_1^2 z\mathrm{d}z\iint_{D_z:x^2+y^2\leqslant z}\mathrm{d}\sigma=\pi\int_1^2 z^2\mathrm{d}z=\frac{7}{3}\pi,$$

故

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}=\frac{14}{3}\pi.$$

又

$$I_1=\iint_{\Sigma_1}(y^2-2y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_1}4\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_D 4\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-4\pi,$$

$$I_2=\iint_{\Sigma_2}(y^2-2y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_2}9\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D 9\mathrm{d}x\mathrm{d}y=18\pi,$$

所以，$I=I_0-I_1-I_2=\frac{14}{3}\pi-(-4\pi)-18\pi=-\frac{28}{3}\pi.$

5-19 计算 $\oint_L\frac{(x-y)dx+(x+4y)dy}{x^2+4y^2}$，其中 L 为不通过原点 O(0,0)的简单光滑闭曲线，且 L 为逆时针方向。

解 记 $P=\frac{x-y}{x^2+4y^2}, Q=\frac{x+4y}{x^2+4y^2}$，则 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{4y^2-x^2-8xy}{(x^2+4y^2)^2}$.

(1) 当 $L$ 包含原点时，由格林公式，得

$$I=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=0,\quad \text{其中 } D \text{ 为 } L \text{ 所包含的闭区域.}$$

(2) 当 $L$ 包含原点时，$P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}$ 与 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 在(0,0)点不连续，不满足格林公式条件．为此，作一充分小的椭圆

$$L_\varepsilon: x=\varepsilon\cos\theta,\quad y=\frac{1}{2}\varepsilon\sin\theta,\quad \theta: 2\pi\to 0,$$

$L_\varepsilon$ 为顺时针方向，$L$ 与 $L_\varepsilon$ 所围闭区域记为 $D_1$，则

$$\oint_{L+L_\varepsilon}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=0.$$

于是

$$I=0-\oint_{L_\varepsilon}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

$$=0-\int_{2\pi}^0\frac{\left(\varepsilon\cos\theta-\frac{1}{2}\varepsilon\sin\theta\right)\cdot(-\varepsilon\sin\theta)+(\varepsilon\cos\theta+2\varepsilon\sin\theta)\cdot\frac{1}{2}\varepsilon\cos\theta}{\varepsilon^2}\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\mathrm{d}\theta=\pi.$$

5-20 设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 $D: x^2+y^2\leq 1$ 上有二阶连续偏导数，且

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^{-(x^2+y^2)}$，证明：$\iint\limits_D (x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y})dxdy=\frac{\pi}{2e}$。

证明：$\iint\limits_D (x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y})dxdy=\frac{\pi}{2e}$。

**证** 方法1 在极坐标下，有

$$I=\iint\limits_D\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(r\cos\theta f'_x+r\sin\theta f'_y)r\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}(r\cos\theta f'_x+r\sin\theta f'_y)\mathrm{d}\theta.$$

将上式内层积分看作沿闭曲线 $L_r: x^2+y^2=r^2$ 逆时针方向的曲线积分 $\oint_{L_r}-f'_y\mathrm{d}x+f'_x\mathrm{d}y$（注意：因为 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则对应有 $\mathrm{d}x=-r\sin\theta\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}y=r\cos\theta\mathrm{d}\theta$），那么，由格林公式，得

$$\oint_{L_r}-f'_y\mathrm{d}x+f'_x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_r: x^2+y^2\leqslant r^2}(f''_{xx}+f''_{yy})\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_r}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^r\mathrm{e}^{-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho=\pi(1-\mathrm{e}^{-r^2}).$$

于是，$I=\int_0^1\pi(1-\mathrm{e}^{-r^2})r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2\mathrm{e}}.$

5-21 设曲面 $\Sigma$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$，$M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是空间中任意一点，计算曲面积分 $\oiint\limits_\Sigma \frac{dS}{\rho}$，其中，$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$。

**解** 当 $M_0=(0,0,0)$ 时，$\rho=a, I=\frac{1}{a}\oiint\limits_\Sigma\mathrm{d}S=4\pi a.$

当 $M_0\neq(0,0,0)$ 时，令 $r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$，$\varphi$ 为 $OP$ 与 $OM_0$ 的夹角，其中 $P(x,y,z)$ 为球面上的一点，则由余弦定理知 $\rho=\sqrt{a^2-2ar_0\cos\varphi+r_0^2}$. 由对称性，不妨设 $M_0$ 在 $Oz$ 轴正向上，则在球面坐标下：$x=a\cos\theta\sin\varphi, y=a\sin\theta\sin\varphi, z=a\cos\varphi$，且

$$\mathrm{d}S=a^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi.$$

于是

$$I=\oiint\limits_\Sigma\frac{\mathrm{d}S}{\rho}=\iint\limits_D\frac{a^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta}{\sqrt{a^2-2ar_0\cos\varphi+r_0^2}}=a^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^\pi\frac{\sin\varphi}{\sqrt{a^2-2ar_0\cos\varphi+r_0^2}}\mathrm{d}\varphi$$

$$=2\pi a^2\int_0^\pi\frac{\sin\varphi}{\sqrt{a^2-2ar_0\cos\varphi+r_0^2}}\mathrm{d}\varphi=\frac{2\pi a^2}{r_0}\sqrt{a^2-2ar_0\cos\varphi+r_0^2}\Big|_0^\pi$$

$$=2\pi a^2\int_0^\pi\frac{\sin\varphi}{\sqrt{a^2-2ar_0\cos\varphi+r_0^2}}\mathrm{d}\varphi=\frac{2\pi a}{r_0}\sqrt{a^2-2ar_0\cos\varphi+r_0^2}\Big|_0^\pi$$

$$=\frac{2\pi a}{r_0}(a+r_0-|a-r_0|)=\begin{cases}4\pi a, & r_0\leqslant a,\\ \frac{4\pi a^2}{r_0}, & r_0>a.\end{cases}$$

5-22 设 $f(0)=3$，试确定可微函数 $f(x)$ 使曲线积分 $\int_L(1+y)f(x)dx+(f(x)+x)dy$ 与路径无关。

**解** 设 $P=(1+y)f(x), Q=f(x)+x$，因为曲线积分与路径无关，则由 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ 得

$$f'(x)-f(x)=-1.$$

解此微分方程得 $f(x)=Ce^x+1$，代入初始条件得 $C=2$，故 $f(x)=2e^x+1$.

