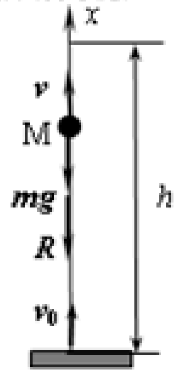
质点动力学基础

1 物体自地球表面以速度 v_0 铅直上抛。试求该物体返回地面时的速度 v_1。假定空气阻力 $R=mkv^2$，其中 k 是比例常量，按数值它等于单位质量在单位速度时所受的阻力。m 是物体质量，v 是物体速度，重力加速度认为不变。

答：$v_1=\dfrac{v_0}{\sqrt{1+\dfrac{kv_0^2}{g}}}$

解：阻力方向在上升与下降阶段不同（其方向与速度 v 相反），故分段考虑

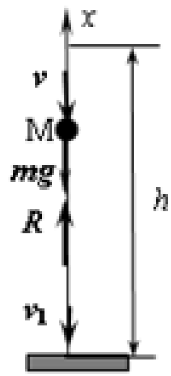


（1） 上升阶段：

$$m\frac{dv}{dt}=-mg-mkv^2$$

通过坐标变换有 $mv\dfrac{dv}{dx}=-mkv^2-mg$ ，积分得

$$\int_o^h dx=-\int_{v_0}^o \frac{vdv}{g+kv^2}\quad,\qquad h=\frac{1}{2k}l_n\frac{g+kv^2}{g}\qquad(1)$$



（2） 下落阶段：

$$m\frac{dv}{dx}=mkv^2-mg\quad,\quad\text{积分得}$$

$$-\int_h^o dx=\int_o^{-v_1}\frac{vdv}{g-kv^2}\qquad,\ h=\frac{1}{2k}l_n\left(\frac{g}{g-kv_1^2}\right)\qquad(2)$$

比较（1)、（2）两式得

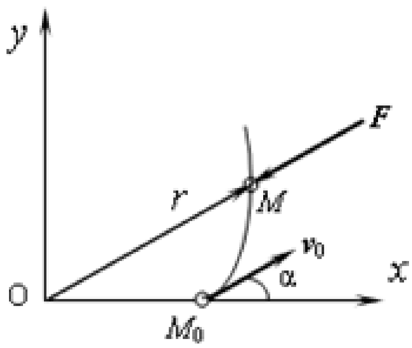
$$\frac{g+kv_0^2}{g}=\frac{g}{g-kv_1^2}\qquad,\qquad\text{所以}\quad v_1=\frac{v_o}{\sqrt{1+\dfrac{kv_o^2}{g}}}$$

2. 静止中心 O 以引力 F=-k²mr 吸引质量是 m 的质点 M，其中 k 是比例常量，$r=\overrightarrow{OM}$ 是点 M 的矢径。运动开始时 $OM_0=b$，初速度时 v_0 并与 $\overrightarrow{OM}$ 成夹角 α。求质点 M 的运动方程。

答 ：

$$x=b\cos kt+\frac{v_0}{k}\cos\alpha\sin kt$$

$$y=\frac{v_0}{k}\sin\alpha\sin kt$$



解：取坐标如图，质点 M 在任意位置。将 $m\vec{a}=\vec{F}$ 沿 x、y 轴投影，得

$$m\ddot{x}=-F\cos\varphi=-k^2mr\cos\varphi=-k^2mx$$

$$m\ddot{y}=-F\sin\varphi=-k^2mr\sin\varphi=-k^2my$$

即 $\quad \ddot{x}+k^2x=0$ ， $\ddot{y}+k^2y=0$

微分方程得通解为： $x=c_1\cos kt+c_2\sin kt$ ， $y=c_3\cos kt+c_4\sin kt$ （1）

求导得 $\dot{x}=-kc_1\sin kt+kc_2\cos kt$ ， $\dot{y}=-kc_3\sin kt+kc_4\cos kt$ （2）

已知初始条件 $t=0$ ， $x_0=b$ ， $y_0=0$ ， $\dot{x}_0=v_0\sin\alpha$ ， $\dot{y}_0=v_0\sin\alpha$

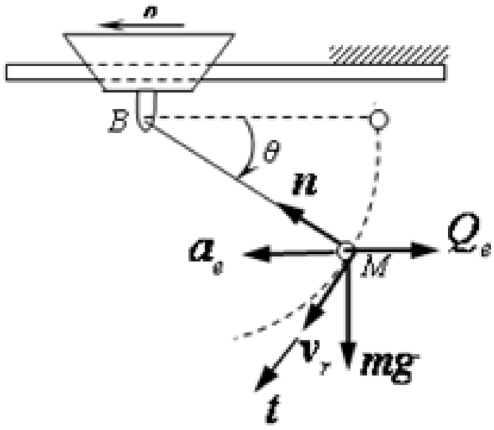
代入方程（1)，（2）得 $c_1=b$ ， $c_2=\frac{v_o}{R}\cos\alpha$ ， $c_3=0$ ， $c_4=\frac{v_o}{k}\sin\alpha$ 质点 M 的运动方程为

$$x=b\cos kt+\frac{v_0}{k}\cos\alpha\sin kt$$

$$y=\frac{v_0}{k}\sin\alpha\sin kt$$

3 单摆 M 的悬线长l，摆重 G,支点 B 具有水平向左的均加速度 a。如将摆在θ=0处静止释放，试确定悬线的张力 T（表示成θ的函数）。

答：$T = G(3\sin\theta + 3\frac{a}{g}\cos\theta - 2\frac{a}{g})$



解：质点的相对微分方程为

$$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{Q}_e$$

投影到切线方向

$$\frac{G}{g}l\ddot{\theta} = G\cos\theta - Q_e\sin\theta \qquad (1)$$

投影到法线方向

$$\frac{G}{g}\frac{v^2}{l} = T - G\sin\theta - Q_e\cos\theta \qquad (2)$$

由式（1）得 $l\dot{\varphi} = g\cos\theta - a\sin\theta$

分离变量并积分 $\int_0^v \frac{v}{l}dv = \int_0^\theta g\cos\theta d\theta - \int_0^\theta a\sin\theta d\theta$

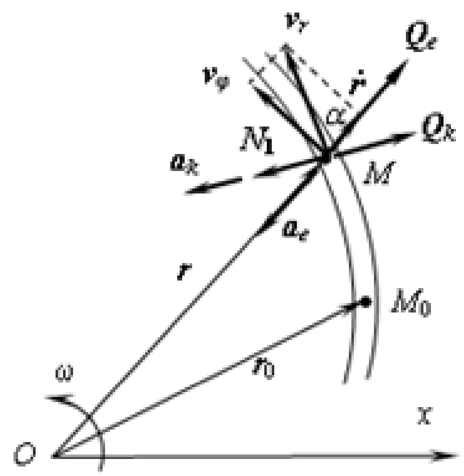
$$v^2 = 2l(g\sin\theta + a\cos\theta - a) \qquad (3)$$

由式（2）得 $T = G\sin\theta + \frac{G}{g}a\cos\theta + \frac{G}{gl}v^2$

将式（3）代入上式 $T = G\left(3\sin\theta + 3\frac{a}{g}\cos\theta - 2\frac{a}{g}\right)$

4. 水平面内弯成任意形状的细管以匀角速度ω绕点 O 转动。光滑小球 M 在管内可自由运动。设初瞬时小球在 M_0 处，$OM_0=r_0$，相对初速度 $v_0=0$，求小球相对速度大小v_r与极径 r 的关系。

答：$v_r=\omega\sqrt{r^2-r_0^2}$



解：取小球为研究对象，动系固连细管，动系以匀角速度ω绕点O转动，v_r、a_e、a_k如图所示。

$$m\vec{a}_r=m\vec{g}+\vec{N}_1+\vec{N}_2+\vec{Q}_e+\vec{Q}_k \qquad (1)$$

其中Mg与N_2沿铅直方向自行平衡。

式（1）沿切线方向投影得

$$m\frac{dv_r}{dt}=Q_e\cos\alpha=mr\omega^2\cos\alpha \qquad (2)$$

由图中可知$\vec{v}_r=\vec{v}_\varphi+\frac{dr}{dt}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$,且

$$\frac{dr}{dt}=v_r\cos\alpha \quad , \quad \cos\alpha=\frac{(\frac{dr}{dt})}{v_r},$$

代入式（2）得 $$v_r\frac{dv_r}{dt}=\omega^2 r\frac{dr}{dt}$$

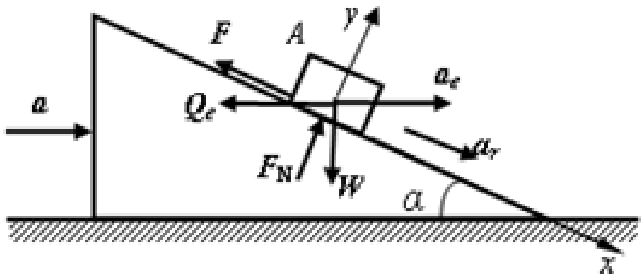
积分 得 $$\int_o^{v_r}v_r dv_r=\omega^2\int_{r_o}^{r}dr$$

$$v_r=\omega\sqrt{r^2-r_o^2}$$

5. 一重量为 P 的重物 A，沿与水平面成 α 角的棱柱的斜面下滑。棱柱沿水平面以加速度 a 向右运动。试求重物相对于棱柱的加速度和重物对棱柱斜面的压力，假定重物对棱柱斜面的滑动摩擦系数为 f_0。

答：$a_r = g(\sin\theta - f\cos\theta) - a(\cos\theta + f\sin\theta)$

$$F_N = W(\cos\alpha + \frac{\alpha}{g}\sin\alpha)$$



解：取 A 为研究对象，动系固连棱柱。

$$m\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{W} + \boldsymbol{F}_N + \boldsymbol{F} + \boldsymbol{Q}_e$$

沿 x 轴投影 $\quad \frac{W}{g}a_r = W\sin\theta - Q_e\cos\theta - F \quad (1)$

沿 y 轴投影 $\quad 0 = F_N - W\cos\theta - Q_e\sin\theta \quad (2)$

$F=F_N f \quad (3)$

由（2）得 $\quad F_N = W\cos\theta + Q_e\sin\theta = W\left(\cos\theta + \frac{a}{g}\sin\theta\right)$

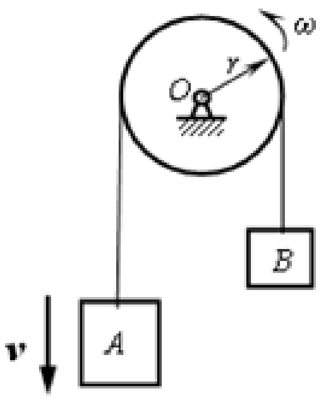
由（1）得 $\quad a_r = g(\sin\theta - f\cos\theta) - a(\cos\theta + f\sin\theta)$

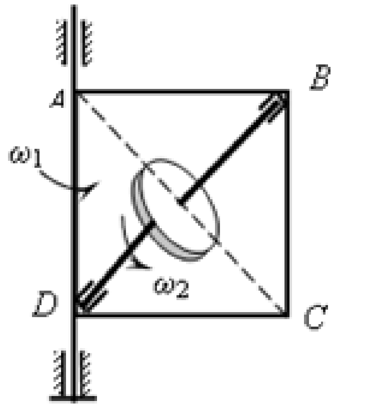
动量定理

2. 试求下列各物体系的动量：

⑴ 物体 A 和 B 各重 G_A和 G_B，$G_A > G_B$；滑轮重 G，并可看作半径为 r 的匀质圆盘。不计绳索的质量，试求物体 A 的速度是 v 时整个系统的动量。

⑵ 正方形框架 ABCD 的质量是 m_1，边长为 l，以角速度 ω_1绕定轴转动；而匀质圆盘的质量是 m_2，半径是 r，以角速度 ω_2 绕重合于框架的对角线 BD 的中心轴转动。试求这物体系的动量。





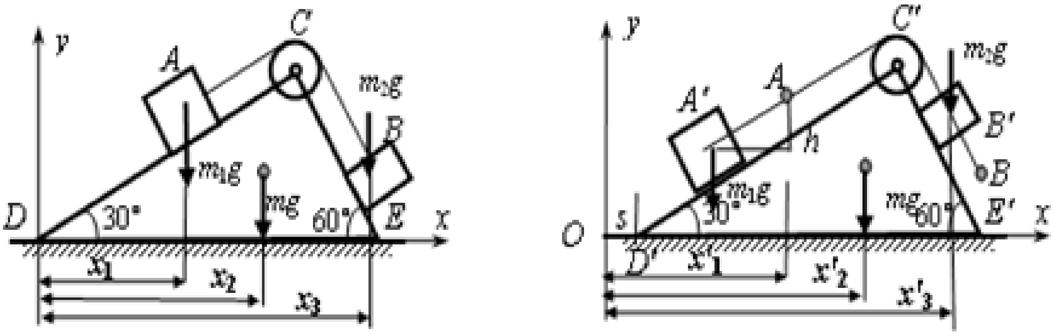
解：（1）　$\vec{K} = \vec{K}_A + \vec{K}_B$　，$K = \dfrac{G_A}{g}v - \dfrac{G_B}{g}v = \dfrac{v}{g}(G_A - G_B)$　方向向下。

（2）　$K = m_1 \cdot \dfrac{l}{2}\omega_1 + m_2 \cdot \dfrac{l}{2}\omega_1 = \dfrac{1}{2}(m_1 + m_2)l\omega_1$

方向为垂直框架平面，顺着 ω_1 前进方向。

3.物体 A 和 B 的质量分别是 m_1 和 m_2，借一绕过滑轮 C 的不可伸长的绳索相连，这两个物体可沿直角三棱柱的光滑斜面滑动，而三棱柱的底面 DE 则放在光滑水平面上。试求当物体 A 落下高度 h=10cm 时，三棱柱沿水平面的位移。设三棱柱的质量 $m = 4m_1 = 16m_2$，绳索和滑轮的质量都不计。初瞬时系统处于静止。

答： 向右移动 3.77m



解：取整个系统为研究对象。系统的外力只有铅直方向的重力 m_1g、m_2g、mg 和法向反力 N。又因系统在初瞬时处于静止，故整个系统的质心在水平方向 x 的位置守恒，即 $x_C=x'_C$。

三棱柱移动前系统质心的横坐标

$$x_C = \frac{\sum mx}{\sum m} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + mx}{m_1 + m_2 + m},$$

设三棱柱沿水平面的位移是 s，则移动后系统质心的横坐标

$$x'_C = \frac{\sum mx'}{\sum m}$$

$$x'_C = \frac{m_1\left(x_1 - h\cot 30^\circ + s\right) + m_2\left(x_2 - \dfrac{h}{\sin 30^\circ}\sin 30^\circ + s\right) + m\left(x + s\right)}{m_1 + m_2 + m}。$$

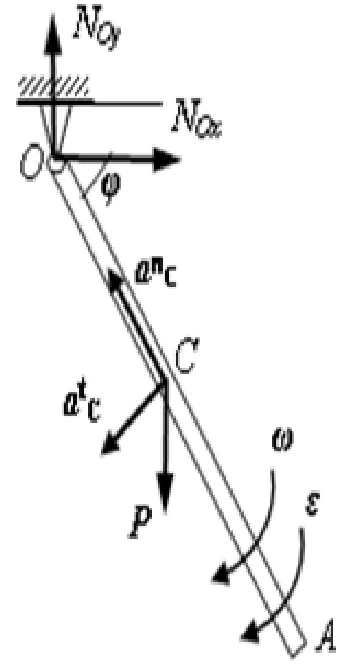
由 $x_C=x'_C$ 得三棱柱沿水平面向右的位移

$$s = \frac{\sqrt{3}m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m} = \frac{\sqrt{3}\times 4 + 1}{4 = 1 + 16}\times 10 = 3.77cm。$$

7.匀质杆 OA 长 $2l$，重 **P**，绕通过 O 端的水平轴在竖直水平面内转动。设杆 OA 转动到与水平成 φ 角时，其角速度与角加速度分别为 ω 及 ε，试求该瞬时杆 O 端的反力。

答：$N_{ox}=-\dfrac{Pl}{g}(\omega^2\cos\varphi+\varepsilon\sin\varphi)$，$N_{oy}=P+\dfrac{Pl}{g}(\omega^2\sin\varphi-\varepsilon\cos\varphi)$

解：应用质心运动定理，$M_i a_{Ci}=\sum F$。



$$-ma_C^n\cos\varphi-ma_e^\tau\sin\varphi=N_{ox}$$

$$ma_C^n\sin\varphi-ma_e^\tau\cos\varphi=N_{oy}-P$$

解得

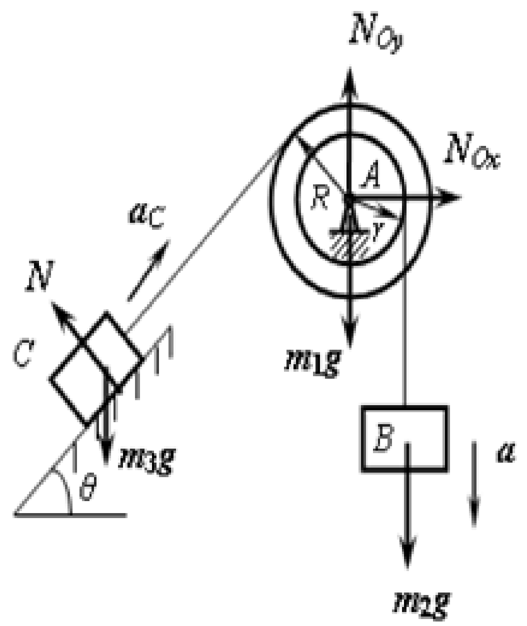
$$N_{ox}=-\frac{Pl}{g}(\omega^2\cos\varphi+\varepsilon\sin\varphi)$$

$$N_{oy}=P+\frac{Pl}{g}(\omega^2\sin\varphi-\varepsilon\cos\varphi)$$

4.图示机构中，鼓轮 A 质量为m_1，转轴 O 为其质心。重物 B 的质量为m_2，重物 C 的质量为m_3。斜面光滑，倾角为θ。已知 B 物的加速度为 **a**，求轴承 O 处的约束反力。

答： $N_{ox} = m_3 \dfrac{R}{r} a \cos\theta + m_3 g \cos\theta \sin\theta$

$$N_{oy} = (m_1 + m_2 + m_3) g - m_3 g \cos^2\theta + m_3 \frac{R}{r} a \sin\theta - m_2 a$$



解；取系统为研究对象。

$\dfrac{a_C}{a} = \dfrac{r}{R}$ ， 所以 $a_C = \dfrac{R}{r} a$

由质心运动定理

$$\sum M_i a_{Ci} = R$$

$m_3 a_C \cos\theta = N_{ox} - N\sin\theta$ ， 其中$N = m_3 g \cos\theta$

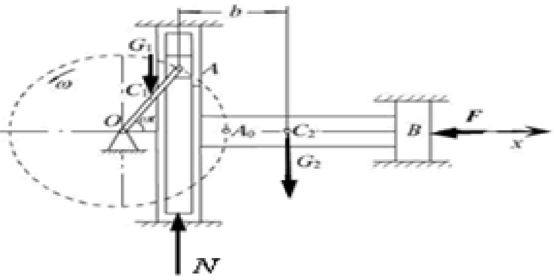
$$m_3 a_C \sin\theta - m_2 a = N_{oy} - (m_1 + m_2 + m_3) g + N\cos\theta$$