5-23　设函数 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且满足 $f(t)=e^{\pi t^2}+\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})d\sigma$，其中，$D: x^2+y^2\le t^2$。求 $f(t)$。

**解**　$\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(\rho)\rho\mathrm{d}\rho=2\pi\int_0^t f(\rho)\rho\mathrm{d}\rho$，

依题意，得 $f(t)=\mathrm{e}^{\pi t^2}+2\pi\int_0^t f(\rho)\rho\mathrm{d}\rho$. 方程两边求导数得

$$f'(t)=2\pi t\mathrm{e}^{\pi t^2}+2\pi t f(t),\quad \text{即}\quad f'(t)-2\pi t f(t)=2\pi t\mathrm{e}^{\pi t^2},$$

则

$$f(t)=\mathrm{e}^{\int 2\pi t\mathrm{d}t}\left(\int 2\pi t\mathrm{e}^{\pi t^2}\mathrm{e}^{\int -2\pi t\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C\right)=(C+\pi t^2)\mathrm{e}^{\pi t^2}.$$

由 $f(0)=1$ 得 $C=1$，所以，$f(t)=(1+\pi t^2)\mathrm{e}^{\pi t^2}$.

5-24　设函数 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，$\Omega(t)=\{(x,y,z)\in R^3\mid x^2+y^2+z^2\le t^2, z\ge 0\}$，$S(t)$ 是 $\Omega(t)$ 的表面，$D(t)$ 是 $\Omega(t)$ 在 xoy 平面上的投影区域，$L(t)$ 是 $D(t)$ 的边界曲线，已知当 $t\in(0,+\infty)$ 时，恒有

$$\begin{aligned}&\oint_{L(t)} f(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}ds+\oiint\limits_{S(t)}(x^2+y^2+z^2)dS\\ &=\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)d\sigma+\iiint\limits_{\Omega(t)}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dV\end{aligned},$$

求 $f(t)$ 的表达式。

解　因为

$$\oint_{L(t)} f(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s = tf(t^2)\oint_{L(t)}\mathrm{d}s = 2\pi t^2 f(t^2),$$

$$\oiint_{S(t)}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S = t^2\iint_{S\text{上半球面}}\mathrm{d}S + \iint_{S\text{底面}}(x^2+y^2)\mathrm{d}S = 2\pi t^4 + \frac{\pi}{2}t^4 = \frac{5\pi}{2}t^4,$$

$$\iint_{D(t)} f(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r = 2\pi\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r,$$

$$\iiint_{\Omega(t)}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}V = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^t rr^2\sin\varphi\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\pi t^4,$$

所以，

$$2\pi t^2 f(t^2) + \frac{5\pi}{2}t^4 = 2\pi\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r + \frac{1}{2}\pi t^4,$$

即

$$t^2 f(t^2) + t^4 = \int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r,$$

两边求导，得

$$2t^3 f'(t^2) + 2tf(t^2) + 4t^3 = tf(t^2),$$

令 $u=t^2$，得

$$f'(u) + \frac{1}{2u}f(u) = -2,$$

解得

$$f(u) = -\frac{4}{3}u + \frac{C}{\sqrt{u}},$$ 其中 $C$ 为任意常数.

# 六、无穷级数

（竞赛大纲）

1. 常数项级数的收敛与发散、收敛级数的和、级数的基本性质与收敛的必要条件.
2. 几何级数与 p 级数及其收敛性、正项级数收敛性的判别法、交错级数与莱布尼茨(Leibniz)判别法.
3. 任意项级数的绝对收敛与条件收敛.
4. 函数项级数的收敛域与和函数的概念.
5. 幂级数及其收敛半径、收敛区间（指开区间)、收敛域与和函数.
6. 幂级数在其收敛区间内的基本性质(和函数的连续性、逐项求导和逐项积分)、简单幂级数的和函数的求法.
7. 初等函数的幂级数展开式.
8. 函数的傅里叶(Fourier)系数与傅里叶级数、狄利克雷(Dirichlei)定理、函数在[-1，1]上的傅里叶级数、函数在[0,1]上的正弦级数和余弦级数

6-1　讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}(a>0)$ 的敛散性。

【解】$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\dfrac{a}{e}$。

当 $a<e$ 时，级数收敛；当 $a>e$ 时，级数发散；当 $a=e$ 时，由于 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 单调增加

以 $e$ 为极限，故 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ 单调减少以 1 为极限，于是对 $\forall n$，$u_{n+1}>u_n$，级数发散。

综上所述，当 $0<a<e$ 时，级数收敛；当 $a\geq e$ 时，级数发散。

6-2　设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某领域内具有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，证明：

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛。

**证**　因为函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，则 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，且 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$。

**证**　**方法 1**　由洛必达法则，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{2}=\dfrac{f''(0)}{2}$，

所以，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left|f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right|}{\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{|f''(0)|}{2}$，由比较判别法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 绝对收敛。

**方法 2**　因为函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数，则 $f''(x)$ 在该邻域内的某闭子区间 $[-a,a]$ 上有界，即存在常数 $M>0$，使得 $|f''(x)|\leqslant M$。由泰勒公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\theta x)}{2!}x^2=\frac{f''(\theta x)}{2}x^2,\quad 0<\theta<1$$

知，在区间 $[-a,a]$ 上，$|f(x)|\leqslant\dfrac{Mx^2}{2}$，从而存在正整数 $N$，当 $n>N$ 时，恒有 $\left|f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right|\leqslant\dfrac{M}{2}\dfrac{1}{n^2}$。由比较判别法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 绝对收敛。

6-3　证明：级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ 条件收敛。

**证** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$ 是交错级数，但不满足莱布尼茨(Leibniz)判别法.

因为 $|u_n|=\dfrac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}}\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{n-1}}$，所以由比较判别法知，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}|u_n|=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ 发散. 又因为

$$S_{2n}=\sum_{k=2}^{2n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+(-1)^k}}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right),$$

由于上式每个括号都小于 0，所以 $\{S_{2n}\}$ 单调递减. 再由

$$\begin{aligned}S_{2n}&>\left(\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{2n+2}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{2n+2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}>-\frac{1}{\sqrt{2}},\end{aligned}$$

知 $\{S_{2n}\}$ 单调递减有下界，故 $\{S_{2n}\}$ 收敛，记 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=S$. 易知 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，则

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}(S_{2n}+u_n)=S+0=S.$$

所以，原级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛，从而级数收敛. 所以，原级数条件收敛.

**注** 问：级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ 是否收敛？

6-4　设 $a_n=\int_0^{n\pi}x|\sin x|dx, n=1,2,\ldots$，求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$ 的值。

**解** 令 $x=n\pi-t$，则

$$a_n=-\int_{n\pi}^{0}(n\pi-t)|\sin t|\,dt=n\pi\int_0^{n\pi}|\sin x|\,dx-\int_0^{n\pi}x|\sin x|\,dx,$$

所以 $a_n=\dfrac{n\pi}{2}\int_0^{n\pi}|\sin x|\,dx=\dfrac{n^2\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin x\,dx=n^2\pi, n=1,2,\cdots$.

记 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n, -1<x<1$，因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},\quad -1<x<1,$$

逐项求导，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2},\quad -1<x<1,$$

整理得

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2},\quad -1<x<1.$$

再次逐项求导，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}=\frac{1+x}{(1-x)^3},\quad -1<x<1,$$

整理得

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3},\quad -1<x<1.$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}=\pi S\left(\frac{1}{2}\right)=6\pi.$$

6-5　讨论级数 $1-\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^x}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^x}+\ldots$ 的收敛性。

**解** (1) $x=1$ 时，级数为 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots$，由莱布尼茨判别法知，该级数收敛；

(2) 当 $x>1$ 时，因为级数

$$\left(1-\frac{1}{2^x}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4^x}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^x}\right)+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{(2k)^x}\right)$$

是一个发散级数与一个收敛级数的和，所以它必然发散，从而去括号后得到的原级数必发散；

(3) 当 $x<1$ 时，考虑顺序加括号级数

$$1-\left(\frac{1}{2^x}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4^x}-\frac{1}{5}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{(2n)^x}-\frac{1}{2n+1}\right)-\cdots, \qquad ①$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{(2n)^x}-\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{n^x}}=\dfrac{1}{2^x}$，又级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 当 $x<1$ 时发散，由比较判别法极限形式知正项级数 $\left(\frac{1}{2^x}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4^x}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{(2n)^x}-\frac{1}{2n+1}\right)+\cdots$ 发散，于是式①对应的级数发散，从而原级数必发散.

所以，该级数当且仅当 $x=1$ 时级数收敛.

**注** 对于 $x>1$ 的情形，可以使用部分和来证. 事实上，因为

$$\begin{aligned}S_{2n}&=1-\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^x}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^x}\\&=\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2^x}+\frac{1}{4^x}+\cdots+\frac{1}{(2n)^x}\right),\end{aligned}$$

由于级数 $1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\cdots$ 发散，当 $x>1$ 时，级数 $\frac{1}{2^x}+\frac{1}{4^x}+\cdots+\frac{1}{(2n)^x}+\cdots$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=+\infty$，所以原级数发散.

6-6 设函数 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，周期为 1，且 $\int_0^1\varphi(x)dx=0$，函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数，设 $a_n=\int_0^1 f(x)\varphi(nx)dx$，求证：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n{}^2$ 收敛。

证：由已知条件 $\int_0^1\varphi(u)du=\int_1^2\varphi(u)du=\cdots=\int_{n-1}^n\varphi(u)du=0$，

令 $F(x)=\int_0^x\varphi(t)dt$，则 $F(x)$ 为周期为 1 的函数，且 $F'(nx)=n\varphi(nx), F(0)=F(n)=0$，

因此

$$a_n=\frac{1}{n}\int_0^1 f(x)F'(nx)dx=\frac{1}{n^2}\int_0^1 f(x)dF(nx)=\frac{1}{n^2}f(x)F(x)\Big|_0^1-\frac{1}{n^2}\int_0^1 f'(x)F(nx)dx$$

$$=\frac{1}{n^2}f(1)F(1)-\frac{1}{n^2}f(0)F(0)-\frac{1}{n^2}\int_0^1 f'(x)\,F(nx)dx=-\frac{1}{n^2}f'(\xi)F(n\xi)(0<\xi<1),$$

$\because F(x)$ 连续、周期，$\therefore F(x)$ 有界，$\therefore \exists M_1>0$，使 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有 $|F(x)|\le M$，即

$|F(nx)|\le M$，又 $\because f'(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，$\therefore \exists M_2>0$，使 $\forall x\in(0,1)$，有 $|f'(x)|\le M_2$，

故 $\qquad |a_n|\le\frac{1}{n^2}|f'(\xi)F(n\xi)|\le\frac{1}{n^2}M_1M_2,\ a_n^2\le\frac{1}{n^2}M_1^2M_2^2,$

由正项级数比较法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛.

6-7　对实数 $p$，讨论级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^p\ln n}$ 的收敛域。

**解**　记 $a_n=\frac{1}{n^p\ln n}$，由 $L=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$ 知，该幂级数的收敛半径为 $R=\frac{1}{L}=1$，收敛区间为 $(-1,1)$.

再讨论端点的收敛性.

(1) 当 $p<0$ 时，因为 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ 以及 $\lim_{n\to\infty}(-1)^n a_n=\infty$，所以，该幂级数在 $x=-1$ 及 $x=1$ 处都发散，故其收敛域为 $(-1,1)$.

(2) 当 $0\leqslant p<1$ 时，因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n}}=+\infty$，所以，该幂级数在 $x=1$ 处发散；又 $\{a_n\}$ 单调递减趋于 0，故该幂级数在 $x=-1$ 处收敛. 所以其收敛域为 $[-1,1)$.

(3) 当 $p>1$ 时，因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n^{\frac{1+p}{2}}}}=0$ 及 $\lim_{n\to\infty}\frac{|(-1)^n a_n|}{\frac{1}{n^{\frac{1+p}{2}}}}=0$，所以，该幂级数

6-8　设正数列 $\{a_n\}$ 单调增加，证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛的充要条件是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\ldots a_n}$ 收敛。

**证**　先证充分性. 因为正数列 $\{a_n\}$ 单调增加，则

$$0<\frac{1}{a_n}=\frac{n}{na_n}\leqslant\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n},$$

又级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ 收敛，由比较判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛.

再证必要性. 因为正数列 $\{a_n\}$ 单调增加，则

$$0<u_{2n}=\frac{2n}{a_1+a_2+\cdots+a_{2n}}\leqslant\frac{2n}{a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}}\leqslant\frac{2n}{na_n}=\frac{2}{a_n},$$

$$0<u_{2n+1}=\frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_{2n+1}}\leqslant\frac{2n}{a_1+a_2+\cdots+a_{2n}}\leqslant\frac{2}{a_n},$$

因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛，由比较判别法知，正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_{2n}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}u_{2n+1}$ 都收敛，从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n}+u_{2n+1})$ 收敛，因此，级数 $\sum_{n=2}^{\infty}u_n$ 收敛，进一步，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

6-9　设 $a_0=4,a_1=1,a_{n-2}=n(n-1)a_n,n\geq 2$，（1）求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数 $S(x)$；

（2）求 $S(x)$ 的极值。

解 (1) 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间为 $(-R,R)$，逐项求导得

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},\quad S''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2},\quad x\in(-R,R).$$

依题意，得 $S''(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n-2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，所以，有

$$S''(x)-S(x)=0.$$

解此二阶常系数齐次线性微分方程，得 $S(x)=C_1 e^x+C_2 e^{-x}$. 代入初始条件

$$S(0)=a_0=4,\quad S'(0)=a_1=1,$$

得 $C_1=\frac{5}{2}$，$C_2=\frac{3}{2}$. 于是，$S(x)=\frac{5}{2}e^x+\frac{3}{2}e^{-x}$.