解得 $N_{ox} = m_3 \dfrac{R}{r} a \cos\theta = m_3 g \cos\theta \sin\theta$

$$N_{oy} = (m_1 + m_2 + m_3) - m_3 g \cos^2\theta - m_3 \frac{R}{r} a \sin\theta - m_2 a$$

6.匀质曲柄 OA 重 G_1，长 r，受力偶作用以角度 ω 转动，并带动总重 G_2 的滑槽、连杆和活塞 B 作水平往复运动。已知机构在铅直面内，在活塞上作用着水平常力 $\boldsymbol{F}$。试求作用在曲柄 O 上的最大水平分力。滑块质量和摩擦都不计。

答： $N_{max} = F + \dfrac{r\omega^2}{2g}(G_1 + 2G_2)$



解一：取整个系统为研究对象，受力如图 a 所示。将质心运动定理的方程投影到水平轴 x 上，可得

$$M\ddot{x}_c = N_x - F \qquad (1)$$

其中

$$x_c = \frac{\sum mx}{\sum m} = \frac{G_1(0.5r\cos\omega t) + G_2(b + r\cos\omega t)}{G_1 + G_2}$$

$$= \frac{1}{2(G_1+G_2)}\left[(G_1 + 2G_2)r\cos\omega r + 2G_2 b\right]$$

故 $$\ddot{x}_c = -\frac{1}{2(G_1+G_2)}(G_1+2G_2)r\omega^2\cos\omega t \qquad (2)$$

$$M\ddot{x}_c = \sum m\ddot{x} = -(G_1 a_1 + G_2 a_A)\frac{\cos\omega t}{g} = -\left(G\times\frac{r}{2}\omega^2 + G_2\times r\omega^2\right)\frac{\cos\omega t}{g}$$

$$= -\frac{1}{2g}(G_1 + 2G_2)r\omega^2\cos\omega t \qquad (3)$$

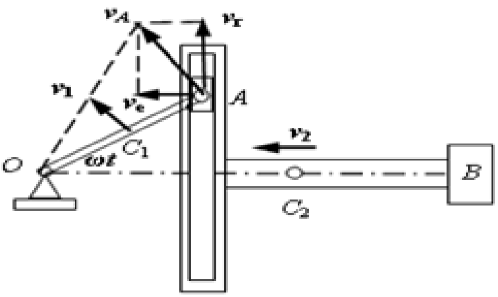
把式（2）或式（3）代入式（1），得

$$F_x = F - \frac{r\omega^2}{2g}(G_1 + 2G_2)\cos\omega t \qquad (4)$$

当 cosωt=—1 时，作用在曲柄轴 O 上的最大水平力

$$F_{max} = F + \frac{r\omega^2}{2g}(G_1 + 2G_2) \qquad (5)$$

解二：用动量定理求解。有



$$\frac{dK_x}{dt} = \sum F_x = F_x - F \qquad (6)$$

其中质点系的动量 K 在轴 x 上的投影

$$K_x = \sum mv_x = \frac{G_1}{g}(-v_1\sin\omega t) + \frac{G_2}{g}(-v_2),$$

因为 $v_1 = \dfrac{1}{2}r\omega$， $v_A = r\omega$， $v_2=v_e=v_A\sin\omega t$ 故

$$K_x = \frac{-r\omega}{2g}(G_1 + 2G_2)\sin\omega t。$$

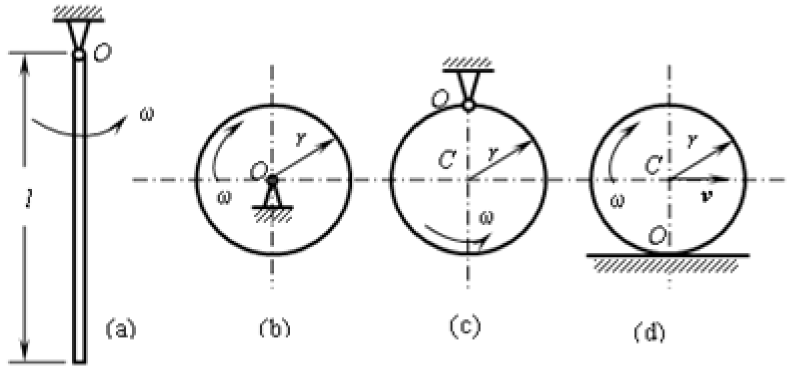
代入式（6），可得作用在曲柄轴 O 上的水平力

$$F_x = F - \frac{r\omega^2}{2g}(G_1 + 2G_2)\cos\omega t,$$

结果与式（4）相同。

动量矩定理

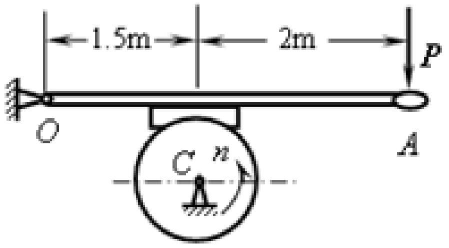
1.已知条件和动能定理题 1 相同，试分别计算各物体的动量。

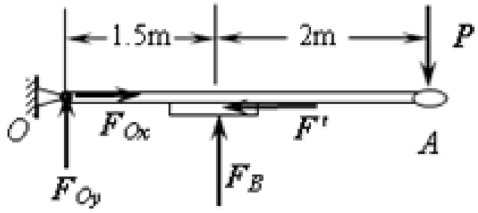


（a） $K=mv_C=ml\omega/2$，　　　（b） $K=mv_O=0$

（c） $K=mv_C=mr\omega$ ，　　　（d） $K=mv_C=mr\omega$

2. 轮子的质量 m=100kg，半径 r=1m，可以看成匀质圆盘。当轮子以转速 n=120rpm 绕定轴 C 转动时，在杆 A 点垂直地施加常力 P，经过 10 秒轮子停止。设轮与闸块间的动摩擦因数 $f'=0.1$，试求力 P 的大小。轴承摩擦和闸块的厚度都忽略不计。答： $P=270N$



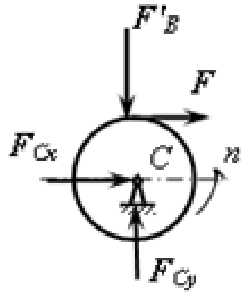


解：取 OA 为研究对象

$$\sum m_o=0 \qquad 1.5F_B-3.5P=0 \qquad (1)$$

再取轮子为研究对象， $I_c\varepsilon=-Fr$ (2)

即 $I_c\dfrac{d\omega}{dt}=-fF_B\cdot r$ ， $\int_{\omega}^{o}d\omega=-\dfrac{fF_Br}{I_c}\int_o^t dt$



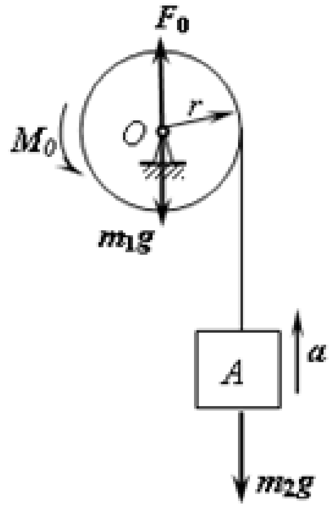
积分得 $-\omega_o=-\dfrac{fF_B\cdot r}{I_c}t$ ， $F_B=-\dfrac{I_c\omega_o}{frt}$ (3)

式（3）代入式（1），并考虑 $\omega_o=\dfrac{\pi n}{30}$ ， $I_c=\dfrac{1}{2}mr^2$ 得

$$P=\frac{1.5}{3.5}\cdot\frac{I_c\omega_o}{frt}=\frac{3}{7}\times\frac{mr^2}{2frt}\times\frac{\pi n}{30}=\frac{3\times100\times1^2\times\pi\times120}{7\times2\times0.1\times1\times10\times30}=269N$$

3. 鼓轮的质量$m_1 = 1800kg$，半径$r = 0.25m$，对转轴 O 的转动惯量$I_O = 85.3kg.m^2$。现在鼓轮上作用驱动转矩$M_O = 7.43kNm$，来提升质量$m_2 = 2700kg$的物体 A。试求物体 A 上升的加速度，绳索的拉力以及轴承 O 的反力。绳索的质量和轴承的摩擦都忽略不计。

答： a=0.80m/s^2，T=28.6kN，$F_O = 46.3kN$



解：(1)、求物体 A 上升的加速度。

取系统为研究对象，受力如图，应用质点系动量矩定理

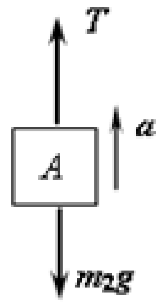
$$\frac{d}{dt}\left[\sum m_o(m\vec{v})\right] = \sum m_o(\vec{F})$$

$$\sum m_o(m\vec{v}) = I_o\omega + m_2vr \quad , \quad \sum m_o(\vec{F}) = M_o - m_2gr$$

$$\frac{d}{dt}(I_o\omega + m_2vr) = M_o - m_2gr$$

由于 $v = r\omega$ ， $\frac{dv}{dt} = a$

则 $a = \frac{dv}{dt} = \frac{M_o - m_2gr}{\frac{I_o}{r} + m_2r} = \frac{7.43\times10^3 - 2700\times9.8\times0.25}{\frac{85.3}{0.25} + 2700\times0.25} = 0.8$



(2)、求绳索的拉力。

取 A 为研究对象 $m_2a = T - m_2g$

$$T = m_2(a+g) = 2700\times(9.8+0.8) = 28.6kN$$

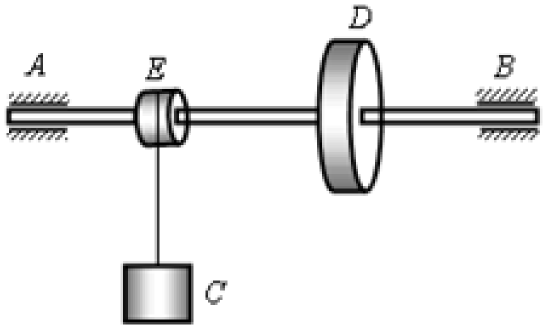
(3)、求轴承 O 的反力。

由质心运动定理 $F_o - m_1g - m_2g = m_1a_1 + m_2a_2 = m_2a$

$$F_o = m_1g + m_2g + m_2a = m_1g + m_2(a+g) = 46.2kN$$

4.物体 D 被装在转动惯量测定器的水平轴 AB 上，该轴上还固连着半径是 r 的鼓轮 E；缠在鼓轮上细绳的下端挂着质量为 M 的物体 C。已知物体 C 被无初速地释放后，经过时间τ秒落下的距离是 h；试求被测物体对转轴的转动惯量。已知轴 AB 连同鼓轮对自身轴线的转动惯量是I_0。物体 D 的质心在轴线 AB 上，摩擦和空气阻力都忽略不计。

答：$I=\dfrac{Mgr^2\tau}{2h}-I_0-Mr^2$



解：对整个系统应用动量矩定理，设被测物体对转轴 z 的转动惯量为 I，

$$\frac{dH_z}{dE}=\sum M_z\left(\vec{F}\right)$$

$$H_z=\left(I_o+I\right)\omega+Mr^2\omega\,,\qquad \sum M_z\left(\vec{F}\right)=Mgr$$

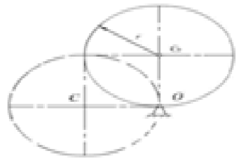
$$\left(I_o+I+Mr^2\right)\varepsilon=Mgr\,,\qquad \varepsilon=\frac{Mgr}{I_o+I+Mr^2}\qquad (1)$$

因为ε是常量，且 $\omega_o=0$，$\varphi_o=0$，所以$\varphi=\dfrac{1}{2}\varepsilon t^2$，且有 $h=r\varphi$ ，代入（1）式得

$$I=\frac{Mgr^2\tau^2}{2h}-I_o-Mr^2$$

5.匀质圆盘质量是 m，半径是 r，可绕通过边缘 O 点且垂直于盘面的水平轴转动。设圆盘从最高位置无初速地开始绕轴 O 转动，试求当圆盘中心 C 和轴 O 的连线经过水平位置的瞬时，轴承 O 的总反力的大小。

答：$N_O = \frac{\sqrt{17}}{3}mg$

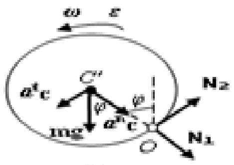


解一： 设园盘的中心 C′ 与轴 O 的连线与铅垂线成任意角度 φ，园盘所受的外力和质心的加速度如图（b）。

由质心运动定理，有

$$ma_C^n = mr\dot{\varphi}^2 = N_1 + mg\cos\varphi \qquad (1)$$

$$ma_C^t = mr\ddot{\varphi} = -N_2 + mg\sin\varphi \qquad (2)$$



(b)

由积分形式的动能定理，有

$$\frac{1}{2}I_o\dot{\varphi}^2 - 0 = mgr(1-\cos\varphi)$$

即
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2 + mr^2\right) = mgr(1-\cos\varphi)$$

故
$$r\dot{\varphi}^2 = \frac{4}{3}g(1-\cos\varphi) \qquad (3)$$

把上时两端对时间 t 求导，得

$$2r\dot{\varphi}\frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{4}{3}g\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt},$$

故
$$\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{2g}{3r}\sin\varphi。 \qquad (4)$$

也可由微分形式的动能定理求出 $\ddot{\varphi}$，通过积分得 $\dot{\varphi}$。

当 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 时，把式（3）和（4）分别代入式（1）和（2），得

$$N_1 = \frac{4}{3}mg,$$

$$N_2 = mg - \frac{2}{3}mg = \frac{1}{3}mg。$$

总反力 N 的大小为

$$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} = \frac{\sqrt{17}}{3}mg。$$

解二： 可由刚体定轴转动微分方程 $I_o\ddot{\varphi} = \sum m_o(F)$ 求 $\ddot{\varphi}$ 和 $\dot{\varphi}$

$$\left(\frac{1}{2}mr^2 + mr^2\right)\ddot{\varphi} = mgr\sin\varphi$$

故
$$\ddot{\varphi} = \frac{2g}{3r}\sin\varphi, \qquad (5)$$

因为 $\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{d\varphi} = \frac{\dot{\varphi}d\dot{\varphi}}{d\varphi}$，积分有

$$\int_0^{\dot{\varphi}}\dot{\varphi}d\dot{\varphi} = \frac{2g}{3r}\int_0^{\varphi}\sin\varphi d\varphi$$

得

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{4g}{3r}(1-\cos\varphi)。 \qquad (6)$$

把式（5）和（6）分别代入式（1）和（2），可求出反力 N_1 和 N_2。

解三： 可分别应用动能定理由式（3）求出角速度 $\dot{\varphi}$，应用刚体定轴转动微分方程由式（5）求出角加速度 $\ddot{\varphi}$，再根据质心运动定理由式（1）和（2）求反力 N_1 和 N_2。

解四： 根据达朗伯原理，在质心 C′ 上加惯性力 $Q^t_c = -ma^t_c$，$Q^n_c = -ma^n_c$ 以及矩为 $-I_C\ddot{\varphi}$ 的惯性力偶(图 c)，有

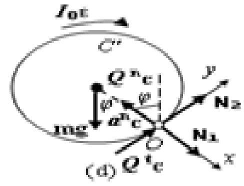
$$\sum F_x = 0, \qquad N_1 = mr\dot{\varphi}^2 - mg\cos\varphi$$

$$\sum F_y = 0, \qquad N_2 = mr\ddot{\varphi} - mg\sin\varphi,$$

$$\sum m_O(F) = 0, \qquad I_C\ddot{\varphi} + mr\ddot{\varphi}r - mgr\sin\varphi = 0,$$

即

$$r\ddot{\varphi} = \frac{2g}{3r}\sin\varphi。$$

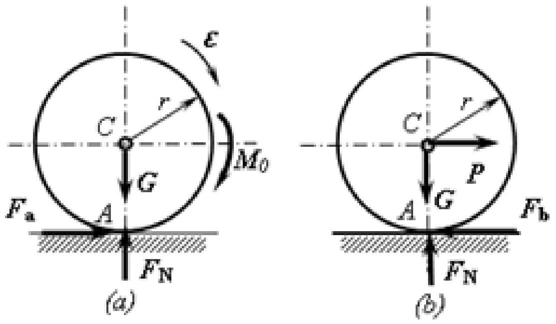


(d)

显然，以上三式分别与式（1）、（2）、（4）相同。

也可以在点 O 上加惯性力 $Q^t_c = -ma^t_c$ 和 $Q^n_c = -ma^n_c$，以及矩为 $-I_O\ddot{\varphi}$ 的惯性力偶(图 d)，仍可得到相同的结果。

5.匀质轮子半径是 r，重量是 G，在水平面上滚动而不滑动，不计滚阻。试问在下列两种情况下，轮心 C 的加速度是否相等？接触点 A 的滑动摩擦力是否相等？（a）轮上作用一个顺钟向的常值力偶，其力偶矩是 M_0；（b）轮心 C 上作用一个水平向右的常力，其大小 $P=\dfrac{M_0}{r}$。答: 在这两种情况下轮心 C 的加速度相等，$a_C=\dfrac{2M_0}{3r}$，滑动摩擦力分别是 $F_a=\dfrac{2M_0}{3r}$，$F_b=\dfrac{M_0}{3r}$



解：匀质轮子作平面运动，应用刚体平面运动微分方程。

(a) $J_c\varepsilon_o=M_o-F_ar$ （1）

$\dfrac{G}{g}a_{cx}=F_a$ （2）

其中 $J_c=\dfrac{1}{2}\dfrac{G}{g}r^2$，$a_{cx}=r\varepsilon$

式（2）代入（1）得 $\dfrac{1}{2}\dfrac{G}{g}r^2=M_o-\dfrac{G}{g}a_{cx}\cdot r$

$$a_c=a_{cx}=\frac{2M_o}{3Gr}g$$

$$F_a=\frac{G}{g}a_{cx}=\frac{G}{g}a_c=\frac{G}{g}\cdot\frac{2M_o}{3Gr}g=\frac{2M_o}{3r}$$

(b) $J_c\varepsilon=F_br$ （1）

$\dfrac{G}{g}a_{cx}=P-F_b$ （2）

由式(1) 得 $F_b=\dfrac{G}{2g}r^2\cdot\dfrac{a_c}{r}\cdot\dfrac{1}{r}=\dfrac{G}{2g}a_c$，代入式（2）得

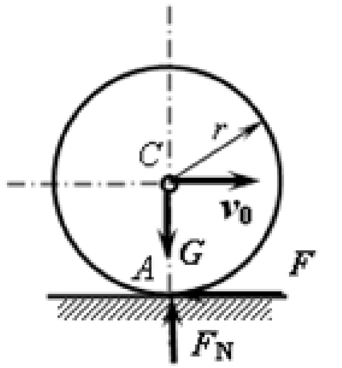
$$\frac{G}{g}a_{cx}=P-\frac{G}{2g}a_c=\frac{M_o}{r}-\frac{G}{2g}a_c$$