(2) 令 $S'(x)=\frac{5}{2}e^x-\frac{3}{2}e^{-x}=0$，得 $x=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}$. 又 $S''(x)=\frac{5}{2}e^x+\frac{3}{2}e^{-x}>0$，所以 $S(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}$ 处取极小值.

6-10 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n}$ 的收敛域与和函数，并求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$ 的和。

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^{3n+3}}{3n+4}\Big/\frac{x^{3n}}{3n+1}\right|=|x|^3$，当 $|x|<1$ 时，幂级数收敛；当 $|x|>1$ 时，幂级数发散；当 $x=1$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$，收敛；当 $x=-1$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3n+1}$，发散. 所以，幂级数的收敛域为 $(-1,1]$. 记

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n},\quad \varphi(x)=xS(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1},\quad -1<x\leqslant 1,$$

则 $\varphi(0)=0$，$S(0)=1$，且

$$\varphi'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}=\frac{1}{1+x^3},\quad -1<x<1.$$

因为

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=\varphi(0)+\int_0^x\frac{1}{1+t^3}dt=\int_0^x\frac{1-t^2+t^2}{1+t^3}dt=\frac{1}{3}\int_0^x\frac{d(1+t^3)}{1+t^3}+\int_0^x\frac{1-t}{t^2-t+1}dt\\&=\frac{1}{3}\ln(1+x^3)-\frac{1}{2}\int_0^x\frac{2t-1}{t^2-t+1}dt+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dt\\&=\frac{1}{3}\ln(1+x^3)-\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt3}+\frac{\pi}{6\sqrt3},\end{aligned}$$

于是，

$$S(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}\ln(1+x^3)-\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)\\ \qquad+\frac{1}{\sqrt3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt3}+\frac{3\pi}{\sqrt3}, & -1<x\leqslant 1,x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

令 $x=1$ 得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\pi}{3\sqrt3}$.

6-11 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$ 的和函数 $S(x)$ 。

解　因为 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^4}{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)}\right| = 0$，

所以该幂级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

由 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$ 逐项求导 4 次，依次得

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!},\quad S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!},$$

$$S'''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!},\quad S^{(4)}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-4}}{(4n-4)!}.$$

整理得 $S^{(4)}(x)-S(x)=0$，解此四阶常系数齐次线性微分方程得

$$S(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x.$$

代入初始条件 $S(0)=1, S'(0)=S''(0)=S'''(0)=0$ 得 $C_1=C_2=\frac{1}{4}, C_3=\frac{1}{2}$，$C_4=0$，所以

$$S(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{4}+\frac{1}{2}\cos x.$$

6-12　将函数 $f(x)=\arctan\frac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 $x$ 的幂级数，并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和。

解　因 $f'(x)=-\frac{2}{1+4x^2}=-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n4^nx^{2n}, -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$，且 $f(0)=\frac{\pi}{4}$，

逐项积分得

$$f(x)-f(0)=-2\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n4^nt^{2n}\,dt=-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n},$$

整理，得

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n}, -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}.$$

因为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 收敛，函数 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处连续，所以上式右端幂级数在 $x=\frac{1}{2}$ 处收敛，所以，有

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n},\quad -\frac{1}{2}<x\leqslant\frac{1}{2}.$$

在上述展开式中令 $x=\frac{1}{2}$，得 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$.

6-13　求 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}([\frac{2n}{k}]-2[\frac{n}{k}])$。

**解**　令 $I=\int_0^1\left(\left[\frac{2}{x}\right]-2\left[\frac{1}{x}\right]\right)\mathrm{d}x$.

当 $n\leqslant\frac{1}{x}<n+1$ 即 $\frac{1}{n+1}<x\leqslant\frac{1}{n}$ 时，$\left[\frac{1}{x}\right]=n$；同样，当 $\frac{2}{n+1}<x\leqslant\frac{2}{n+}$

时，$\left[\frac{2}{x}\right]=n$. 由于

$$\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]=\left(\frac{2}{2n+2},\frac{2}{2n}\right]=\left(\frac{2}{2n+2},\frac{2}{2n+1}\right]\cup\left(\frac{2}{2n+1},\frac{2}{2n}\right),$$

当 $\frac{2}{2n+1}<x\leqslant\frac{2}{2n}$ 时，$\left[\frac{2}{x}\right]=2n$，$\left[\frac{1}{x}\right]=n$，此时

$$\left[\frac{2}{x}\right]-2\left[\frac{1}{x}\right]=2n-2n=0.$$

当 $\frac{2}{2n+2}<x\leqslant\frac{2}{2n+1}$ 时，$\left[\frac{2}{x}\right]=2n+1$，$\left[\frac{1}{x}\right]=n$. 此时

$$\left[\frac{2}{x}\right]-2\left[\frac{1}{x}\right]=(2n+1)-2n=1.$$

因此，

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{2n+1}-\frac{2}{2n+2}\right)=2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\right)$$
$$=2\left(\ln 2-1+\frac{1}{2}\right)=\ln 4-1.$$

6-14　设 $a_n=\int_n^{n+1}\frac{\sin\pi x}{x^p+1}dx$， $n=1,2,...,$ 其中 $p$ 为正数，证明：（1）当 $p>1$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 绝对收敛；（2）当 $0<p\leq 1$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛。

**证** (1) 当 $p\geq 1$ 时,有

$$|a_n|\leqslant\int_n^{n+1}\frac{1}{x^p+1}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{n^p},$$

由于级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛,所以级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 绝对收敛.

(2) 当 $0<p\leqslant 1$ 时,由广义积分中值定理知

$$a_n=\int_n^{n+1}\frac{\sin\pi x}{x^p+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{\xi_n^p+1}\int_n^{n+1}\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{2(-1)^n}{\pi(\xi_n^p+1)},\quad \text{其中 } n<\xi_n<n+1,$$

因此级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 为交错级数.