将 $a_c=a_{cx}$代入解得 $\dfrac{3G}{2g}a_{cx}=\dfrac{M}{r}$，$a_c=a_{cx}=\dfrac{2M_o}{3Gr}g$

$$F_b=\frac{G}{2g}a_c=\frac{G}{2g}\cdot\frac{2M_o}{3Gr}g=\frac{M_o}{3r}$$

6. 匀质圆盘半径是 r，在铅直面内沿水平直线轨道运动。假设初瞬时圆盘具有水平向右的平动速度 $\mathbf{v}_0$。已知圆盘与轨道间的静滑动摩擦因数是 f。试求圆盘开始沿轨道作无滑动的滚动所需的时间 t_1，以及此后盘心 C 的速度。 答: $t_1=\dfrac{v_0}{3fg}$，$v_{c1}=\dfrac{2}{3}v_0$9 向右）

解：圆盘得受力情况和坐标如图。 应用平面运动微分方程得



$$\frac{G}{g}\ddot{x}_c=-F \qquad (1)$$

其中 $F=fF_N=fG$ ， $\ddot{x}_c=-fg$

因为 $\dot{x}_{co}=v_o$ ， 式（1）积分后得 $\dot{x}_c=v_o-fgt$ （2）

又 $J_c\varepsilon=Fr$ ， $\dfrac{1}{2}\dfrac{G}{g}r^2\ddot{\varphi}=fGr$ ， $\ddot{\varphi}=\dfrac{2fg}{r}$ （3）

式（3）积分后得 $\dot{\varphi}=\dfrac{2fg}{r}t$ ，(其中 $\dot{\varphi}_o=0$) （4）

圆盘只滚不滑的条件 为 $\dot{x}_c=r\dot{\varphi}$，把（2)、（4）式代入得

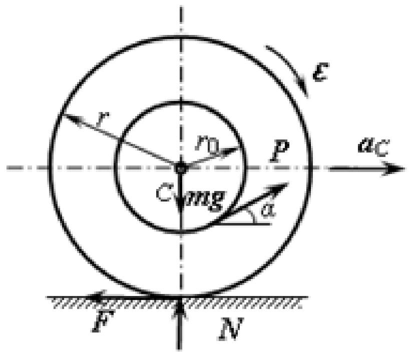
$$v_o-fgt_1=2fgt_1 \quad ,$$

圆盘开始沿轨道作无滑动的滚动所需的时间 t_1 为 $t_1=\dfrac{v_o}{35g}$

代入（2）式得此后盘心 C 速度 $v_{c1}=\dot{v}_{c1}=v_o-fg\cdot\dfrac{v_o}{35g}=\dfrac{2}{3}v_o$（向右）

7.匀质滚子质量是 M，半径是 r，对中心轴的回转半径是 ρ。滚子轴颈的半径是 r_0，轴颈上绕着绳子，绳端作用着与水平面成角 α 的常力 P，设滚子沿水平面作无滑动的滚动；试求滚子质心的加速度，以及保证滚动而不滑动的条件。

答：$a_c = \dfrac{\Pr(r\cos\alpha - r_0)}{M(\rho^2 + r^2)}$，滚动而不滑动的条件：$f \ge \dfrac{P(\rho^2\cos\alpha + rr_0)}{(Mg - P\sin\alpha)(\rho^2 + r^2)}$



解：根据刚体平面运动微分方程，得

$$M_{ac} = P\cos\alpha - F, \quad (1)$$

$$0 = N - Mg + P\sin\alpha, \quad (2)$$

$$(M\rho^2)\varepsilon = Fr - Pr_0。 \quad (3)$$

又 $$a_c = r\varepsilon \quad (4)$$

把式（1）和式（4）代入代入式（3），可得加速度

$$a_c = \frac{\Pr(r\cos\alpha - r_0)}{M(P^2 + r^2)} \quad (5)$$

滚而不滑的條件是，

$$F \le fN。 \quad (6)$$

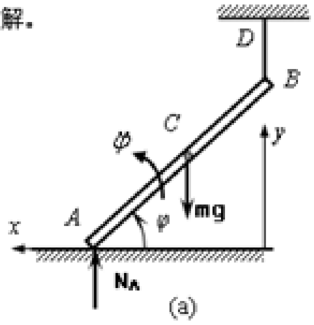
由式（1）得

$$F = P\cos\alpha - \frac{\Pr(r\cos\alpha - r_0)}{P^2 + r^2} = \frac{P^2\cos\alpha + rr_0}{P^2 + r^2}P。 \quad (7)$$

把式（2）和（7）代入式（6）,得滚而不滑的條件是

$$f \ge \frac{F}{N} = \frac{P(P^2\cos\alpha + rr_0)}{(Mg - p\sin\alpha)(P^2 + r^2)}。$$

8.匀质杆 AB 长 l，质量是 M。杆的一端系在绳索 BD 上，另一端搁在光滑水平面上。当绳沿铅直而杆静止时杆对水平面的倾角 $\varphi = 45°$。现在绳索突然断掉，求在刚断后的瞬时杆端 A 的约束反力。答：$N_A = \frac{2}{5}Mg$



解一：杆 AB 作平面运动，可用刚体平面运动微分方程求解。

取坐标轴 Oxy 如图，有

$$M\ddot{y}_c = N_A - Mg\ , \qquad (1)$$

$$\left(\frac{1}{2}Ml^2\right)\ddot{\varphi} = -N_A\frac{l}{2}\cos\varphi \qquad (2)$$

又 $$y_c = \frac{l}{2}\sin\varphi, \qquad (3)$$

$$\dot{y}_c = \frac{l}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi, \qquad \ddot{y}_c = \frac{l}{2}(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi)$$

当 t=0 时，$\dot{\varphi} = 0$，故 $\ddot{y}_c = \frac{1}{2}\ddot{\varphi}\cos\varphi$,，考虑到式（2）的 $\ddot{\varphi}$ 有

$$\ddot{y}_C = \frac{l}{2}\left(-\frac{6N_A\cos\varphi}{Ml}\right)\cos\varphi = -\frac{3N_A\cos^2\varphi}{M},$$

代入式（1），得 A 端的约束反力

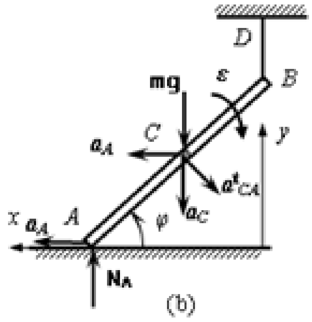
$$N_A = \frac{Mg}{1+3\cos^2\varphi} = \frac{Mg}{1+\frac{3}{2}} = \frac{2}{5}Mg$$

解二：设杆的角加速度 ε 为顺时针方向，坐标系 Oxy 如图，有

$$Ma_{cx} = 0, \qquad \dot{x}_c = 常数 = 0, \quad 故小\ x_c=常数 \qquad (4)$$

$$Ma_{cy} = N_A - Mg, \qquad (5)$$

$$\left(\frac{1}{12}Ml^2\right)\varepsilon = N_A\frac{l}{2}\cos\varphi, \quad 即\ \ \varepsilon = \frac{6N_A\cos\varphi}{Ml} \qquad (6)$$



由式（4）知，质心 C 的加速度 a_c 与轴平行，取 A 为基点，有

$$\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}^t_{CA} + \boldsymbol{a}^n_{CA},$$

因初角速度是零，故 $a^n_{cA} = AC \times \omega^2 = 0$，加速度关系如图 c，有

$$a_{cy} = -a_c = -a^t_{cA}\cos\varphi = -\frac{1}{2}\varepsilon\cos\varphi$$

$$= -\frac{1}{2}\cos\varphi\left(-\frac{6N\cos\varphi}{Ml}\right) = -\frac{3N\cos^2\varphi}{M},$$

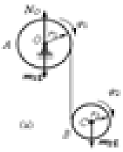
代入式（5），得

$$-M\cdot\frac{3N_A\cos^2\varphi}{M} = N_A - Mg,$$

故 A 端的约束反力

$$N_A = \frac{Mg}{1+3\cos^2\varphi} = \frac{2}{5}Mg$$

14 两个匀质轮子 A 和 B，质量分别是 m_1 和 m_2，半径分别是 r_1 和 r_2，用细绳连接如图所示。轮 A 绕固定轴 O 转动。试求轮 B 下落时轮心 C 的加速度 a_C 和细绳的拉力 S。



(a)

答：$a_c=\dfrac{2(m_1+m_2)}{3m_1+2m_2}g$，$S=\dfrac{m_1m_2}{3m_1+2m_2}g$

解一：应用刚体平面运动微分方程(图 b)。设轮心 C 相对于绳的加速度是 $a_2=r_2\varepsilon_2$，则对于轮 A，有

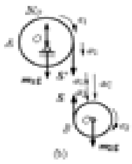
$$Sr_1=\left(\frac{1}{2}m_1r_1^2\right)\varepsilon_1 \qquad (1)$$

对于轮 B，有

$$Sr_2=\left(\frac{1}{2}m_2r_2^2\right)\varepsilon_2 \qquad (2)$$

$$m_2a_c=m_2g-S \qquad (3)$$

又 $$a_c=a_1+a_2=r_1\varepsilon_1+r_2\varepsilon_2 \qquad (4)$$



(b)

联立解方程（1）－（4），得

$$\varepsilon_1=\frac{2m_2g}{r_1(3m_1+2m_2)},\quad \varepsilon_2=\frac{2m_1g}{r_2(3m_1+2m_2)} \qquad (5)$$

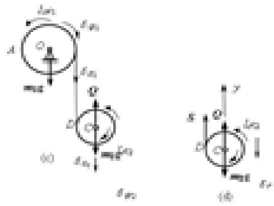
轮心 C 的加速度

$$a_c=\frac{2(m_1+m_2)}{3m_1+2m_2}g \qquad (6)$$

细绳的拉力

$$S=\frac{m_1m_2}{3m_1+2m_2}g \qquad (7)$$

解二：应用达朗伯原理(图 c)。取整个系统为研究对象，加惯性力 $Q=-m_2a_c=-m_2(a_1+a_2)$ 和惯性力矩分别是 $-J_1\varepsilon_1$ 和 $J_2\varepsilon_2$ 的惯性力偶，根据



(c) (d)

$\sum m_O(F)=0$：

$$\left(\frac{1}{2}m_1r_1^2\right)\varepsilon_1+\left(\frac{1}{2}m_2r_2^2\right)\varepsilon_2+\left[m_2(r_1\varepsilon_1+r_2\varepsilon_2)-m_2g\right](r_1+r_2)=0 \qquad (8)$$

取轮子 B 为研究对象(图 d)，有

$\sum m_D(F)=0$：

$$\left(\frac{1}{2}m_2r_2^2\right)\varepsilon_2+\left[m_2(r_1\varepsilon_1+r_2\varepsilon_2)-m_2g\right]r_2=0 \qquad (9)$$

$$\sum F_y=0:\qquad S=m_2g-m_2(r_1\varepsilon_1+r_2\varepsilon_2) \qquad (10)$$

联立解方程（8）－（10），得

$$\varepsilon_1=\frac{2m_2g}{r_1(3m_1+2m_2)},\qquad \varepsilon_2=\frac{2m_1g}{r_2(3m_1+2m_2)}$$

轮心 C 的加速度

$$a_c=r_1\varepsilon_1+r_2\varepsilon_2=\frac{2(m_1+m_2)}{3m_1+2m_2}g$$

细绳的拉力

$$S=\frac{m_1m_2}{3m_1+2m_2}g$$

解三：应用动力学普遍方程。给系统一组虚位移 $\delta s_1=\delta\varphi_1r_1$，$\delta s_2=\delta\varphi_2r_2$，和 $\delta s_c=\delta s_1+\delta s_2$(图 c)，根据 $\sum(F+Q)\cdot\delta r=0$，有

$$-\left(\frac{1}{2}m_1r_1^2\varepsilon_1\right)\frac{\delta s_1}{r_1}-\left(\frac{1}{2}m_2r_2^2\varepsilon_2\right)\frac{\delta s_2}{r_2}+\left[m_2g-m_2(r_1\varepsilon_1+r_2\varepsilon_2)\right](\delta s_1+\delta s_2)=0,$$

即

$$\left(m_2g-\frac{1}{2}m_1r_1\varepsilon_1-m_2r_1\varepsilon_1-m_2r_2\varepsilon_2\right)\delta s_1+\left(m_2g-\frac{1}{2}m_2r_2\varepsilon_2-m_2r_1\varepsilon_1-m_2r_2\varepsilon_2\right)\delta s_2=0,$$

因为 $\delta s_1\neq 0$，$\delta s_2\neq 0$，所以

$$m_2g-\frac{1}{2}m_1r_1\varepsilon_1-m_2r_1\varepsilon_1-m_2r_2\varepsilon_2=0 \qquad (11)$$

$$m_2g-\frac{1}{2}m_2r_2\varepsilon_2-m_2r_1\varepsilon_1-m_2r_2\varepsilon_2=0 \qquad (12)$$

联立解方程（11）－（12），可得如式（5）所示的 ε_1 和 ε_2 值，根据式（4）可得轮心 C 的加速度 a_c。

为求拉力 S，可取轮子 B(图 d)为研究对象，给轮 B 一个平动虚位移 δr，有

$$\left[m_2g-S-m_2(r_1\varepsilon_1+r_2\varepsilon_2)\right]\delta r=0,$$

因为 $\delta r\neq 0$，可求得 $$S=m_2g-m_2(r_1\varepsilon_1+r_2\varepsilon_2)=\frac{m_1m_2}{3m_1+2m_2}g$$

解四：应用拉格朗日方程(图 a)。系统具有两个自由度，取轮 A 和 B 的转角 φ_1 和 φ_2 为广义坐标，因为系统上的主动力都是有势力，可用拉氏方程求。

系统的动能

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_1r_1^2\right)\dot\varphi_1^2+\frac{1}{2}m_2(r_1\dot\varphi_1+r_2\dot\varphi_2)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_2r_2^2\right)\dot\varphi_2^2$$

系统的势能

$$V=-m_2g(r_1\varphi_1+r_2\varphi_2)$$

拉氏函数

$$L=T-V=\frac{1}{4}(m_1r_1^2\dot\varphi_1^2)+m_2r_2^2\dot\varphi_2^2+\frac{1}{2}m_2(r_1\dot\varphi_1+r_2\dot\varphi_2)^2+m_2g(r_1\varphi_1+r_2\varphi_2)$$

求偏导数

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi_1}=\frac{1}{2}m_1r_1^2\dot\varphi_1+m_2(r_1\dot\varphi_1+r_2\dot\varphi_2)r_1,\qquad \frac{\partial L}{\partial\varphi_1}=m_2gr_1,$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi_2}=\frac{1}{2}m_2r_2^2\dot\varphi_2+m_2(r_1\dot\varphi_1+r_2\dot\varphi_2)r_2,\qquad \frac{\partial L}{\partial\varphi_2}=m_2gr_2,$$

把上述表达式代入拉氏方程

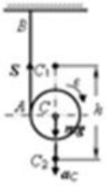
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial\varphi_1}=0,\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial\varphi_2}=0.$$

整理后可得式（11）和（12），从而求得 ε_1、ε_2 和 a_c 值。

为了求绳的拉力 S，可单独取轮 A 为研究对象通过上述方法求得。

10.匀质圆柱体的质量是 m，在其中部绕有细绳，绳的上端 B 固定不动。现在把圆柱体由静止释放，试求下落高度 h 时，质心的速度、加速度以及绳索的拉力 S。

答： $v_c=\frac{2}{3}\sqrt{3gh}$ ，$a_c=\frac{2}{3}g$ ，$S=\frac{1}{3}mg$



(a)

解一：刚体平面运动微分方程

$$ma_c=mg-S \qquad (1)$$

$$\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\varepsilon=rS, \qquad (2)$$

又 $$a_c=r\varepsilon \qquad (3)$$

把式（2）、（3）代入式（1）得

$$ma_c=mg-\frac{1}{2}ma_c,$$

故加速度 $$a_c=\frac{2}{3}g=\text{常量}$$

速度 $$v_c=\sqrt{2a_ch}=\frac{2}{3}\sqrt{3gh}$$

把 a_C 代入式（1）得拉力

$$S=m\left(g-\frac{2}{3}g\right)=\frac{1}{3}mg$$

解二：用动能定理 $T_2-T_1=\sum W$ 求 v_c 和 a_c，其中 $T_1=0$，而

$$T_2=\frac{1}{2}mv_c^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\omega^2=\frac{3}{4}mv_c^2,$$

$$\sum W=mgh$$

代入得

$$\frac{3}{4}mv_c^2-0=mgh \qquad (4)$$

故

$$v_c=\frac{2}{3}\sqrt{3gh}$$

把式（4）对时间求导，得

$$\frac{2}{3}mv_c\frac{dv_c}{dt}=mg\frac{dh}{dt}=mgv_c,$$

故

$$a_c=\frac{dv_c}{dt}=\frac{2}{3}g$$

解三：用对速度瞬心轴 A 的动量矩定理 $\frac{dH_A}{dt}=\sum m_A(F)$ 也可求 a_c 和 v_c，其中

$$H_A=I_A\omega=\left(\frac{1}{2}mr^2+mr^2\right)\frac{v_c}{r}=\frac{3}{2}mrv_c,$$

$$\sum m_A(F)=mgr$$

代入得 $$\frac{3}{2}mr\frac{dv_c}{dt}=mgr$$

故 $$a_c=\frac{dv_c}{dt}=\frac{2}{3}g,$$

而 $$v_c=\sqrt{2a_ch}=\frac{2}{3}\sqrt{3gh}$$

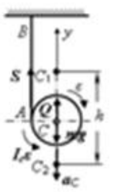
解四：应用达朗伯原理(图 b)，加惯性力 $Q=-ma_c$ 和矩为 $-I_c\varepsilon$ 的惯性力偶后，有

$$\sum m_A(F)=0: \qquad (ma_c-mg)r+\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\frac{a_c}{r}=0$$

故 $$a_c=\frac{2}{3}g,$$

$$\sum F_y=0: \qquad S+ma_c-mg=0$$

故 $$S=m(g-a_c)=\frac{1}{3}mg$$



(b)

解五：应用动力学普遍方程(图 c)，给一组虚位移 δx 和 $\delta\varphi$，根据 $\sum(F+Q)\cdot\delta r=0$，有

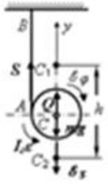
$$(mg-ma_c)\delta x-\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\frac{a_c}{r}\frac{\delta x}{r}=0$$

故 $$a_c=\frac{2}{3}g.$$

再解除绳对圆柱的约束，把约束力 S 看为主动力，仅给圆柱向下的平动虚位移 δx 有

$$(mg-ma_c-s)\delta x=0$$

故 $$S=m(g-a_c)=\frac{1}{3}mg$$



(c)

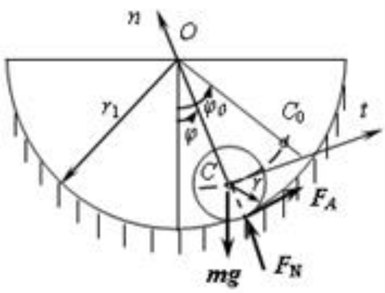
9.匀质圆柱的质量是 m，半径是 r。求当这圆柱沿半径是r_1的圆槽滚动而不滑动时圆槽对圆柱的法向反力和摩擦力，并求保证圆柱不滑所需的最小滑动摩擦因数 f 。假设开始时 OC_0线对铅直线所成偏角 $\varphi_0 = 60°$，且圆柱被无初速地释放。

答：$N_A = \frac{1}{3}Mg(7\cos\varphi - 4\cos\varphi_0)$ ，$F_A = \frac{1}{3}Mg\sin\varphi$， $f \ge 0.577$

解：圆柱作平面运动。其质心沿半径等于(r_1-r)的圆弧运动；受力如图所示。质心加速度投影到质心轨迹的法线和切线方向得

$$a_C^n = (r_1 - r)\dot{\varphi}^2,$$

$$a_C^t = (r_1 - r)\ddot{\varphi}$$



则圆柱的平面运动微分方程为

$$m(r_1 - r)\dot{\varphi}^2 = F_N - mg\cos\varphi$$

(1)

$$m(r_1 - r)\ddot{\varphi} = F_A - mg\sin\varphi$$

(2)

$$I_c\frac{d\omega}{dt} = -F_A r \qquad (3)$$

注意：(3) 式中 ω 和对质心力矩以顺时针为正，但φ、$\dot{\varphi}$、$\ddot{\varphi}$以逆时针为正。

圆柱滚而不滑，A 为速度瞬心，有 $v_c = (r_1 - r)\dot{\varphi} = r\omega$ (4)

式（4）代入（3）得 $\frac{1}{2}mr^2(\frac{r_1 - r}{r})\ddot{\varphi} = -F_A r$ ，即 $\frac{1}{2}m(r_1 - r)\ddot{\varphi} = -F_A$

把上式与（2）式相加，消去 F_A得

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2g}{3(r_1 - r)}\sin\varphi \qquad (5)$$

$$\int_0^{\dot{\varphi}} d(\dot{\varphi}^2) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} -\frac{2g}{3(r_1 - r)}\sin\varphi d\varphi$$

积分得 $\dot{\varphi}^2 = -\frac{4g(\cos\varphi - \cos\varphi_o)}{3(r_1 - r)}$ (6)

式（6）、(5) 分别代入（1）、(2) 得

$$F_N = \frac{1}{3}mg(7\cos\varphi - 4\cos\varphi_o), \qquad F_A = \frac{1}{3}mg\sin\varphi$$

为了保证滚而不滑 $F_A \le F_N f$ ，即 $f \ge \frac{F_A}{F_N} = \frac{\sin\varphi}{7\cos\varphi - 4\cos\varphi_o}$

显然，φ越大，则所要求的f也越大。为了保证运动全过程中圆柱不滑动，上式中φ 应取最大值 φ_o 。从而 $f \ge \frac{1}{3}tg\varphi_o$

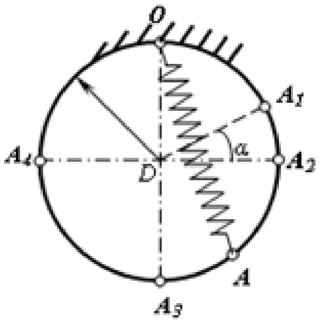
代入$\varphi_o = 60°$则得 $f \ge \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.577$

动能定理

1.弹簧的刚度系数是 c，其一端固连在铅直平面的圆环顶点 O，另一端与可沿圆环滑动的小套环 A 相连。设小套环重 G。弹簧的原长等于圆环的半径 r；试求下列各情形中重力和弹性力的功：

（1）套环由 A_1 到 A_3；（2）套环由 A_2 到 A_3；

（3）套环由 A_3 到 A_4；（4）套环由 A_2 到 A_4。



解：

(1) $W_P=\frac{3}{2}rG$，$W_c=-\frac{1}{2}cr^2$

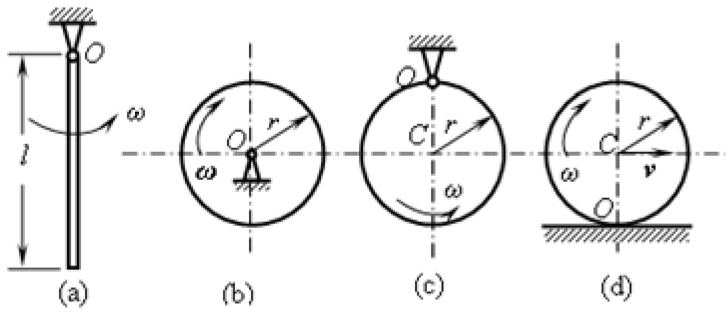
（2）$W_P=Gr$，

$$W_c=-\frac{1}{2}c\left[\left(\sqrt{2r}-r\right)^2-r^2\right]=cr^2\left(1-\sqrt{2}\right)=-0.4cr^2$$

（3）$W_P=Gr$，$W_c=cr^2\left(\sqrt{2}-1\right)=0.4cr^2$

（4）$W_P=0$，　$W_c=0$

2.图（a）、（b）、（c）中的各匀质物体分别绕定轴 O 转动，图（d）中的匀质圆盘在水平上滚动而不滑动。设各物体的质量都是 M，物体的角速度是 ω。杆子的长度是 l，圆盘的半径是 r；试分别计算物体的动能。



解：

（1）$T=\frac{1}{2}I_o\omega^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega^2=\frac{1}{6}ml^2\omega^2$

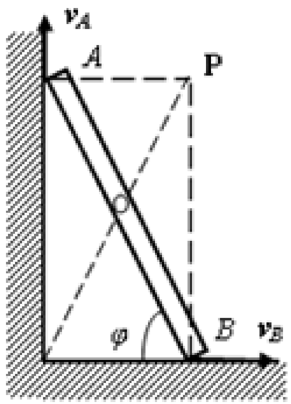
（2）$T=\frac{1}{2}I_o\omega^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\omega^2=\frac{1}{4}mr^2\omega^2$

（3）$T=\frac{1}{2}I_o\omega^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2+r^2m\right)\omega^2=\frac{3}{4}mr^2\omega^2$

(4) $T=\frac{1}{2}mv_c^2+\frac{1}{2}I_c\omega^2=\frac{1}{2}mv_c^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\omega^2=\frac{3}{4}mr^2\omega^2$

3. 质细杆 AB 的质量是 m，长度是 l，放在铅直平面内，杆的一端 A 靠墙壁，另一端沿地面运动。已知当杆对水平面的倾角 $\varphi = 60°$ 时 B 端的速度为 v_B，求杆在该瞬时动能。

答：$T = \frac{2}{9}mv_B^2$



解：匀质细杆作平面运动，P 为速度瞬心

$$\omega_{AB} = \frac{v_B}{PB} = \frac{2}{\sqrt{3}l}v_B$$

$$v_c = PC \cdot \omega_{AB} = \frac{1}{2}l \cdot \frac{2}{\sqrt{3}l}v_B = \frac{1}{\sqrt{3}}v_B$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega_{AB}^2 \\ &= \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{\sqrt{3}}v_B\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ml^2\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}l}v_B\right)^2 \\ &= \frac{1}{6}mv_B^2 + \frac{1}{18}mv_B^2 \\ &= \frac{2}{9}mv_B^2 \end{aligned}$$

也可以用下面方法计算：

$$T = \frac{1}{2}I_P\omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}ml^2\left(\frac{2}{\sqrt{3}l}v_B\right)^2 = \frac{2}{9}mv_B^2$$

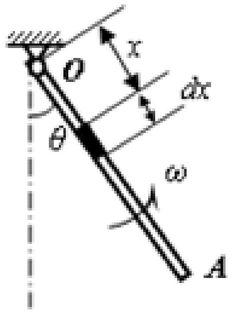
4.长为l、质量为 m 的匀质杆以球铰链 O 固定，并以匀角速度ω绕铅直线转动，如图所示。如杆与铅直线的夹角为θ，求杆的动能。

答： $T=\frac{1}{6}ml^2\omega^2\sin^2\theta$

解：先计算杆对轴 z 的转动惯量。

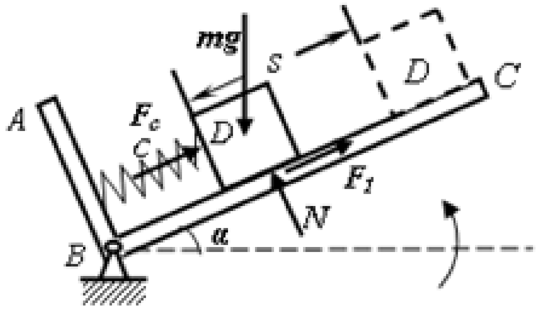
$$J_z=\int_0^l\frac{m}{l}(x\sin\theta)^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}ml^2\sin^2\theta$$

杆的动能 $T=\frac{1}{2}J_z\omega^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\sin^2\theta\right)\omega^2=\frac{1}{6}ml^2\omega^2\sin^2\theta$



5.托架 ABC 缓慢地绕水平轴 B 转动，当角$\alpha=15^\circ$时，托架停止转动，质量 m=6kg 的物块 D 开始沿斜面 CB 下滑，下滑距离 s=250mm 时压到刚度系数 c=1.6N/m 的弹簧上。已测得弹簧最大变形$\lambda=50mm$。试求物块与斜面间的静摩擦因数和动摩擦因数。

答; $f=0.268$ $f'=0.151$



解：1、求静摩擦系数。

当$\alpha=15^\circ$时，物块开始下滑，所以

$$f=tg\alpha=tg15^\circ=0.268$$

2、求动摩擦系数。

取物块 D 为研究对象，T_1=T_2=0。

$$W_g=mg(s+\lambda)\sin 15^\circ$$

$$W_{F1}=-F_1(s+\lambda)=-f'\cdot N(s+\lambda)=-f'mg\cos 15^\circ(s+\lambda)$$

$W_c=-\frac{1}{2}c\lambda^2$，力$N$不作功。

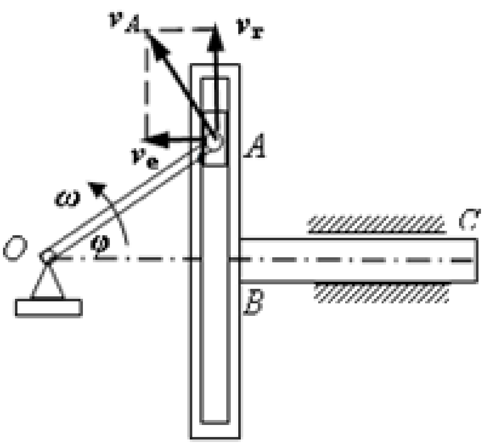
由 $T_2-T_1=\sum W$

得 $0-0=mg(s+\lambda)\sin 15^\circ-f'mg\cos 15^\circ(s+\lambda)-\frac{1}{2}c\lambda^2$

$$f'=\frac{1}{\cos 15^\circ}\left(\sin 15^\circ-\frac{c\lambda}{0.6mg}\right)=\frac{1}{0.960}\left(0.259-\frac{1600\times0{,}05^2}{0.6\times6\times9.8}\right)$$

=0.151

7.在曲柄滑杆机构中，曲柄 OA 受常值转矩 M_0 作用。初瞬时机构处于静止且角 $\varphi=\varphi_0$；试求曲柄转过一整转时的角度。假设曲柄长 r，对轴 O 的转动惯量是 I_O；滑块 A 的重量是 G_1；滑道杆的重量是 G_2；滑块与滑槽间的摩擦力可认为是常力并等于 F。



答: $\omega=2\sqrt{\dfrac{(\pi M_0-2Fr)g}{I_0 g+G_1r^2+G_2r^2\sin^2\varphi_0}}$

解：取整体为研究对象，只有转矩 M 和滑动摩擦力作功。 曲柄转动一周，角位移为 2π，滑块在滑道中行程为 $s=2r\times2=4r$

$$\sum W=M\cdot2\pi-F\cdot4r$$

初瞬时 $T_1=0$

末瞬时，曲柄角速度为 ω，滑块 A 速度 $v_A=r\omega$。

滑道速度 $v=v_e=v_A\sin\varphi_0=r\omega\sin\varphi_0$

$$T_2=\frac{1}{2}I_o\omega^2+\frac{1}{2}\frac{G_1}{g}r^2\omega^2+\frac{1}{2}\frac{G_2}{g}r^2\omega^2\sin^2\varphi$$

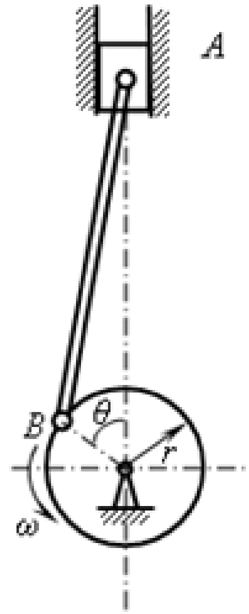
$$=\frac{\omega^2}{2g}\left(I_o g+G_1r^2+G_2r^2\sin^2\varphi\right)$$

由 $T_2-T_1=\sum W$

$$\frac{\omega^2}{2g}\left(I_o g+G_1r^2+G_2r^2\sin^2\varphi\right)=2\pi M-4rF$$

$$\omega=2\sqrt{\frac{g(\pi M-2Fr)}{I_o g+G_1r^2+G_2r^2\sin^2\varphi}}$$

8.已知轮子半径是 r，对转轴 O 的转动惯量是 I_O；连杆 AB 长 l，质量是 m_1，并可看成匀质细杆；滑块 A 质量是 m_2，可沿光滑直导轨滑动，滑块在最高位置（$\theta = 0°$）受到微小扰动后，从静止开始运动。求当滑块到达最低位置时轮子的角速度。各处的摩擦不计。



答：$\omega = 2\sqrt{\dfrac{3rg(m_1+m_2)}{m_1 r^2 + 3I_O}}$

解：取整体为研究对象，系统受理想约束，其反力不作功，只有 m_1g 与 m_2g 作功，当滑块在最低位置时，A 是杆的瞬心。

$$v_B = r\omega \quad , \quad v_A = 0, \quad v_c = \frac{v_B}{2} = \frac{1}{2} r\omega \quad ,$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_B}{l} = \frac{r\omega}{l}$$

$T_1 = 0$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_1 v_c^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m_1 l^2\right)\left(\frac{r\omega}{l}\right)^2 + \frac{1}{2} I_o \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 v_A^2$$

$$= \frac{\omega^2}{6}\left(m_1 r^2 + 3I_o\right)$$

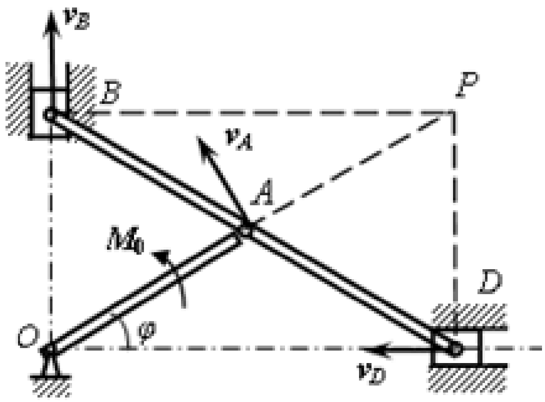
$$\sum W = (m_1 + m_2) g \times 2r$$

由 $$T_2 - T_1 = \sum W$$

得 $$\frac{\omega^2}{6}\left(m_1 r^2 + 3I_o\right) = 2rg(m_1 + m_2)$$

$$\omega = 2\sqrt{\frac{3rg(m_1+m_2)}{m_1 r^2 + 3I_o}}$$

9．椭圆规机构由曲柄 OA、规尺 BD 以及滑块 B、D 组成。已知曲柄长 l，质量是 m_1；规尺长 $2l$，质量是 $2m_1$，且两者都可以看成匀质细杆；两滑块的质量都是 m_2。整个机构被放在水平面上，并在曲柄上作用着常值转矩 M_0，试求曲柄的角加速度，各处的摩擦不计。



答： $\varepsilon = \dfrac{M_0}{(3m_1+4m_2)l^2}$

解：取整体为研究对象，只有转矩作功。应用微分形式动能定理。

$$dT = d'W \qquad (1)$$

系统动能 $T = T_{OA} + T_{BD} + T_B + T_D$

$$T_{OA} = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}m_1 l^2)\omega^2,$$

$$T_{BD} = \frac{1}{2}\cdot 2m_1(l\omega)^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}\times 2m_1(2l)^2\right]\omega^2$$

$$T_B = \frac{1}{2}m_2(2l\cos\varphi\cdot\omega)^2, \qquad T_D = \frac{1}{2}m_2(2l\sin\varphi\cdot\omega)^2$$

$$T = \frac{1}{2}l^2\omega^2(3m_1+4m_2)$$

元功 $d'W = M_O d\varphi$

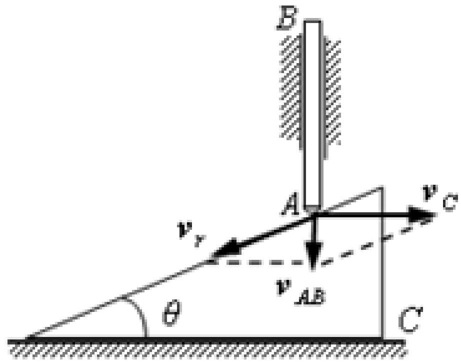
代入式（1）得 $\omega\dfrac{d\omega}{dt}l^2(3m_1+4m_2) = M_O\dfrac{d\varphi}{dt}$

因为 $\dfrac{d\omega}{dt} = \varepsilon$ ， $\dfrac{d\varphi}{dt} = \omega$

所以 $\varepsilon = \dfrac{M_o}{(3m_1+4m_2)l^2}$

10.图示机构中，直杆 AB 质量为 m，楔块 C 的质量为 m_1，倾角为θ。当 AB 杆铅垂下降时，推动楔块水平运动，不计各处摩擦，求楔块 C 与 AB 杆的加速度。

答: $a_C = \dfrac{mgtg\theta}{mtg^2\theta + m_1}$， $a_{AB} = \dfrac{mgtg^2\theta}{mtg^2\theta + m_1}$



解：取整体为研究对象。任一瞬时

$$T = \frac{1}{2}mv_{AB}^2 + \frac{1}{2}m_1 v_C{}^2$$

由 $\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r$， 得 $\boldsymbol{v}_{AB} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_r$

$$v_C = v_{AB}\text{ctg}\theta \qquad (1)$$

所以 $T = \dfrac{1}{2}mv_{AB}^2 + \dfrac{1}{2}m_1 v_{AB}^2\text{ctg}^2\theta = \dfrac{1}{2}(m + m_1\text{ctg}^2\theta)v_{AB}^2$

$$\sum d'W = mgds$$

由 $dT = \sum d'W$ 得,

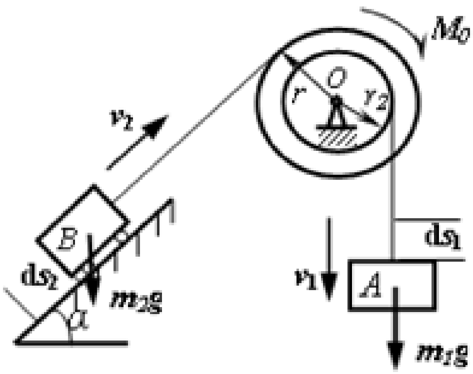
$(m + m_1 ctg^2\theta)\cdot v_{AB}\cdot dv_{AB} = mgds$，两边同除以 dt，得

$$a_{AB} = \frac{mg}{m + m_1 ctg^2\theta}$$

式（1）在任何时刻都成立，对式（1）求导得： $a_C = a_{AB} ctg^2\theta$

11.在矿井提升设备中，鼓轮由两个固连在一起的滑轮组成，总质量是 m，对转轴 O 的回转半径是 ρ。在半径是 r_1 的滑轮上用钢绳悬挂质量等于 m_1 的平衡锤 A，而在半径是 r_2 的滑轮上用钢绳牵引小车 B 沿斜面运动。小车的质量是 m_2，斜面与水平面的倾角是 α。已知在鼓轮上作用着转矩 M_0，求小车上运动的加速度和两根钢绳的拉力。钢绳的质量和摩擦都不计。