记 $a_n=(-1)^nb_n,n=1,2,\cdots$,则 $0<b_{n+1}=\frac{2}{\pi(\xi_{n+1}^p+1)}<\frac{2}{\pi(\xi_n^p+1)}=b_n$,所以 $\{b_n\}$ 单调递减;又 $0<b_n<\frac{2}{\pi(n^p+1)}$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

于是,由莱布尼茨判别法知级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛.

**注** (1) 广义积分中值定理:设 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上都连续且 $g(x)$ 不变号,则在 $[a,b]$ 上至少存在一点 $\xi$,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 利用分部积分可以得到关于 $0<p\leqslant 1$ 的另一证明.因为

$$\begin{aligned}a_n&=\int_n^{n+1}\frac{\sin\pi x}{x^p+1}\mathrm{d}x=-\frac{1}{\pi}\frac{\cos\pi x}{x^p+1}\Big|_n^{n+1}-\frac{1}{\pi}\int_n^{n+1}\frac{px^{p-1}\cos\pi x}{(x^p+1)^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{(-1)^n}{\pi}\left[\frac{1}{n^p+1}+\frac{1}{(n+1)^p+1}\right]-\frac{1}{\pi}\int_n^{n+1}\frac{px^{p-1}\cos\pi x}{(x^p+1)^2}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

记 $b_n=\int_n^{n+1}\frac{px^{p-1}\cos\pi x}{(x^p+1)^2}\mathrm{d}x,n=1,2,\cdots$,则

$$|b_n|\leqslant\int_n^{n+1}\frac{px^{p-1}}{(x^p+1)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{n^p+1}-\frac{1}{(n+1)^p+1}=\frac{n^p\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^p-1\right]}{(n^p+1)[(n+1)^p+1]}.$$

进一步,有

$$|b_n|\leqslant\frac{n^p\cdot\frac{1}{n}}{(n^p+1)[(n+1)^p+1]}<\frac{1}{n[(n+1)^p+1]}<\frac{1}{n^{1+p}}.$$

所以,由比较判别法知,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛,又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{n^p+1}+\frac{1}{(n+1)^p+1}\right]$ 条件收敛,因此级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 条件收敛.

6-15 分析级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n^3}{n^2+1}\pi\right)$ 的收敛性。

**Solution 7.** *因为* $\sin\left(\frac{n^3}{n^2+1}\pi\right)=-\cos n\pi\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{n^2+1}\right)=(-1)^{n+1}\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{n^2+1}\right)\sim(-1)^{n+1}\frac{n\pi}{n^2+1}$, *而级数* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n\pi}{n^2+1}$ *发散, 因此级数* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n^3}{n^2+1}\pi\right)$ *发散.*

6-16 设函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数,且 $F(0)=1,\ F(x)f(x)=\cos 2x$,

$a_n=\int_0^{n\pi}|f(x)|dx,n=1,2,\ldots,$ 求幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{n^2-1}x^n$ 的收敛域与和函数。

收敛。

**解** $F'(x)=f(x)$, $F(x)F'(x)=\cos 2x$, $\int F(x)F'(x)\mathrm{d}x=\int\cos 2x\mathrm{d}x$, $F^2(x)=\sin 2x+C$, 由 $F(0)=1$ 知 $C=1$, $F(x)=\sqrt{1+\sin 2x}=|\cos x+\sin x|$, $|f(x)|=\dfrac{|\cos 2x|}{|F(x)|}=\dfrac{|\cos^2 x-\sin^2 x|}{|\cos x+\sin x|}=|\cos x-\sin x|$, $\int_0^{\pi}|f(x)|\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(\sin x-\cos x)\mathrm{d}x=(\sqrt{2}-1)+(1+\sqrt{2})=2\sqrt{2}$. 因为 $|f(x)|$ 的周期为 $\pi$, 则 $a_n=\int_0^{n\pi}|f(x)|\mathrm{d}x=n\int_0^{\pi}|f(x)|\mathrm{d}x=2n\sqrt{2}$, $n=1,2,\cdots$, 于是, $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^2-1}x^n=2\sqrt{2}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n}{n^2-1}x^n$, 其收敛域为 $[-1,1)$. 当 $x\neq 0$ 时，有

$$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{n^2-1}x^n=\sqrt{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1}\right)x^n$$
$$=\sqrt{2}\left(x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}+\frac{1}{x}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right),$$

且 $S(0)=0$. 又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$, $-1\leqslant x<1$, 故当 $x\neq 0$ 时，

$$S(x)=\sqrt{2}\left[-x\ln(1-x)-\frac{1}{x}\left(-\ln(1-x)-x-\frac{x^2}{2}\right)\right]$$
$$=\sqrt{2}\left(\frac{1-x^2}{x}\ln(1-x)+1+\frac{x}{2}\right),$$

所以，$S(x)=\begin{cases}\sqrt{2}\left(\dfrac{1-x^2}{x}\ln(1-x)+1+\dfrac{x}{2}\right), & -1\leqslant x<1,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

6-17　求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x-1}{a_n+1}\right)^n$ 的收敛区间，并讨论端点的敛散性，其中 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，且 $0<a_{n+1}<a_n(n\in N)$。

**解**　设 $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$，则因 $\{a_n\}$ 单调下降有下界 0，故 $a\in R$，而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，所以 $a>0$，令 $u_n=(\dfrac{1}{a_n+1})^n$，则

$$l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n+1}=\frac{1}{a+1}$$

收敛半径 $R=\dfrac{1}{l}=a+1$，收敛区间为 $(-a,a+2)$，由 $0<\dfrac{1}{a_n+1}<\dfrac{1}{a+1}<1$ 知

$$(\frac{1}{a_n+1})^n<(\frac{1}{a+1})^n$$

因此，收敛域为 $[-a,a+2]$.

6-18　设偶函数 $f(x)\in C^2(u(\mathbf{0}))$, 且 $f(\mathbf{0})=\mathbf{1}$，$f''(\mathbf{0})=\mathbf{2}$，证明：$\sum\limits_{n=\mathbf{1}}^{\infty}[f(\dfrac{\mathbf{1}}{n})-\mathbf{1}]$ 绝对收敛。

证明：因为 $f(x)$ 为偶函数，则 $f'(0)=0$，且 $f(0)=1$，$f''(0)=2$，

所以 $f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)\cdot\frac{x^2}{2!}+o(x^2)=1+x^2+o(x^2)$

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=1+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

则 $u_n=f\left(\frac{1}{n}\right)-1=\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\sim\frac{1}{n^2}\ (n\to\infty)$.