答: $a=\dfrac{M_0+(m_1r_1-m_2r_2\sin\alpha)g}{m\rho^2+m_1r_1^2+m_2r_2^2}r_2$ $T_A=m_1(g-\dfrac{r_1}{r_2}a)$，$T_B=m_2(g\sin\alpha+a)$



解：1、由动能定理求小车加速度。取整体为研究对象，应用微分形式定理。

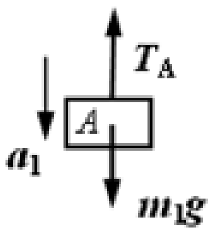
$$dT=\sum dW \qquad (1)$$

$$T=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}(m\rho^2)\omega^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2$$

$$\sum dW=M_0d\varphi+m_1gds_1-m_2gds_2\sin\alpha$$

考虑到 $\dfrac{v_2}{r_2}=\dfrac{v_1}{r_1}$，$d\varphi=\dfrac{ds_2}{r_2}=\dfrac{ds_1}{r_1}$，代入式（1）得

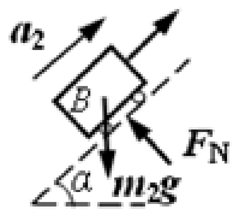
$$v_2\frac{dv_2}{dt}(m_2+m\frac{p^2}{r_2^2}+m_1\frac{r_1^2}{r_2^2})=\frac{ds_2}{dt}(\frac{M_o}{r_2}+m_1g\frac{r_1}{r_2}+m_2g\sin\alpha)$$



由于 $\dfrac{dv_2}{dt}=a$，$\dfrac{ds_2}{dt}=v_2$

所以 $$a=\frac{dv_2}{dt}=\frac{M_o+(m_1r_1-m_2r_2\sin\alpha)g}{m\rho^2+m_1r_1^2+m_2r_2^2}r_2$$

2、应用质点运动微分方程求绳的拉力。



（1） 取 A 为研究对象。 $m_1a_1=m_1g-T_A$

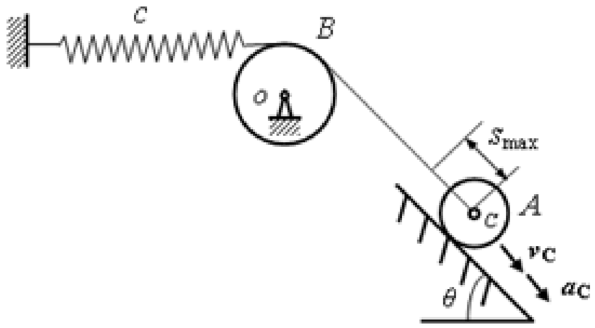
$$T_A=m_1g-m_1a_1=m_1(g-\frac{r_1}{r_2}a)$$

（2）取小车为研究对象。$m_2a=T_B-m_2g\sin\alpha$

$$T_B=m_2a+m_2g\sin\alpha=m_2(a+g\sin\alpha)$$

12.匀质轮 A 的半径r_1，质量是m_1，可在倾角为θ的固定斜面上纯滚动。匀质轮 B 的半径是r_2，质量是m_2。水平刚度系数是 c。假设系统从弹簧未变形的位置静止释放，绳与轮 B 不打滑，绳的倾斜段与斜面平行，不计绳重和轴承摩擦；求轮心 C 沿斜面向下运动的最大距离以及这瞬时轮心 C 的加速度。

答: $S_{\max}=\dfrac{2m_1 g\sin\theta}{c}$，　$a_C=\dfrac{2m_1 g\sin\theta}{3m_1+m_2}$（沿斜面向上）



解：取整体为研究对象。

1、求向下运动最大距离 $s_{\max}$ 。

$T_1=0$。下滑到最大距离时 $v_2=0$，

所以 $T_2=0$。

只 有 弹 力 和 重 力 作 功

$$\sum W=m_1 g s_{\max}\cdot\sin\theta+\frac{1}{2}c\left(0^2-s_{\max}^2\right)$$

由　$T_2-T_1=\sum W$　，　得　$0-0=m_1 g s_{\max}\cdot\sin\theta+\dfrac{c}{2}s_{\max}^2$

$$s_{\max}=\frac{2m_1 g\sin\theta}{c}$$

1、求轮心 C 的加速度 $\boldsymbol{a}_C$

设轮心 C 沿斜面向下运动的距离为 s。

$$T_1=0,\quad T_2=\frac{1}{2}m_1 v_C^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_1 r_1^2\right)\omega_1^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_2 r_2^2\right)\omega_2^2$$

$$\omega_2=\frac{v_c}{r_2}\quad,\quad \omega_1=\frac{v_c}{r_1}$$

$$T_2=\frac{1}{2}m_1 v_c^2+\frac{1}{4}m_1 r_1^2\cdot\frac{v_c^2}{r_1^2}+\frac{1}{4}m_2 r_2^2\cdot\frac{v_c^2}{r_2^2}$$

$$=\frac{3}{4}m_1 v_c^2+\frac{1}{4}m_2 v_C^2\cdot$$

$$\sum W=m_1 g s\cdot\sin\theta-\frac{c}{2}s^2$$

所以　$$\frac{v_c^2}{4}(3m_1+m_2)=m_1 g s\cdot\sin\theta-\frac{c}{2}s^2$$

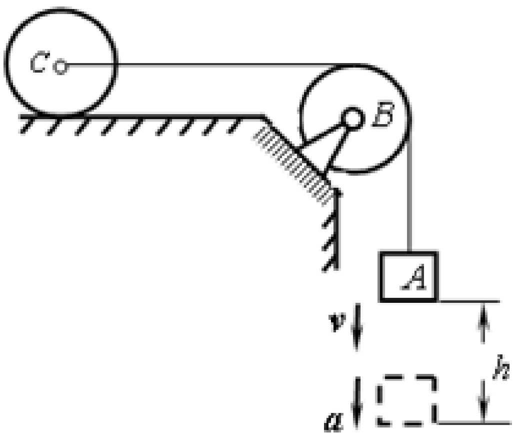
视 s 为变量，两边对时间 t 求导

$$\frac{v_2}{2}\cdot a_c(3m_1+m_2)=m_1 g\sin\theta\cdot v_c-cs\cdot v_c$$

得　$a_c=\dfrac{2(m_1 g\sin\theta-cs)}{3m_1+m_2}$　　将$s=\dfrac{2m_1 g\sin\theta}{c}$代入得，

$$a_c=\frac{-m_1 g\sin\theta}{3m_1+m_2}$$（沿斜面向上）

13.物体 A 质量m_1，挂在不可伸长的绳索上；绳索跨过定滑轮 B，另一端系在滚子 C 的轴上，滚子 C 沿固定水平面滚动而不滑动。已知滑轮 B 和滚子 C 是相同的匀质圆盘，半径都是 r，质量都是m_2。假设系统在开始处于静止，试求物块 A 在下降高度 h 时的速度和加速度。绳索的质量以及滚动摩阻和轴承摩擦都不计。



答: $v=\sqrt{\dfrac{3m_1gh}{m_1+2m_2}}$， $a=\dfrac{m_1}{m_1+2m_2}g$

解：取整体为研究对象。

$T_1=0$

$$T_2=T_A+T_B+T_C$$

$$=\frac{1}{2}m_1v^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_2r^2\right)\cdot\left(\frac{v^2}{r}\right)+\frac{3}{4}m_2v^2$$

$$=\frac{1}{2}(m_1+2m_2)v^2$$

$$\sum W=m_1gh$$

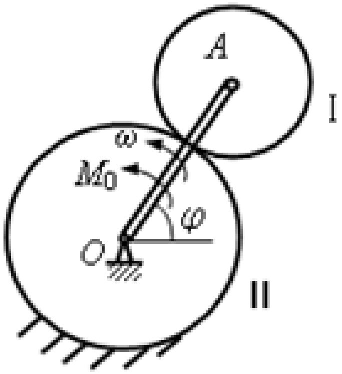
由 $$T_2-T_1=\sum W$$

得 $$\frac{1}{2}(m_1+2m_2)v^2=m_1gh \quad ,\quad v^2=\frac{2m_1gh}{m_1+2m_2} \qquad (1)$$

$$v=\sqrt{\frac{2m_1gh}{m_1+2m_2}}$$

对式（1）两边求导得 $$a=\frac{m_1g}{m_1+2m_2}$$

14.外啮合的行星齿轮机构放在水平面内，在曲柄 OA 上作用着常值转矩 M_0，来带动齿轮 1 沿定齿轮 2 滚动而不滑动。已知齿轮 1 和 2 分别具的质量 m_1 和 m_2，并可看成半径是 r_1 和 r_2 的匀质圆盘；曲柄具有质量 m，并可看成匀质细杆。已知机构由静止开始运动，试求曲柄的角速度和转角 φ 之间的关系。摩擦不计。



答: $\omega=\dfrac{2}{r_1+r_2}\sqrt{\dfrac{3M_0\varphi}{2m+9m_1}}$

解：取整体为研究对象。

由运动学得知 $v_A=(r_1+r_2)\omega$

$$T_1=0$$

$$T_2=T_A+T_{OA}=\frac{3}{4}m_1(r_1+r_2)^2\omega^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega^2$$

$$=\frac{\omega^2}{12}(r_1+r_2)^2(9m_1+2m)$$

在水平面重力与支承力不作功，有

$$\sum W=M_0\varphi$$

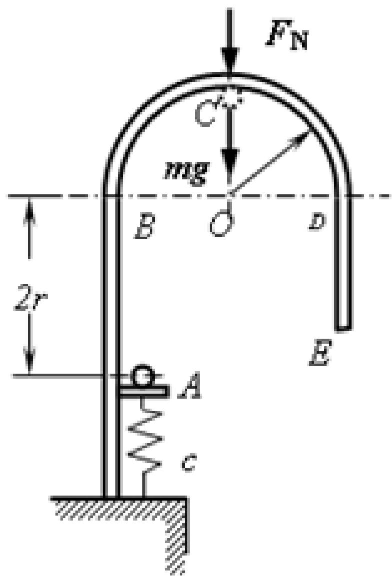
由 $T_2-T_1=\sum W$

得 $\dfrac{\omega^2}{12}(r_1+r_2)^2(9m_1+2m)=M_o\varphi$

$$\omega=\frac{2}{r_1+r_2}\sqrt{\frac{3M_o\varphi}{2m+9m_1}}$$

15.小球具有质量 $m=0.2kg$，在位置 A 时弹簧被压缩 $\lambda=75mm$。小球从位置 A 无初速地释放后沿光滑轨道 ABCD 运动。已知 $r=150mm$，求弹簧刚度系数的容许最小值。

答: $c=366N/m$



解：1. 先求小球能沿轨道 ABCD 运动时在 C 点的最小速度 v_c。

在 C 点写出小球的动力学方程

$$mg+F_N=ma_n=m\frac{v_c^2}{r},$$

小球不脱离轨道的条件是反力 $F_N\geq0$，即

$$m\frac{v_c^2}{r}-mg\geq0,$$

在 F_N=0 的极限情况下，有$mg=m\dfrac{v_c^2}{r}$

$$v_c=\sqrt{rg}$$

2. 再应用机械能守恒定理求解。

取弹簧不变形位置为弹性力场的零点位置，取 A 点为重力场的零点位置。

$$T_A=0\quad,\ V_A=\frac{1}{2}c\lambda^2;\quad T_c=\frac{1}{2}mv_c^2\quad,\quad V_c=mg\times3r$$

由 $$T_A+V_A=T_c+V_c$$

得 $$0+\frac{1}{2}c\lambda^2=\frac{1}{2}mv_c^2+mg\times3r$$

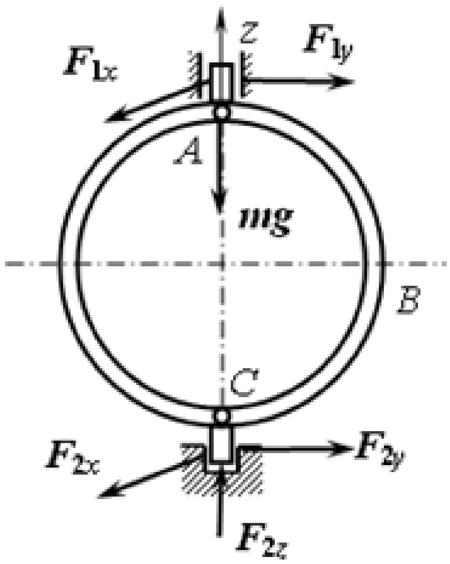
$$c=366\,{}^{N}\!/_{m}$$

11.管子做成半径是 r 的铅直圆环，对圆环直径的转动惯量是 I，以角速度绕定轴自由转动。在管子内最高点 A 放一质量是 m 的小球。由于微小扰动使小球离开点 A 而沿管下落，试求当小球到达点 B 和 C 时，圆环的角速度以及小球的绝对速度。摩擦不计。

答: $\omega_B = \dfrac{I}{I+mr^2}\omega$，

$$v_B = \sqrt{2gr + r^2\omega^2 \frac{I(2I+mr^2)}{(I+mr^2)}}$$

$\omega_c = \omega$，$v_c = 2\sqrt{gr}$



解：取整个系统为研究对象。

因为该系统的所有外力对转轴 z 的矩都等于零，故系统对轴 z 的动量矩守恒，即

$$I\omega = I\omega_B + mr^2\omega_B \qquad (1)$$

小球到达点 B 时圆环的角速度

$$\omega_B = \frac{I}{I+mr^2}\omega$$

当小球由 A 运动到 B 的过程中，对整个系统应用动能定理，有

$$\frac{1}{2}\left(mv_B^2 + I\omega_B^2\right) - \frac{1}{2}I\omega^2 = mgr \qquad (2)$$

把 ω_B 的值代入式（2），求得小球到达点 B 时小球的绝对速度

$$v_B = \sqrt{\frac{2mgr - I\omega^2\left[\dfrac{I^2}{(I+mr^2)^2} - 1\right]}{m}}$$

$$= \sqrt{2gr + r^2\omega^2 \frac{I\left(2I+mr^2\right)}{\left(I+mr^2\right)^2}}$$

用同样的方法写出方程（1）和（2），可以求得小球到达点 C 时的对应值

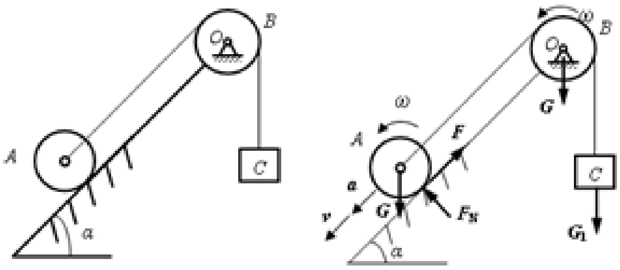
$$\omega_c = \omega \qquad v_c = 2\sqrt{gr}。$$

12. 跨过定滑轮 B 的绳索，两端分别系在滚 A 的中心和物块 C 上。滚子 A 和定滑轮 B 都是半径 r 是的匀质圆盘，各重 G；物块 C 重 G_1。滚子沿倾角是 α 的斜面向下作纯滚动。绳的倾斜段与斜面平行，绳与轮 B 不打滑，不计绳重和轴承摩擦。试求：(1) 滚子 A 的质心加速度；(2) 绳索 AB 段的拉力；(3) 轴承 O 的反力。

答　(1) $a=\dfrac{G\sin\alpha-G_1}{2G+G_1}g$　　(2) $F_{AB}=\dfrac{3G_1+(2G_1+G)\sin\alpha}{2(2G+G_1)}G$

(3) $F_{Ox}=\dfrac{G\cos\alpha}{2(2G+G_1)}[3G_1+(2G_1+G)\sin\alpha]$

$$F_{Oy}=\frac{G}{2(2G+G_1)}(4G+6G_1+[5G_1+(2G_1+G)\sin\alpha]\sin\alpha)$$



解：为求滚子质心的加速度，可对这个系统应用微分形式的动能定理，有

$$dT=\sum d'W \qquad (1)$$

其中　$$T=\frac{1}{2}\frac{G}{g}v^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{G}{g}r^2\right)\omega^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{G}{g}r^2\right)\omega^2+\frac{1}{2}\frac{G_1}{g}v^2=\frac{v^2}{2g}(2G+G_1)$$

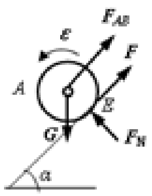
$$\sum d'W=G\sin\alpha\times ds-G_1ds=(G\sin\alpha-G_1)ds$$

故式 (1) 写成

$$\frac{vdv}{gdt}(2G-G_1)=(G\sin\alpha-G_1)\frac{ds}{dt}$$

从而求得滚子质心的加速度

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{G\sin\alpha-G_1}{2G+G_1}g$$



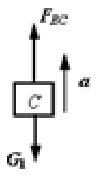
取滚子 A 为研究对象，以瞬心轴 E 为矩轴应用动量矩定理，有

$$(G\sin\alpha-F_{AB})r=I_E\varepsilon=\frac{3}{2}\frac{G}{g}r^2\times\frac{a}{r},$$

故绳索 AB 段的拉力

$$F_{AB}=G\sin\alpha-\frac{3G}{2g}\times\frac{G\sin\alpha-G_1}{2G+G_1}g$$

$$=\frac{3G_1+(2G_1+G)\sin\alpha}{2(2G+G_1)}G$$



取物块 C 为研究对象，由动力学方程求得

$$F_{BC}=G_1(1+\frac{a}{g})=G_1(1+\frac{G\sin\alpha-G_1}{2G+G_1})=\frac{G_1G}{2G+G_1}(2+\sin\alpha)$$

取滑轮 B 为研究对象，由质心运动定理可得轴承 O 的反力

$$F_{ox}=F_{AB}\cos\alpha=\frac{G\cos\alpha}{2(2G+G_1)}[3G_1+(2G_1+G)\sin\alpha]$$

$$F_{oy}=G+F_{BC}+F_{AB}\sin\alpha=G+\frac{G_1G}{2G+G_1}(2+\sin\alpha)$$

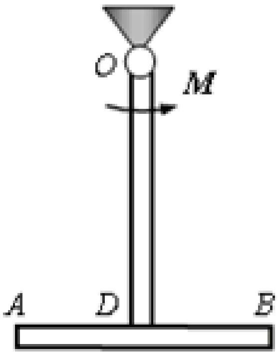
$$+\frac{3G_1+(2G_1+G)\sin\alpha}{2(2G+G_1)}G\sin\alpha$$

$$=\frac{G_1G}{2G+G_1}(4G+6G_1+[5G_1+(2G_1+G)\sin\alpha]\sin\alpha)$$

13. 匀质杆 AB 和 CD，质量均为 m，长度都为 l，垂直的固接成 T 字型，且 D 为 AB 杆的中点，置于铅垂平面内，该 T 字杆可绕光滑固定轴 O 转动，如图所示。开始时系统静止，OD 杆铅垂。现在一力偶 $M=\dfrac{20}{\pi}mgl$ 的常值力偶作用下转动。求 OD 杆至水平位置时，（1）OD 杆角速度和角加速度；（2）支座 O 处的反力。