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]$ 绝对收敛.

6-19　设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$b_n=1-\frac{\ln(1+a_n)}{a_n}$，证明：$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛。

证明：易知 $b_n=1-\frac{\ln(1+a_n)}{a_n}>0$；$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，所以 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

下求 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-\ln(1+a_n)}{a_n^2}$，

计算 $\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\frac{1}{2}$，

所以 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\frac{1}{2}$，因为 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛.

6-20　求幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\ln n}{n^3}+\frac{1}{n\ln n}\right)x^n$ 的收敛域。

**解**　先求 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^3}x^n$ 的收敛域。为此，令 $a_n=\frac{\ln n}{n^3}$，则因

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$ 故收敛半径 R=1，易见当 $x=\pm 1$ 时，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^3}x^n$ 都绝对收敛，

从而收敛域为 $[-1,1]$.

下面再求幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}x^n$ 的收敛域。

令 $b_n=\frac{1}{n\ln n}$，则因

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_n+1}{b_n}\right|=1$，故收敛半径为 1。

易见 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}x^n$ 的收敛域为 $[-1,1]$.

原级数的收敛域为 $[-1,1)\cap[-1,1]$ 即 $[-1,1]$.

6-21　设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，当 $n>1$ 时 $a_{n-2}=n\ (n-1)\ a_n$，且 $a_0=4,\ a_1=1$；

（1）求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$的和函数$S(x)$；

（2）求和函数$S(x)$的极值.

分析：注意到$a_{n-2}$与$a_n$的关系，容易想到要对级数求两次导。

解（1）令$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$，则$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}$

$S''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}=\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=S(x)$，　$S''(x)-S(x)=0$

$S(x)=c_1e^x+c_2e^{-x}$　由$S(0)=a_0=4, S'(0)=a_1=1$，求得$c_1=\frac{5}{2}, c_2=\frac{3}{2}, S(x)=\frac{5}{2}e^x+\frac{3}{2}e^{-x}$

（2）由$S'(x)=\frac{5}{2}e^x-\frac{3}{2}e^{-x}=0$得$x_0=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}$，又$S''(x_0)>0$，$\therefore S(x_0)$为极小值$S(\frac{1}{2}\ln\frac{3}{5})=\sqrt{15}$.

6-22　设$u_n\neq 0\ (n=1,2,\cdots)$且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$，求证：级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$条件收敛.

解　$\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1, \therefore u_n\to+\infty\ (n\to\infty)$, $\exists N\in N_+, \forall n>N, u_n>0$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}\frac{1}{n}=0.$

$\because\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_{n+1}}=1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\frac{n+1}{u_{n+1}}=2$;　$\therefore$级数不绝对收敛。

$\because S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(\frac{1}{u_k}+\frac{1}{u_{k+1}}\right)=\left(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}\right)-\left(\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}\right)+\cdots+(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)=\frac{1}{u_1}+(-1)^{n-1}\frac{1}{u_{n+1}}$,

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{u_1}$.　故级数收敛且为条件收敛。

6-23　已知$x_0=1$，$x_1=\frac{1}{x_0^3+4}$，$x_2=\frac{1}{x_1^3+4}$，$\cdots$，$x_{n+1}=\frac{1}{x_n^3+4}$，$\cdots$. 求证：

（1）数列$\{x_n\}$收敛；

（2）$\{x_n\}$的极限值$a$是方程$x^4+4x-1=0$的唯一正根.

解一：（1）$\because 0<x_n<1$，$|x_{n+1}-x_n|=\left|\dfrac{1}{x_n^3+4}-\dfrac{1}{x_{n-1}^3+4}\right|=\dfrac{|x_n^3-x_{n-1}^3|}{(x_n^3+4)(x_{n-1}^3+4)}$

$$<\frac{|x_n-x_{n-1}||x_n^2+x_nx_{n-1}+x_{n-1}^2|}{4^2}<\frac{3|x_n-x_{n-1}|}{16}<\left(\frac{3}{16}\right)^2|x_{n-1}-x_{n-2}|<\cdots<\left(\frac{3}{16}\right)^n|x_1-x_0|$$

$=\left(\dfrac{3}{16}\right)^n\left|\dfrac{1}{5}-1\right|=\dfrac{4}{5}\left(\dfrac{3}{16}\right)^n$； 又$\because \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{3}{16}\right)^n$收敛，$\therefore \sum\limits_{n=0}^{\infty}|x_{n+1}-x_n|$收敛，

$\therefore \sum\limits_{n=0}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$收敛，又因$S_n=x_{n+1}-x_0$，故$\{x_n\}$收敛。

（2）令$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\because 0<x_n<1$，$\because a\geq 0$，且$a=\dfrac{1}{a^3+4}$，$a^4+4a-1=0$，即$a$是$x^4+4x-1=0$的根，令$f(x)=x^4+4x-1$，$x\in(0,+\infty)$，$f'(x)=4x^3+4>0$，$f(0)=-1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，故$f(x)=0$根唯一。

解二：由已知$x_0=1$，$x_1=\dfrac{1}{x_0^3+4}=0.2$，$x_2=\dfrac{1}{x_1^3+4}=0.2495\cdots$，$x_3=\dfrac{1}{x_2^3+4}0.2490\cdots$，

由此可见，$x_0>x_2$，$x_1<x_3$ （用归纳法证明偶数项单调减少，奇数项单调增加）。

设$x_{2n-2}\geq x_{2n}$，$x_{2n-1}\leq x_{2n+1}$。

$x_{2n}=\dfrac{1}{x_{2n-1}^3+4}\geq\dfrac{1}{x_{2n+1}^3+4}=x_{2n+2}$， $x_{2n+1}=\dfrac{1}{x_{2n}^3+4}\leq\dfrac{1}{x_{2n+2}^3+4}=x_{2n+3}$

由$0<x_n\leq 1$知$\{x_{2n}\}$、$\{x_{2n+1}\}$收敛，令$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=b$；

由$0<x_{2n}\leq 1$，$0<x_{2n+1}\leq 1$，知$0\leq a\leq 1$，$0\leq b\leq 1$。

对$x_{2n}=\dfrac{1}{x_{2n-1}^3+4}$两边取极限得$a=\dfrac{1}{b^3+4}$，$ab^3+4a=1$ ①

对$x_{2n+1}=\dfrac{1}{x_{2n}^3+4}$两边取极限得$b=\dfrac{1}{a^3+4}$，$a^3b+4b=1$ ②

由①—②得$ab(b^2-a^2)+4(a-b)=0$，解得$a-b=0$

由$a=b$知$\{x_n\}$收敛，且为方程$x^4+4x-1=0$的根（再证唯一性）。

# 七、常微分方程

（竞赛大纲）

1. 常微分方程的基本概念：微分方程及其解、阶、通解、初始条件和特解等.
2. 变量可分离的微分方程、齐次微分方程、一阶线性微分方程、伯努利(Bernoulli)方程、全微分方程.
3. 可用简单的变量代换求解的某些微分方程、可降阶的高阶微分方程：$y^{(n)}=f(x)$, $y''=f(x,y')$, $y''=f(y,y')$.
4. 线性微分方程解的性质及解的结构定理.
5. 二阶常系数齐次线性微分方程、高于二阶的某些常系数齐次线性微分方程.
6. 简单的二阶常系数非齐次线性微分方程：自由项为多项式、指数函数、

正弦函数、余弦函数，以及它们的和与积

7. 欧拉(Euler)方程.
8. 微分方程的简单应用

7-1　设当$x>-1$时，可微函数$f(x)$满足条件$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0$，且$f(0)=1$，试证：当$x\geq 0$时，有$e^{-x}\leq f(x)\leq 1$成立.

**分析**：这是一个积分微分方程，可以通过两边求导变成一个微分方程，然后求解。

证明：设由题设知$f'(0)=-1$，则所给方程可变形为

$$(x+1)f'(x)+(x+1)f(x)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0.$$

两端对$x$求导并整理得

$$(x+1)f''(x)+(x+2)f'(x)=0,$$

这是一个可降阶的二阶微分方程，可用分离变量法求得

$$f'(x)=\frac{Ce^{-x}}{1+x}.$$

由$f'(0)=-1$得$c=-1$，$f'(x)=-\frac{e^{-x}}{1+x}<0$，可见$f(x)$单减.

而$f(0)=1$，所以当$x\geq 0$时，$f(x)\leq 1$。

对$f'(t)=-\frac{e^{-t}}{1+t}<0$在$[0,x]$上进行积分得

$$f(x)=f(0)-\int_0^x\frac{e^{-t}}{1+t}\mathrm{d}t\geq 1-\int_0^x e^{-t}\mathrm{d}t=e^{-x}.$$

7-2　已知$a_1>0,a_2>0$

（1）若存在数列$\{y_n\}$满足条件：

$$(a)y_n>0;(b)\lim_{n\to\infty}y_n=0;(c)y_n=a_1y_{n+1}+a_2y_{n+2}\qquad n=1,2,3\cdots$$

证明：$a_1+a_2>1$；

（2）若$a_1+a_2>1$，证明存在满足条件（$a$）、（$b$）、（$c$）的数列$\{y_n\}$。

*Proof.* (1).$\{y_n\}$ 事实上是差分方程 $y_n=a_1y_{n+1}+a_2y_{n+2}$ 的解，它的特征方程是 $1=a_1r+a_2r^2$，特征根是 $r_{1,2}=\frac{-a_1\pm\sqrt{a_1^2+4a_2}}{2a_2}$，要使得 $\lim_{n\to\infty}y_n=0$ 必须 $|r_{1,2}|<1$，由此可得 $a_1+a_2>1$，以及 $a_2-a_1>1$.

(2).不妨取 $a_1=3,a_2=1$，则对任意的 $A_1,A_2\in\mathbb{R}$，$y_n=A_1\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{6}\right)^n+A_2\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{6}\right)^n$ 都满足条件(b)和(c)，为了满足(a) 简单地取 $A_1=1,A_2=0$即可，即 $y_n=\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{6}\right)^n$ 满足三个条件. □

7-3　设 $f(u)$ 为可微函数，$z = xf(\frac{y}{x}) + y$ 满足关系式 $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$，且 $f(1)=1$，求 $f(u)$　的表达式。

解　令 $u=\frac{y}{x}$，则 $z=xf(u)+y$，从而

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f(u) - \frac{y}{x}f'(u), \frac{\partial z}{\partial y} = f'(u) + 1,$$

代入方程 $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$ 得

$$f'(u) + \frac{1}{2u}f(u) = -\frac{3}{2},$$

解得 $f(u) = -u + \frac{C}{\sqrt{u}}$，代入初始条件得 $C=2$，所以，$f(u) = -u + \frac{2}{\sqrt{u}}$.

7-4　设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，函数 $z = f(e^x \sin y)$ 满足方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (z+1)e^{2x}$，若 $f(0)=0, f'(0)=0$，求函数 $f(u)$ 的表达式。

解　$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u)e^x \sin y$，　$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(u)e^x \cos y$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f'(u)e^x \sin y + f''(u)e^{2x}\sin^2 y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -f'(u)e^x \sin y + f''(u)e^{2x}\cos^2 y,$$

代入 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (z+1)e^{2x}$，得 $f''(u) - f(u) = 1$.

此方程对应的齐次方程 $f''(u) - f(u) = 0$ 的通解为 $f(u) = C_1 e^u + C_2 e^{-u}$，方程 $f''(u) - f(u) = 1$ 的一个特解为 $f^*(u) = -1$，所以原方程的通解为 $f(u) = C_1 e^u + C_2 e^{-u} - 1$，其中 $C_1, C_2$ 是任意常数.

由 $f(0)=0, f'(0)=0$ 得 $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$，从而函数 $f(u)$ 的表达式为

$$f(u) = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u}) - 1.$$

7-5　设 $x(t)$ 是微分方程 $5x'' + 10x' + 6x = 0$ 的解，证明函数 $f(t) = \frac{x^2(t)}{1+x^4(t)} (t \in R)$ 有最大值，并求它的最大值。

解　微分方程的通解为

$$x(t) = e^{-t}\left(C_1 \cos\sqrt{\frac{1}{5}}t + C_2 \sin\sqrt{\frac{1}{5}}t\right).$$

又，对任意的 $t \in \mathbb{R}$，恒有 $f(t) \leqslant \frac{1}{2}$.

(1) 若 $x(t) \equiv 0$，则 $f(t) \equiv 0$，于是 $\max f(t) \equiv 0$.

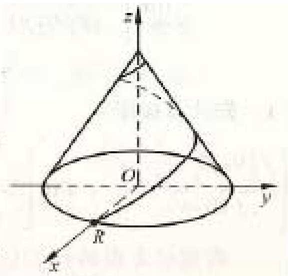
(2) 若 $x(t) \not\equiv 0$，则 $\max f(t) \leqslant \frac{1}{2}$. 往证必存在 $t_0$，使 $x(t_0) = 1$.