答: $\omega=2\sqrt{\dfrac{3g}{l}}$，$\varepsilon=\dfrac{6g}{17\pi l}(40-3\pi)$，$N_{Ox}=-18mg$，$N_{Oy}=2mg+\dfrac{9mg}{17\pi}(40-3\pi)$）

解：应用动能定理



$$T_1=0,\quad T_2=\frac{1}{2}I_o\omega^2=\frac{1}{2}(\frac{17}{12}ml^2)\omega^2$$

$$\sum W=M\times\frac{\pi}{2}-mg\cdot\frac{l}{2}-mgl=\frac{17}{2}mgl$$

代入 $\quad T_2-T_1=\sum W$

得 $\quad \dfrac{17}{24}ml^2\omega^2-0=\dfrac{17}{2}mgl$

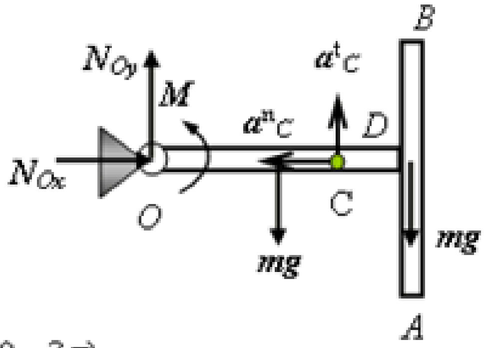
$$\omega=2\sqrt{\frac{3g}{l}}$$

应用动量矩定理，当 OD 杆在水平位置时

$$I_o\varepsilon=M-mg\cdot\frac{l}{2}-mgl$$

$$\frac{17}{12}ml^2\varepsilon=\frac{g}{2\pi}(40-3\pi)$$

$$\varepsilon=\frac{6g}{17\pi l}(40-3\pi)$$



系统质心在图示 C 点处。

$$a_C^n=\frac{3l}{4}\cdot\omega^2=9g,\qquad a_C^t=\frac{3}{4}l\cdot\varepsilon=\frac{9g}{34\pi}(40-3\pi)$$

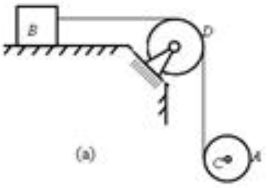
应用质心运动定理得 $\qquad -2ma_C^n=N_{ox},$

$$2ma_C^t=N_{oy}-2mg$$

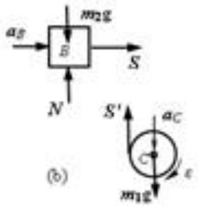
解得 $\qquad N_{ox}=-18mg\,,\qquad N_{oy}=2mg+\dfrac{9mg}{17\pi}(40-3\pi)$

15.跨过定滑轮 D 的细绳，一端缠绕在匀质圆柱体 A 上，另一端系在光滑水平面上的物块 B 上。已知圆柱 A 的半径是 r，质量是 m_1，物块 B 的质量 m_2。试求物块 B 的加速度 a_B、圆柱质心 C 的加速度 a_C 以及绳索的拉力 S。滑轮和细绳的质量，以及轴承摩擦都忽略不计。

答：$a_B=\dfrac{m_1}{m_1+3m_2}g$，$a_C=\dfrac{m_1+2m_2}{m_1+3m_2}g$，$S=\dfrac{m_1m_2}{m_1+3m_2}g$



(a)



(b)

解一：分别取物块 B 和圆柱体 A 为研究对象(图 b)，有

$$m_2a_B=S \qquad (1)$$

$$Sr=\frac{1}{2}m_1r^2\varepsilon,\quad 即\quad S=\frac{1}{2}m_1r\varepsilon, \qquad (2)$$

$$m_1a_c=m_1g-S \qquad (3)$$

又
$$a_c=a_B+r\varepsilon \qquad (4)$$

把式（1）、（2）、（4）代入式（3）得

$$m_1\left(a_B+\frac{2m_2}{m_1}a_B\right)=m_1g-m_2a_B,$$

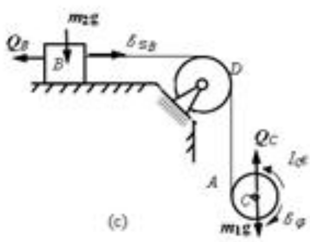
故
$$a_B=\frac{m_1}{m_1+3m_2}g$$

由式（4）、（1）、（2），得

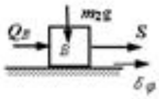
$$a_c=\frac{m_1}{m_1+3m_2}g+\frac{2m_2}{m_1}\times\frac{m_1}{m_1+3m_2}g=\frac{m_1+2m_2}{m_1+3m_2}g$$

由式（1）得
$$S=\frac{m_1m_2}{m_1+3m_2}g$$

解二：应用动力学普遍方程，对整个系统加惯性力 $Q_B=-m_2a_B$，$Q_c=-m_1a_c$ 以及矩为 $I_C\varepsilon$ 的惯性力偶。然后给系统一组虚位移 δs_B 和 $\delta\varphi$(图 c)。根据 $\sum(F+Q)\cdot\delta r=0$，有



(c)



(d)

$$-(m_2a_B)\delta s_B-\left(\frac{1}{2}m_1r^2\varepsilon\right)\delta\varphi+[m_1g-m_1(a_B+r\varepsilon)](\delta s_B+r\delta\varphi)=0$$

即
$$-[m_2a_B+m_1g-m_1(a_B+r\varepsilon)]\delta s_B+\left[-\frac{1}{2}m_1r\varepsilon+m_1g-m_1(a_B+r\varepsilon)\right]r\delta\varphi=0$$

因为 $\delta s_B\neq0$，$\delta\varphi\neq0$，故有

$$-m_2a_B+m_1g-m_1(a_B+r\varepsilon)=0 \qquad (5)$$

$$-\frac{1}{2}m_1r\varepsilon+m_1g-m_1(a_B+r\varepsilon)=0 \qquad (6)$$

联立解式（5）和（6），得

又
$$a_c=a_B+r\varepsilon=a_B+\frac{2m_2}{m_1}a_B=\frac{m_1+2m_2}{m_1+3m_2}g$$

欲求拉力 S，可取物块 B 为研究对象，给一平动虚位移 δs_B(图 d)，有

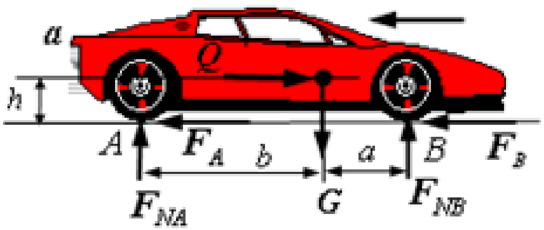
$$(S-m_2a_B)\delta s_B=0,$$

$$S=\frac{m_1m_2}{m_1+3m_2}g$$

达朗伯原理

1.小轿车重 G，轮胎与路面间的静摩擦因数是 f。设 b:c:h=3:2:1，试求当四轮一起紧急刹车时汽车的最大减速度和前后轮对地面的正压力。

答： $a = fg$； $F_{NA} = \frac{2-f}{5}G$， $F_{NB} = \frac{3+f}{5}G$



解：取小轿车为研究对象，受力分析如图。

小轿车平动，惯性力大小 $Q = \frac{G}{g}a$

列平衡方程

$$\sum F_x = 0, \qquad Q - F_A - F_B = 0$$

$$\sum F_y = 0, \qquad F_{NA} + F_{NB} - G = 0$$

$$\sum M_A = 0, \qquad F_{NB}(b+a) - Gb - Qh = 0$$

又 $\qquad F_A = F_{NA}f$， $\quad F_B = F_{NB}f$

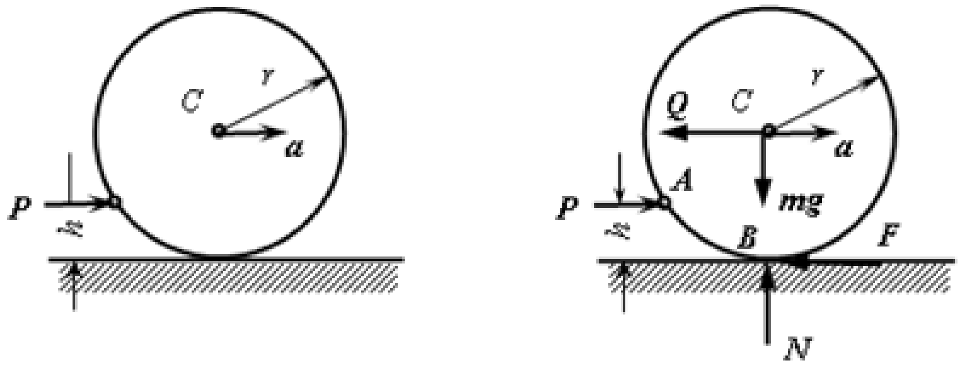
解得 $\qquad a = fg$

$$F_{NA} = \frac{2-f}{5}G$$

$$F_{NB} = \frac{3+f}{5}G$$

2. 质量是 m，半径是 r 的匀质圆球放在粗糙水平面上。在球的铅直中心面上一点 A 作用着水平向右的力 **P**，使球无滚动地向右滑动，已知球心加速度 $a = 0.2g$。设动摩擦因数 f'=0.3。试求（1）力 P 的大小；（2）点 A 的高度。

答： P=0.5mg，h=0.4r



解：取圆球为研究对象，小球作平动，受力分析如图。

惯性力大小 $Q = ma$

列平衡方程

$$\sum F_x = 0 \ , \qquad P - F - Q = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \ , \qquad mg - N = 0 \qquad (2)$$

$$\sum M_B = 0 \ , \qquad Q \cdot r - Ph = 0 \qquad (3)$$

又 $F = fN$

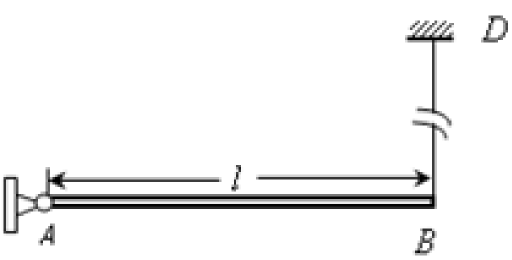
由式（2）得 $N = mg$

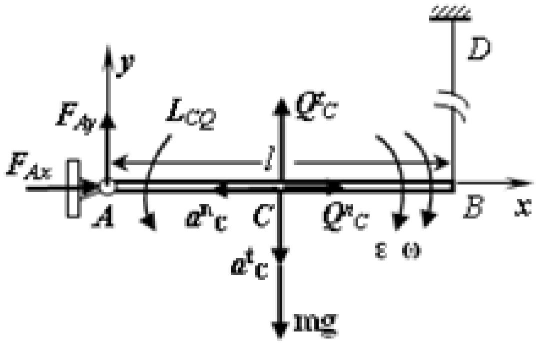
代入式（1）得 $P = f' \times mg + ma = 0.5mg$

由式（3）得 $h = \dfrac{Q \cdot r}{P} = 0.4r$

3.水平匀质细杆 AB 长 $l=1m$，质量 m=12kg，A 端用铰链支承，B 端用铅直绳吊住。现在把绳子突然割断，求刚割断时杆 AB 的角加速度 ε 和铰链的动反力 N_A。

答： ε=14.7rad/s^2 ，$N_A=29.4N$





解：取杆为研究对象，受力分析如图。

质心加速度 $a_c^t=\dfrac{l}{2}\varepsilon$ ，$a_c^n=\dfrac{l}{2}\omega^2$

将惯性力系向质心 C 简化，有

$$Q_C^t=m\frac{l}{2}\varepsilon,\qquad Q_C^n=m\frac{l}{2}\omega^2,\qquad L_{CQ}=I_C\varepsilon$$

列平衡方程

$$\sum M_A=0\ ,\qquad \frac{1}{12}ml^2\varepsilon+Q_C^t\cdot\frac{l}{2}-mg\frac{l}{2}=0 \qquad (1)$$

$$\sum F_x=0\ ,\qquad F_{Ax}+Q_C^n=0 \qquad (2)$$

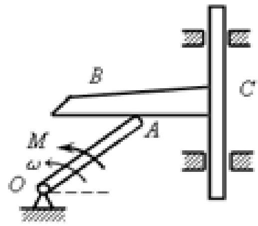
$$\sum F_y=0\ ,\qquad F_{Ay}+Q_C^t-mg=0 \qquad (3)$$

解得 $\varepsilon=\dfrac{3}{2}\dfrac{g}{l}$， $F_{Ax}=-m\dfrac{l}{2}\omega^2$， $F_{Ay}=\dfrac{m}{4}g$

绳子刚割断时有 $\omega=0$ ，所以 $\varepsilon=14.7\,{rad}/{s^2}$ ，$F_{Ax}=0$，$F_{Ay}=29.4N$。

注意：惯性力若向铰链 A 简化，则惯性力应该画在 A 处，且 $L_{AQ}=I_A\varepsilon$。

4.图示曲柄 OA 质量为m_1，长为r，以匀角速度 ω 绕水平的 O 轴逆时针方向转动。曲柄的 A 端推动水平板 B，使质量为m_2的滑杆 C 沿铅直方向运动。忽略摩擦，求当曲柄与水平方向夹角为 30°时的力偶矩 M 及轴承 O 的反力。



(a)

答：$M=\frac{\sqrt{3}}{4}(m_1+2m_2)gr-\frac{\sqrt{3}}{4}m_2r^2\omega^2$，

$$F_{Ox}=-\frac{\sqrt{3}}{4}m_1r\omega^2$$

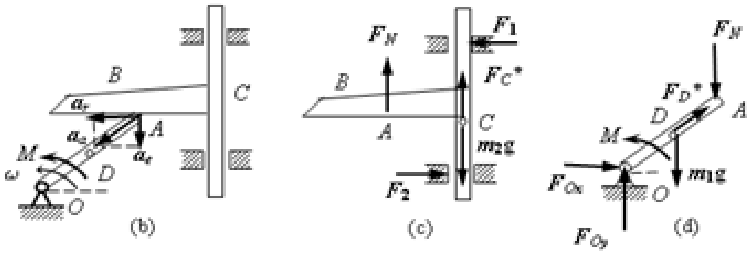
$$F_{Oy}=(m_1+m_2)g-(m_1+2m_2)\frac{r\omega^2}{4}$$

解：应用达朗贝尔原理求解。

由已知条件可知，OA 杆质心 D 的加速度$a_D=\frac{r}{2}\omega^2$，

A 点的加速度 $a_A=r\omega^2$。

取 OA 杆上 A 点为动点，动系固连板 BC(图 b)。



(b) (c) (d)

$$\boldsymbol{a}_a=\boldsymbol{a}_e+\boldsymbol{a}_r$$

投影到铅直方向得

$$a_a\cos 60^\circ=a_e,\qquad 其中\quad a_a=a_A\ 。$$

解得 $$a_e=\frac{1}{2}r\omega^2$$

取水平板 B 和滑杆 C 为研究对象，惯性力 $F_C^*=m_2a_e=\frac{1}{2}m_2r\omega^2$，受力如图 c 所示。

列平衡方程

$$\sum F_y=0,\qquad F_N+F_C^*-m_2g=0$$

解得 $$F_N=m_2g-F_C^*=m_2g-\frac{1}{2}m_2r\omega^2$$

再取曲杆 OA 为研究对象，受力如图 d 所示。

惯性力 $F_D^*=m_1a_D=\frac{m_1}{2}r\omega^2$，惯性力偶 $M^*=0$。

列平衡方程

$$\sum F_x=0,\qquad F_{ox}+F_D^*\cos 30^\circ=0$$

$$F_{ox}=-\frac{\sqrt{3}}{4}m_1r\omega^2$$

$$\sum F_y=0,\qquad F_{oy}+F_D^*\sin 30^\circ-F_N-m_2g=0$$

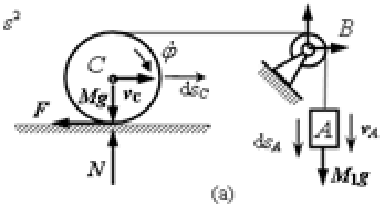
$$F_{oy}=(m_1+m_2)g-(m_1+2m_2)\frac{r\omega^2}{4}$$

$$\sum M_o=0,\qquad M-m_1g\times\frac{r}{2}\cos 30^\circ-F_N\times r\cos 30^\circ$$

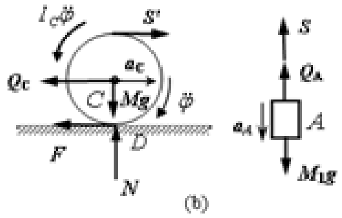
$$M=\frac{\sqrt{3}}{4}(m_1+2m_2)gr-\frac{\sqrt{3}}{4}m_2r^2\omega^2$$

5.匀质滚子质量 M=20kg，被水平绳拉着在水平面上作纯滚动。绳子跨过滑轮 B 而在另一端系有质量 M_1=10kg 的重物 A。求滚子 C 中心的加速度。滑轮和绳的质量都忽略不计。

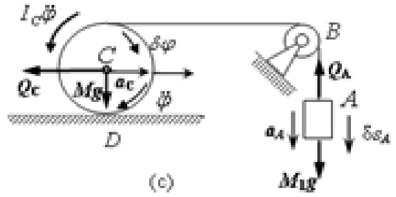
答：　$a_c = 2.8m/s^2$



(a)



(b)



(c)

解一：用达朗伯原理，分别取重物 A 和滚子为研究对象(图 b)，在重物上加惯性力 $\boldsymbol{Q}_A=-M_1\boldsymbol{a}_A$，在滚子上加惯性力 $\boldsymbol{Q}_c=-M\boldsymbol{a}_c$ 和矩为 $-I_c\ddot{\varphi}$ 的惯性力偶，其中 $r\ddot{\varphi}=a_c=\frac{1}{2}a_A$。对重物 A，有

$$M_1a_A+S-M_1g=0 \qquad (1)$$

对滚子有

$$\sum M_D(F)=0, \quad (\frac{1}{2}Mr^2)\frac{a_c}{r}+Ma_cr-2Sr=0 \qquad (2)$$

联立解得点 C 的加速度

$$a_c=\frac{4M_1g}{3M+8M_1}=\frac{4\times10\times9.8}{3\times20+8\times10}=2.8\,m/s^2$$

解二：用动力学普遍方程(图 c)，在整个系统上加惯性力 $\boldsymbol{Q}_A=-M_1\boldsymbol{a}_A$ 和 $\boldsymbol{Q}_c=-M\boldsymbol{a}_c$ 以及矩为 $-I_c\ddot{\varphi}$ 的惯性力偶后，给系统一组虚位移 δs_A、δs_c 和 $\delta\varphi$（其中 $\delta s_A=2\delta s_c$，$\delta\varphi=\frac{\delta s_A}{2r}$）。

根据 $\sum(F+Q)\cdot\delta r=0$，有

$$M_1(g-a_A)\delta s_A-Ma_c\delta s_c-\frac{1}{2}Mr^2\frac{a_c}{r}\delta\varphi=0$$