事实上，因为 $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0 < 1$，又 $x(t) \not\equiv 0$，则 $C_1, C_2$ 不全为 0.

不妨设 $C_1 > 0$，取 $t_k = -2\sqrt{5}k\pi (k \in \mathbb{N})$，则 $x(t_k) = e^{2\sqrt{5}k\pi}C_1 \to +\infty (k \to +\infty)$，此时，$t_k \to -\infty$. 因此，由介值定理知，必存在 $t_0$，使 $x(t_0) = 1$. 这样，$f(t_0) = \frac{1}{2}$.

所以，当 $x(t) \not\equiv 0$ 时，$\max f(t) = \frac{1}{2}$.

7-6　有一圆锥形的塔，底半径为 R，高为 h（h>R)，现沿塔身建一登上塔顶的楼梯,要求楼梯曲线在每一点的切线与过该点垂直于xoy平面的直线的夹角为$\frac{\pi}{4}$，楼梯入口在（R,0,0），试求楼梯曲线的方程。




**解**　在曲线上任取一点为$P(x,y,z)$，由$\frac{h-z}{h}=\frac{r}{R}$知，$z=h-\frac{h}{R}r$，其中$r=\sqrt{x^2+y^2}$，则曲线参数方程为

$$x=r(\theta)\cos\theta,\quad y=r(\theta)\sin\theta,\quad z=h-\frac{h}{R}r(\theta),\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi. \qquad ①$$

曲线在点$P(x,y,z)$处的切向量为$\tau=[x'(\theta),y'(\theta),z'(\theta)]$，其中

$$x'(\theta)=r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta,\quad y'(\theta)=r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta,$$

$$z'(\theta)=-\frac{h}{R}r'(\theta),$$

垂线方向向量为$k=[0,0,1]$，依题意，知

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\tau\cdot k}{|\tau|\cdot|k|}=\frac{z'(\theta)}{\sqrt{x'^2(\theta)+y'^2(\theta)+z'^2(\theta)}},$$

即$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{-\frac{h}{R}r'(\theta)}{\sqrt{r'^2(\theta)+r^2(\theta)+\frac{h^2}{R^2}r'^2(\theta)}}$，化简得$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=\pm\frac{Rr}{\sqrt{h^2-R^2}}$，由实际问题的意义，应有$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}<0$，故得微分方程

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{Rr}{\sqrt{h^2-R^2}}.$$

解得$r=C_1e^{-\frac{R}{\sqrt{h^2-R^2}}\theta}$，由$\theta=0$，$r=R$得$C_1=R$，故$r=Re^{-\frac{R}{\sqrt{h^2-R^2}}\theta}$，将其代入式①即得楼梯曲线(它是圆锥螺线)方程：

$$x=r(\theta)\cos\theta,\quad y=r(\theta)\sin\theta,\quad z=h-\frac{h}{R}r(\theta),\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,$$

其中$r=Re^{-\frac{R}{\sqrt{h^2-R^2}}\theta}$.

# 八、向量代数和空间解析几何

（竞赛大纲）

1. 向量的概念、向量的线性运算、向量的数量积和向量积、向量的混合积.
2. 两向量垂直、平行的条件、两向量的夹角.
3. 向量的坐标表达式及其运算、单位向量、方向数与方向余弦.
4. 曲面方程和空间曲线方程的概念、平面方程、直线方程.
5. 平面与平面、平面与直线、直线与直线的夹角以及平行、垂直的条件、点到平面和点到直线的距离.
6. 球面、母线平行于坐标轴的柱面、旋转轴为坐标轴的旋转曲面的方程、常用的二次曲面方程及其图形.
7. 空间曲线的参数方程和一般方程、空间曲线在坐标面上的投影曲线方程.

8-1　求母线平行于直线$L: x=y=z$，准线为$\Gamma: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$的柱面方程。

解　在准线$\Gamma$上任取一点$(u,v,w)$，过该点的母线方程为$\frac{x-u}{1}=\frac{y-v}{1}=\frac{z-w}{1}$，其中$(x,y,z)$为柱面上动点的坐标. 在联立方程组$\Gamma: \begin{cases} u^2+v^2+w^2=1, \\ u+v+w=0, \\ x-u=y-v=z-w=t \end{cases}$中消去$u,v,w$，得

$$(x-t)^2+(y-t)^2+(z-t)^2=1, \quad t=\frac{x+y+z}{3}.$$

再消去参数$t$，化简整理得柱面方程：

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz=\frac{3}{2}.$$

8-2　求直线$L: \frac{x}{a}=\frac{y-b}{0}=\frac{z}{1}$绕 z 轴旋转一周所成的曲面方程，并指出它为何曲面，其中$a,b$为常数。

解　直线$L$的参数方程为$x=at, y=b, z=t$，则$L$绕$z$轴旋转一周所成曲面的参数方程为

$$S: x=\sqrt{(at)^2+b^2}\cos\theta, \quad y=\sqrt{(at)^2+b^2}\sin\theta, \quad z=t.$$

消去参数$\theta, t$，得

$$x^2+y^2=a^2z^2+b^2.$$

(1) 当$a=0, b=0$时，$S$为$z$轴；

(2) 当$a=0, b\neq0$时，$S$为圆柱面；

(3) 当$a\neq0, b=0$时，$S$为圆锥面；

(4) 当$a\neq0, b\neq0$时，$S$为旋转单叶双曲面.

注　(1) 将$L$的方程写为$\begin{cases} x=az, \\ y=b, \end{cases}$直接得旋转曲面$S$的方程为$x^2+y^2=a^2z^2+b^2$.

(2) 空间曲线$x=\varphi(t), y=\phi(t), z=\psi(t)$绕$z$轴旋转一周所成曲面的参数方程为

$$S: x=\sqrt{\varphi^2(t)+\phi^2(t)}\cos\theta, \quad y=\sqrt{\varphi^2(t)+\phi^2(t)}\sin\theta, \quad z=\psi(t).$$

8-3　证明：三平面$x=cy+bz, y=az+cx, z=bx+ay$经过同一条直线的充要条件是$a^2+b^2+c^2+2abc=1$。

证　显然，三个平面都过原点. 只要证明它们通过异于原点的某一点即可. 此时，齐次方程组

$$\begin{cases} -x+cy+bz=0, \\ cx-y+az=0, \\ bx+ay-z=0 \end{cases}$$

有非零解的充要条件是

$$\begin{vmatrix} -1 & c & b \\ c & -1 & a \\ b & a & -1 \end{vmatrix}=0,$$

即$a^2+b^2+c^2+2abc=1$.