即　$$M_1(g-2a_c)\delta s_A-Ma_c\frac{\delta s_A}{2}-\frac{1}{2}Mra_c\frac{\delta s_A}{2r}=0。$$

因为 $\delta s_A\neq0$，故可得

$$a_c=\frac{4M_1g}{3M+8M_1}$$

解三：用微分形式动能定理(图 a)。

$$dT=\sum d'W$$

其中　$$T=\frac{1}{2}M_1v_A^2+\frac{1}{2}Mv_c^2+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}Mr^2)(\frac{v_c}{r})^2$$

$$=\frac{v_c^2}{4}(8M_1+3M)$$

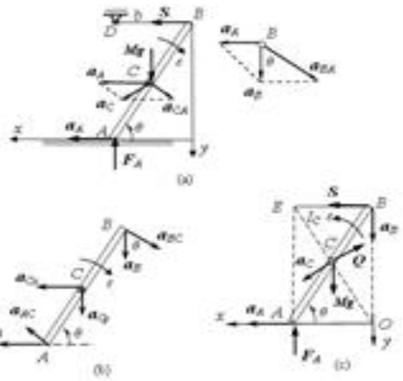
$$\sum d'W=M_1g\cdot ds_A=2M_1gds_c$$

代入得　$$\frac{1}{2}v_c\frac{dv_c}{dt}(3M+8M_1)=2M_1g\frac{ds_c}{dt}$$

故　$$a_c=\frac{dv_c}{dt}=\frac{4M_1g}{3M+8M_1}$$

7.质量M=50kg的均质细杆AB，一端A搁在光滑水平面上，另一端B由质量可以不计的绳子系在固定点D，且ABD在同一铅直平面内。当绳处于水平位置时，杆由静止开始落下。求在此瞬时：(1)杆的角加速度；(2)绳子BD的拉力；(3)A点支反力。已知：杆AB长$l=2.5m$，绳长BD长b=1m，D点高出地面h=2m。

答： $\varepsilon=3.52rad/s^2$， $S=176N$， $N_A=358N$



解一：用刚体平面运动的微分方程。设角速度ε为顺时针方向，坐标系Oxy如图a所示。有

$$Ma_{Cx}=S \qquad (1)$$

$$Ma_{Cy}=Mg-F_A \qquad (2)$$

$$I_C\varepsilon=F_A\frac{l}{2}\cos\theta-S\frac{l}{2}\sin\theta \qquad (3)$$

共有五个未知量a_{Cx}、a_{Cy}、ε、S、F_A根据运动学关系，可列出两个补充方程如下：

$$\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_A+\boldsymbol{a}_{BA}$$

因为ω=0，故$a_{BA}^n=AB\times\omega^2=0$，$a_{BA}=a_{BA}^\tau=l\varepsilon$。又$\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_{By}$，故$\boldsymbol{a}_B$是铅直向下的，于是

$$a_A=a_{BA}\sin\theta=l\varepsilon\sin\theta$$

又 $$\boldsymbol{a}_c=\boldsymbol{a}_A+\boldsymbol{a}_{cA}$$

其中$a_{cA}=a_{cA}^\tau=\frac{l}{2}\varepsilon$，把上式分别投影到轴x和y上，得

$$a_{cx}=a_A-a_{cA}\sin\theta=l\varepsilon\sin\theta-\frac{l}{2}\varepsilon\sin\theta$$

$$=\frac{l}{2}\varepsilon\sin\theta \qquad (4)$$

$$a_{cy}=a_{cA}\cos\theta=\frac{l}{2}\varepsilon\cos\theta \qquad (5)$$

由式(4)和(5)知，$\boldsymbol{a}_c$的大小$a_c=\frac{1}{2}\varepsilon$，方向垂直于CE。

把式(1)、(2)、(4)、(5)代入式(3)，得

$$\frac{1}{12}Ml^2\varepsilon=(Mg-M\frac{l}{2}\varepsilon\cos\theta)\frac{l}{2}\cos\theta-M\frac{l}{2}\varepsilon\sin\theta\frac{l}{2}\sin\theta$$

故 $$\varepsilon=\frac{3g}{2l}\cos\theta=\frac{3\times9.8}{2\times2.5}\times\frac{3}{5}$$

$$=3.52rad/s^2$$ （顺时针方向）

把上式和式(4)、(5)代入式(1)、(2)可得

$$S=\frac{3}{4}Mg\cos\theta\sin\theta=\frac{3}{4}\times50\times9.8\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=176N$$

$$F_A=Mg(1-\frac{3}{4}\cos^2\theta)==50\times9.8(1-\frac{3}{4}\times\frac{3^2}{5^2})=358N$$

补充方程(4)和(5)也可选点C为基点，并分别写出点A和B的加速度表达式，可得(图b)

$$\boldsymbol{a}_A=\boldsymbol{a}_c+\boldsymbol{a}_{Ac}$$

因为$a_{Ac}^n=AC\times\omega^2=0$，$a_{Ac}=a_{Ac}^\tau=\frac{l}{2}\varepsilon$把上式投影到轴y，有

$$0=a_{cy}-a_{Ac}\cos\theta$$

故 $$a_{cy}=a_{Ac}\cos\theta=\frac{l}{2}\varepsilon\cos\theta$$

又 $$\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_c+\boldsymbol{a}_{Bc}$$

同理，$a_{Bc}^n=BC\times\omega^2=0$，$a_{Bc}=a_{Bc}^\tau=\frac{l}{2}\varepsilon$，$\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_{By}$（铅直向下），把上式投影到轴x，有

$$0=a_{cx}-a_{Bc}\sin\theta$$

$$a_{cx}=a_{Bc}\sin\theta=\frac{l}{2}\varepsilon\sin\theta$$

解二：应用达朗伯原理(图c)。

因杆AB在初瞬时的角速度等于零，故由点A和B分别作$\boldsymbol{a}_A$和$\boldsymbol{a}_B$的垂线，其交点E是该瞬时杆的加速度瞬心。因而可得质心C的加速度大小

$$a_c=EC\times\varepsilon=\frac{l}{2}\varepsilon$$

其方向垂直于CE。加惯性力$\boldsymbol{Q}=-M\boldsymbol{a}_c$和矩为$-I_C\varepsilon$的惯性力偶后，有

$$\sum F_x=0,\qquad S=Q\sin\theta=M\frac{l}{2}\varepsilon\sin\theta \qquad (6)$$

$$\sum F_y=0,\qquad F_A=Mg-Q\cos\theta=Mg-M\frac{l}{2}\varepsilon\cos\theta \qquad (7)$$

$$\sum m_A(F)=0,\qquad Q\frac{l}{2}+I_C\varepsilon-Mg\frac{l}{2}\cos\theta=0 \qquad (8)$$

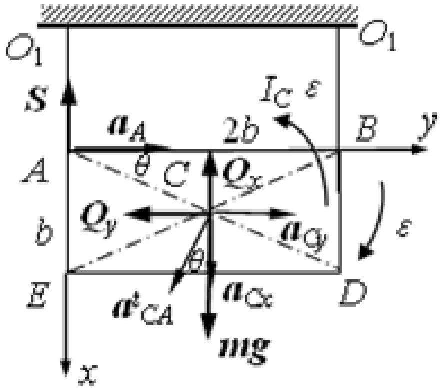
即 $$M\frac{l^2}{4}\varepsilon+\frac{1}{12}Ml^2\varepsilon=Mg\frac{l}{2}\cos\theta$$

故 $$\varepsilon=\frac{3g}{2l}\cos\theta$$ （顺时针方向）

把上式代入式(6)和(7)，可得S和F_A。

6.匀质长方形板 ABCD 的质量是 M，边长各为 b 和 2b，用两根等长的细绳 AO_1和 BO_2吊在水平固定板上。已知该板对过其质心 C 并垂直于板面的轴的转动惯量 $I_0=\frac{5}{12}Mb^2$。如果系统在静止状态时突然剪断细绳 BO_2，求此时长方形板质心 C 的加速度以及绳 AO_1的拉力。

答：　$a_c=\frac{12}{17}g$，$S=\frac{5}{17}Mg$



解：剪断绳子后，薄板将作平面运动。

惯性力的大小 ：$Q_x=ma_{cx}$，

$Q_y=ma_{cy}$，

$L_{Qc}=I_c\varepsilon$

列平衡方程

$\sum F_x=0$ ，　　$mg-Q_x-S=0$　　　　（1）

$\sum F_y=0$，　　$Q_y=0$　　　　（2）

$\sum M_A(F)=0$ ，　$I_c\varepsilon+(Q_x-mg)b=0$　　　　（3）

绳子刚被剪断瞬时，ω= 0，ε≠0，$v=0$，a≠0

所以　　$a_A=a_A^t$

以 A 为基点，则质心 C 的加速度可表示为

$$\boldsymbol{a}_c=\boldsymbol{a}_A+\boldsymbol{a}_{cA}^t+\boldsymbol{a}_{cA}^n$$

上式中，$a_{CA}^n=0$，$a_{CA}^t=AC\cdot\varepsilon$ 。

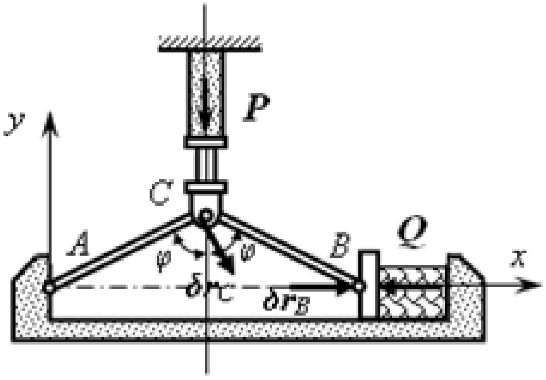
上式投影到 x 轴得　$a_{cx}=a_{cA}^t\cdot\cos\theta=\frac{AD}{2}\cdot\varepsilon\cdot\frac{2b}{AD}=b\varepsilon$　　　（4）

联立求解 (1)、(2)、(3)、(4)可得

$$a_c=\frac{12}{17}g\ ,\ S=\frac{5}{17}mg$$

虚位移原理

1.图示压榨机的空气力筒可相对水平面移动。已知压力筒加在压头 C 上的铅直推力大小是 **P**。杆 AC 和 BC 长度相等。求压榨力 **Q** 与角 φ 间的关系。



解：**几何法**。

$$\sum \delta W(\boldsymbol{F}) = \sum \boldsymbol{F} \cdot \delta \boldsymbol{r} = 0$$

$$Q\,\delta r_B - P\,\delta r_C \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = 0 \quad (1)$$

杆 BC 两端的位移在 BC 上的投影相等，则

$\delta r_C \sin(x - 2\varphi) = \delta r_B \sin\varphi$，即 $\dfrac{\delta r_c}{\delta r_B} = \dfrac{\sin\varphi}{\sin 2\varphi} = \dfrac{1}{2}$。

代入式（1）得

$$Q = \frac{\delta r_c}{\delta r_B} P \sin\varphi = \frac{\sin\varphi}{2\cos\varphi}, \qquad Q = \frac{P}{2} tg\varphi。$$

解析法：

$$\sum \delta W(\boldsymbol{F}) = \sum (F_x \delta_x + F_y \delta_y) = 0 \qquad (2)$$

设 $AC=BC=l$，坐标系如图。

$$y_c = l\cos\varphi \qquad \delta y_c = -l\sin\varphi\delta\varphi$$

$$x_B = 2l\sin\varphi \qquad \delta x_B = 2l\cos\varphi\delta\varphi$$

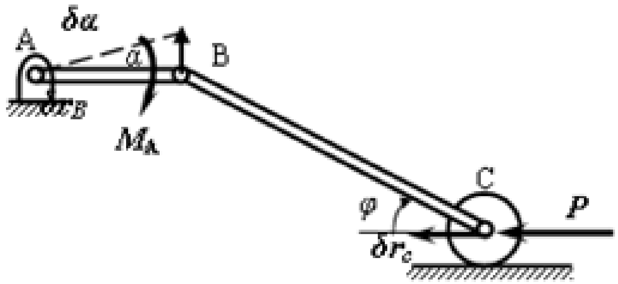
代入式（2）得

$$-P(-l\sin\varphi\delta\varphi) - Q(2l\cos\varphi\delta\varphi) = 0$$

$$(P\sin\varphi - 2Q\cos\varphi)\delta\varphi = 0$$

因为是 δφ 任意的，故有 $Q = \dfrac{P}{2} tg\varphi$。

2.图示机构中的长度 AB=$\frac{1}{2}BC$=r，当杆 AB 水平时，杆 BC 对水平面的倾角是 φ。求在图示位置平衡时，转矩 M_A 和水平力 P 间的关系。



解：给杆 AB 虚位移 $\delta\alpha$，轮 C 同时获得虚位移 δr_C。

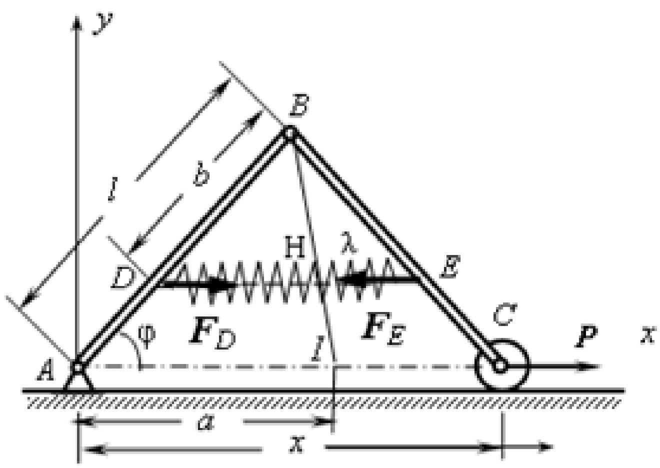
$$-M_A\delta\alpha + P\delta r_c = 0\,, \qquad M_A = P\frac{\delta r_c}{\delta\alpha} \qquad (1)$$

由于 $$v_B\sin\varphi = v_c\cos\varphi, \qquad v_B = v_c ctg\varphi$$

则 $$\frac{\delta r_c}{\delta\alpha} = \frac{v_c}{\omega_{AB}} = \frac{v_c}{\frac{v_B}{r}} = rtg\ \varphi \qquad (2)$$

代入式（1）得 $$M_A = \Pr tg\varphi$$

4.两等长杆 AB 和 BC 在 B 点用铰链连接，在杆的 D 和 E 两点连一水平弹簧，弹簧的刚度系数为 c，当距离 AC=a 时，弹簧内拉力为零。如在 C 点作用一水平力，杆系处于平衡。求距离 AC 之值 x。设 AB=l，BD=b，杆重不计。



解：取系统为研究对象，解除弹簧约束，代以相应的弹力 F_D和 F_E 取倾角 ϕ 为广义坐标。

设弹簧的变形量为 λ，则有 $\lambda = HE$。

由　$\triangle BIC \backsim \triangle BHE$，　$\dfrac{\lambda}{x-a}=\dfrac{b}{l}$

得　$\lambda=\dfrac{b}{l}(x-a)$

弹簧力的大小为

$$F_D=F_E=c(x-a)\frac{b}{l}$$

虚功方程

$$F_D\delta x_D+(-F_E)\delta x_E+P\,\delta x_C=0 \qquad (1)$$

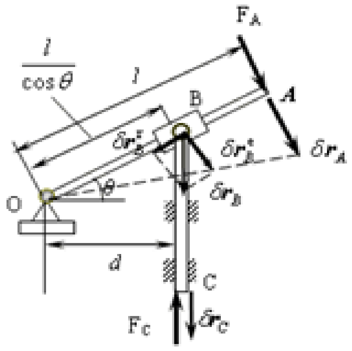
$$x_D=(l-b)\cos\varphi \qquad \delta x_D=-(l-b)\sin\varphi\delta\varphi$$

$$x_E=(l+b)\cos\varphi \qquad \delta x_E=-(l+b)\sin\varphi\delta\varphi$$

$$x_c=2l\cos\varphi \qquad \delta x_c=-2l\sin\varphi\delta\varphi$$

代入虚功方程(1) 得　$x=a+\dfrac{P}{c}(\dfrac{l}{b})^2$

5.在图示机构中，当曲柄 OA 绕水平轴 O 摆动时，滑块 B 可沿曲柄 OA 滑动，并带动一沿铅直导槽 K 运动的杆子 BC。已知 OA=l，OK=d，当 OA 与水平线成角度 θ 时，问在 A 点沿垂直于曲柄 OA 的方向应作用多大的力 $\boldsymbol{F}_A$，才能平衡沿杆 BC 作用铅直朝上的力 $\boldsymbol{F}_C$？不计构件重量。



解：

机构具有理想约束，可以用虚位移原理求主动力的平衡条件。根据分析虚位移方法的不同，下面分别用几何法与解析法求解。

几何法。

给质系一组符合约束的虚位移：点A为$\delta\boldsymbol{r}_A$，杆BC上的点B为$\delta\boldsymbol{r}_B$，点C为$\delta\boldsymbol{r}_C=\delta\boldsymbol{r}_B$。建立动系与杆$OA$固结，根据复合运动中分析点$B$速度与点$A$速度的方法可得关系式

$$\left|\delta\boldsymbol{r}_B\right|\cos\theta=\frac{d}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{l}\left|\delta\boldsymbol{r}_A\right|$$

计算主动力的虚功并应用虚位移原理

$$\delta W=F_A\left|\delta\boldsymbol{r}_A\right|-F_C\left|\delta\boldsymbol{r}_C\right|=0$$

$$(F_A\cdot\frac{l}{d}\cos^2\theta-F_C)\left|\delta\boldsymbol{r}_B\right|=0,$$

因 $\left|\delta\boldsymbol{r}_B\right|\neq 0$，故有 $F_C=\dfrac{l}{d}\cos^2\theta\cdot F_A$

解析法

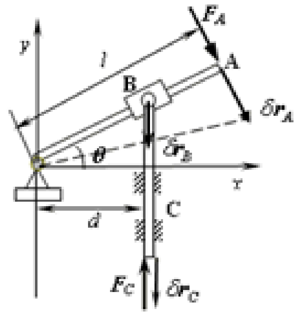
质点系有一个自由度，选 θ 为广义坐标，则有关点的位置坐标表达式及虚位移表达式为

$x_A=l\cos\theta,\qquad \delta x_A=-l\sin\theta\cdot\delta\theta$

$y_A=l\sin\theta,\qquad \delta y_A=l\cos\theta\cdot\delta\theta$

$y_B=d\tan\theta,\qquad \delta y_B=\dfrac{d}{\cos^2\theta}\delta\theta$

$\delta y_C=\delta y_B$



应用虚位移原理得

$$\delta W=F_A\sin\theta\delta x_A-F_A\cos\theta\delta y_A+F_C\delta y_C=0$$

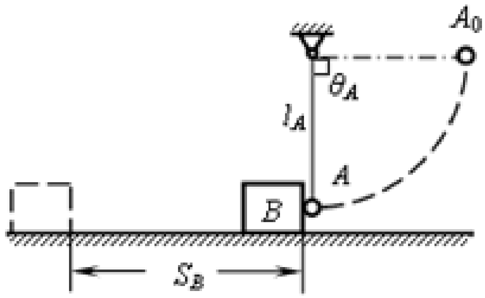
$$(-F_Al\sin^2\theta-F_Al\cos^2\theta+\frac{F_Cd}{\cos^2\theta})\delta\theta=0$$

因 $\delta\theta\neq 0$，故有

$$F_C=\frac{l}{d}\cos^2\theta\cdot F_A$$

碰撞

1.摆锤 A 的重量 m_A=4 kg，悬线长 l_A=3m。摆锤自偏角 $\theta_A=90°$处无初速地落下，击中静止在水平面上质量 m_B=5 kg的物块 B。撞击后物块 B 在水平面上滑行了距离 S_B而停止。设恢复因数 e=0.8，动摩擦因数 f=0.3，求以及摆锤后升高的偏角θ'_A。



解： 1.求摆锤后升高的偏角θ'_A

碰撞过程中平常力的冲量不计，所以摩擦力的冲量可以不计。系统在 x 方向冲量守恒

$$(m_A u_A + m_B u_B) - (m_A v_A + m_B v_B) = 0 \qquad (1)$$

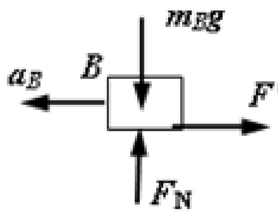
其中 $v_B = 0$， $v_A = \sqrt{2gl_A}$

由 $e = \dfrac{u_B - u_A}{v_A - v_B}$ ， 得 $u_B - u_A = ev_A$ (2)

联立式(1)，(2）解得 $u_A = 0$， $u_B = ev_A$ ，所以 $\theta'_A = 0$ 。

2. 求 S_B。

此过程为非碰撞过程，取物体 B 为研究对象。

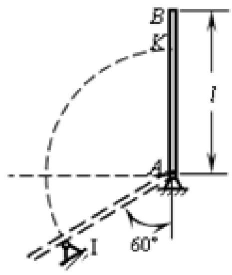


由牛顿定理得 $-m_B a_B = F' = m_B g f'$，$a_B = -gf'$

由 $v_t^2 - v_o^2 = 2as$， 解得 $S_B = \dfrac{-v_B^2}{2a_B} = 6.4m$。

或由动能定理 $0 - \dfrac{1}{2}m_B v_B^2 = -m_B g f' \cdot S_A$，解得 $S_B = \dfrac{-v_B^2}{2a_B} = 6.4m$。

2.匀质细杆 AB 由铅直静止位置绕下端的轴 A 倒下。杆上的一点 K 击中固定钉子 I，碰撞后回到水平位置。（1）求碰撞时的恢复因数 e；（2）证明这个结果与钉子到轴承 A 的距离无关。



解：对碰撞前阶段应用动能定理

$$\frac{1}{2}I_A\omega_o^2-0=mg\frac{l}{2}\left(1+\cos 60^\circ\right)$$

即 $$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega_o^2=mg\frac{l}{2}\cdot\frac{3}{2}$$

解得 $$\omega_o=\sqrt{\frac{9g}{2l}}$$

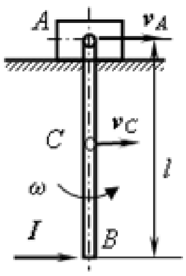
对碰撞后阶段应用动能定理

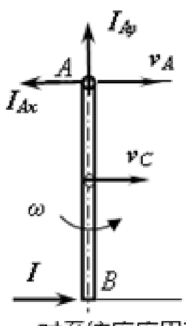
$$0-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega^2=-\frac{l}{2}mg\cos 60^\circ$$ ，解得 $$\omega=\sqrt{\frac{3g}{2l}}$$

由碰撞时的恢复系数公式 $$e=\frac{u_k}{v_k}=\frac{AI\cdot\omega}{AI\cdot\omega_o}=\frac{\omega}{\omega_o}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

可见，恢复系数 e 与钉子到轴承 A 的距离无关。

3.质量为m_1的物块 A 置于水平面上，它与质量为m_2，长为l的均质杆 AB 相铰接。系统初始静止 AB 铅垂，$m_1=2m_2$。今有一冲量为$\boldsymbol{I}$的水平碰撞力作用于杆的 B 端，求碰撞结束时物块 A 的速度。答$v_A=\dfrac{2I}{9m_2}$，方向向左





解：设杆撞后角速度为ω，质心速度为 v_c，对系统应应用动量定理

$$m_1v_A+m_2v_c=I$$

取杆为研究对象

$$J_c\omega=(I+I_{Ax})\frac{l}{2}$$

$$m_2v_c=I-I_{Ax}$$

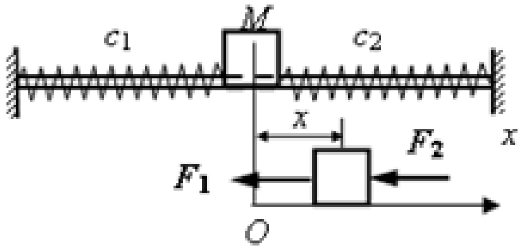
由运动学可知 $$v_c=v_A+\frac{l}{2}\omega$$

解得 $$v_A=-\frac{2I}{4m_1+m_2}=-\frac{2I}{9m_2}$$

负号表示 v_A向左。

质点的振动

1.在图示质量弹簧系统中，质量是 m 的物块 M 可以沿光滑水平导杆运动。已知：m=10g，$c_1=c_2=2$N/m。求系统的固有频率。设振幅是 2cm，求 M 的最大加速度。



解：　（1）取物块 M 为研究对象。

（2）运动分析：M 沿水平导杆自由振动，取静平衡位置为坐标原点，x 轴方向水平向右。

（3）受力分析，重力与杆支持力平衡，受水平弹力 F_1、F_2。

（4）列方程求解：物块在任意位置运动微分方程。

$$m\ddot{x} = -F_1 - F_2 = -(c_1 + c_2)x = -cx \qquad (1)$$

其中　$c = c_1 + c_2 = 4 \ \mathrm{N/m}$

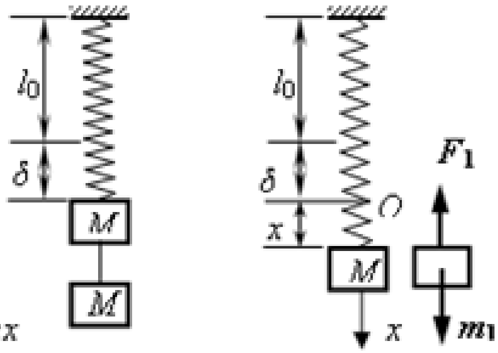
可见图示相当于两弹簧并联。由（1）式得物块 M 振动规律

$$x = A\sin(kt + \alpha)$$

其中固有圆频率　$k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = \sqrt{\dfrac{4}{0.01}} = 20rad/s$

由式（2）得　$a_{\max} = Ak^2 = 0.02 \times 20^2 = 8m/s^2$

2．弹簧的上端固定，下端悬挂两个质量相等的重物 M_1、M_2，当系统处于静平衡时，弹簧被拉长 $\delta_s = 4cm$。现在突然把 M_2 除去，求以后 M 的振动规律。



解：振动系统由重物 M_1 和弹簧组成，在重物 M_1 作用下，弹簧的静伸长 $\delta_{s1} = \dfrac{1}{2}\delta_s = 2cm$

取重物 M_1 的静平衡位置为坐标原点 O 轴 x 铅直向下

由 $m\vec{a} = \vec{F}$，投影 x 轴

$$m\ddot{x} = m_1 g - F_1 = m_1 g - c(\delta_{s1} + x) = -cx$$

即 $$\ddot{x} + k^2 x = 0$$

其中 $$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{s1}}} = \sqrt{\frac{980}{2}} = 22.1 rad/s$$

M_1 的振动方程 $x = A\sin(kt + \alpha)$

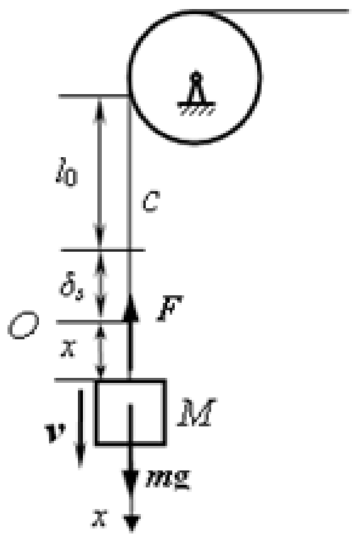
初始条件 t=0, $x_0 = \delta_s - \delta_{s1} = 2cm$ ，$\dot{x}_0 = 0$

则 $$A = \sqrt{x_o^2 + \left(\frac{\dot{x}_o}{k}\right)^2} = x_o = 2cm$$

相角 $$\alpha = arctg\frac{kx_o}{\dot{x}_o} = arctg\frac{kx_o}{\dot{x}_o}\infty = \frac{\pi}{2}$$

所以 $$x = 2\sin\left(22.1t + \frac{\pi}{2}\right) = 2\cos 22.1 t cm$$

3．质量 m=2000kg 的重物在吊索上以匀速 v=5 m/s 下降。由于吊索突然嵌入滑轮的夹子内，其上端被卡住不动。试求以后重物振动时吊索的最大拉力。假定吊索上端被卡住以后，下端吊索的弹簧刚度系数 c=3920 kN/m，又吊索质量不计。



解：取重物为研究对象，静平衡位置为坐标原点 o，x 轴铅直向下

$$m\ddot{x} = mg - c(\delta_s - x) = -cx$$

$$\ddot{x} - k^2 x = 0$$

其中 $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = \sqrt{\dfrac{3920\times10^3}{2000}} = 44.2 rad/s$

$$x = A\sin(kt+\alpha)$$

因为运动初始条件 t=0， x_0=0 ，$\dot{x}_0 = v = 5 \ \mathrm{m/s}$

所以 $A = \sqrt{x_o^2 + \left(\dfrac{\dot{x}_o}{k}\right)^2} = \dfrac{v}{k}$ $\qquad \alpha = arctg\dfrac{kx_o}{\dot{x}_o} = 0$

因为振动方程为 $x = \dfrac{v}{k}\sin kt$

吊索最大拉力 $F_{\max} = c(\delta_s + A) = mg + \dfrac{cv}{k} = 2000\times9.8 + \dfrac{3920\times10^3\times5}{44.2} = 462.6kN$

4.在弹簧上悬挂质量 m=6kg 的物块。当无阻力时，物块的振动周期是 T=0.4π s；而在有正比于速度一次方的阻力时，振动周期 T_1=0.5π s。现在把物块从静平衡位置下拉 4cm，然后无初速度的释放，求以后物体的振动规律。

解：先求阻尼系数 n 。

因为 $k_1^2 = k^2 - n^2$ 即 $\left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 - n^2$

$$n^2 = 4\pi^2\left(\frac{1}{T^2} - \frac{1}{T_1^2}\right) = 4\pi^2\left(\frac{1}{0.016\pi^2} - \frac{1}{0.25\pi^2}\right) = 9\ ,\qquad n=3$$

有阻尼自由振动规律是

$$x = e^{-nt} A\sin(k_1 t + \alpha)$$

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{0.4\pi}\right)^2 - 9} = 4rad/s$$

运动初始条件 t=0 时， x_0=0.04m ， $\dot{x}_o = 0$

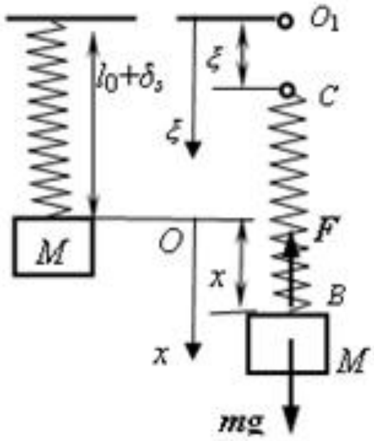
所以 $A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_o r n x_o}{k_1}\right)^2} = \sqrt{0.04^2 + \left(\frac{3\times 0.04}{4}\right)^2} = 0.05m$

$$\alpha = arctg\left(\frac{k x_o}{x_o + n x_o}\right) = arctg\left(\frac{4\times 0.04}{3\times 0.04}\right) = arctg\frac{4}{3}$$

所以 $x = 0.05e^{-5t}\sin\left(4t + arctg\frac{4}{3}\right)m = 5e^{-3t}\sin\left(4t + arctg\frac{4}{3}\right)cm$

5. 砝码 M 悬挂在弹簧 CB 上，弹簧的上端沿铅直方向作简谐运动，$\xi = 2\sin 7t$ cm（时间以 s 计，角度以 rad 计）。砝码质量 m=0.4kg，弹簧刚度系数 c=39.2N/m。求 M 对固定坐标的强迫振动。

答 x=4sin7t cm



解：取弹簧上端不动时物块的平行位置作为固定坐标轴系的原点，令 Ox 轴铅直向下。在任意瞬时 t 物块 m 的坐标为 x

弹簧变形量： $\delta = (t_o + \delta_s + x - \xi) - t_o = \delta_s + x - \xi$

$$m\ddot{x} = mg - (\delta_s + x - \xi)$$

其中 $c\delta_s = mg$， 令 $k^2 = \dfrac{c}{m}$ ， 则上式为

$\ddot{x} + k^2 x = k^2 r \sin pt$ 这是无阻尼强迫振动标准微方程。

强迫振动部分为 $$x_2 = \frac{k^2 r}{k^2 - p^2} \sin pt$$

其中 $k^2 = \dfrac{c}{m} = \dfrac{3.92}{0.4} = 98$ ， p=7 ， r=2 ，代入上式

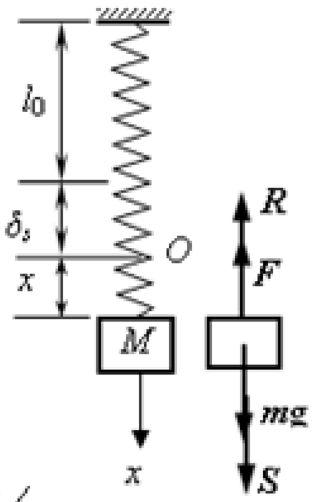
得 $x_2 = \dfrac{98 \times 2}{98 - 7^2} \sin 7t = 4\sin 7t$ cm

6.质量 m=20g 的小物块，悬在刚度系数 c=3.92 N/m 的弹簧上，并受到干扰力 S=0.012sin(pt+δ)和线性阻力 R=0.098v 的作用，其中 S、R 以 N 计，t 以 s 计，pt 和 δ 以 rad 计，v 以 m/s 计，试问圆频率 p 等于何值时强迫振动获得最大振幅？该振幅是多少？

解：小物块的运动方程

$$m\ddot{x} = mg - F - R + s$$

$$= mg - c(\delta_s + x) - u\dot{x} + 0.012\sin(Pt + \delta)$$



即 $$\ddot{x} = 2n\dot{x} + k^2 x = h\sin(Pt + \delta)$$

其中 $$n = \frac{u}{2m} = \frac{98}{2\times w} = 2.45 \qquad k^2 = \frac{c}{m} = \frac{3.92}{2\times 10^{-3}} = 196$$

$$h = \frac{0.012}{m} = \frac{0.012}{20\times 10^{-3}} = 0.6$$

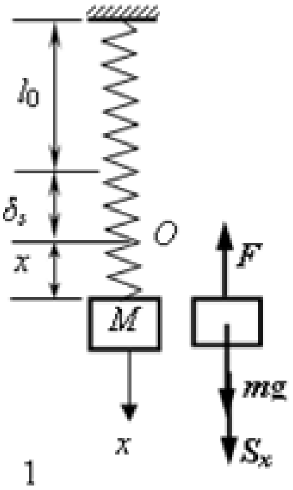
共振频率 $$P_p = \sqrt{k^2 - 2n^2} = \sqrt{196 - 2\times 2145^2} = 13.6\,{}^{rad}\!/_{s}$$

共振振幅 $$B_p = \frac{h}{2n\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{0.6}{2\times 2.45\times\sqrt{196 - 2.45^2}}$$

$$= 0.00887\ \text{m} = 0.887\ \text{cm}$$

7.质量 m=2kg 的质点在恢复力和正弦形扰力作用下沿 x 轴运动。恢复力 $F_x=-8x$ N，扰力 $S_x=0.4\cos t$ N。已知：当 t=0 时，$x_0=0$，试求质点的运动规律。

解：质点运动微分方程



$$m\ddot{x}=mg-F+s_x$$

$$=mg-c(\delta_s+x)+0.4\cos t$$

即 $$\ddot{x}+k^2x=h\cos Pt \qquad (1)$$

其中 $$k=\sqrt{\frac{c}{m}}=\sqrt{\frac{8}{2}}=2 \quad , \quad p=1$$

$$h=\frac{0.4}{m}=\frac{0.4}{2}=0.2 \qquad B=\frac{h}{k^2-p^2}=\frac{0.2}{4-1}=\frac{1}{15}$$

式（1）通解 $$x=x_1+x_2=c_1\cos kt+c_2\sin kt+\frac{h}{k^2+p^2}\cos pt$$

即 $$x=c_1\cos 2t+c_2\sin 2t+\frac{1}{15}\cos t$$

而 $$\dot{x}=-2c_1\sin 2t+2c_2\cos 2t-\frac{1}{15}\sin t$$

把初始条件 t=0 ，$x_0=0$， $\dot{x}_0=0$带入上两式，得

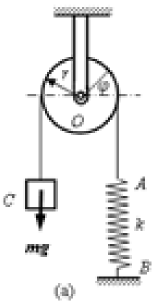
得 $$c_1=-\frac{1}{15}, \quad c_2=0$$

故 质点的运动规律

$$x=\frac{1}{15}(\cos t-\cos 2t)\ \mathrm{m}$$

动力学普遍方程

1.质量是 M 的滑轮可绕光滑水平轴 O 转动。滑轮上套着不可伸长的柔绳，绳的一端挂着质量是 m 的重物 C，而另一端则用刚度系数是 k 的铅直弹簧 AB 系在固定点 B。设滑轮的质量可以看成分布在轮缘，而绳与轮缘间无相对滑动。试求重物的振动周期 τ，绳和弹簧的质量都可以不计。



(a)

解一：用 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j})-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j$，拉氏方程求解。

系统具有一个自由度，取滑轮的转角 φ 为广义坐标。

系统的动能

$$T=\frac{m}{2}(r\dot{\varphi})^2+\frac{1}{2}Mr^2\dot{\varphi}^2=\frac{1}{2}(M+m)r^2\dot{\varphi}^2。\qquad (1)$$

广义力

$$Q_\varphi=\frac{\left[\sum \delta W\right]_\varphi}{\delta\varphi}=\frac{mgr\delta\varphi-k(\delta_s+r\varphi)r\delta\varphi}{\delta\varphi}=-kr^2\varphi$$

（因 $mg=k\delta_s$）。

求偏导数

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=(M+m)r^2\dot{\varphi},\qquad \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}})=(M+m)r^2\ddot{\varphi},\qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi}=0。$$

把上述各表达式代入拉氏方程 $\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}})-\frac{\partial T}{\partial \varphi}=Q_\varphi$，

得 $(M+m)r^2\ddot{\varphi}-0=-kr^2\varphi$，

即 $\ddot{\varphi}+\frac{k}{M+m}\varphi=0 \qquad (2)$

故振动周期 $\tau=2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}$。 $\qquad (3)$

解二：

因作用在系统上的主动力都是有势力，可用拉氏方程 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j})-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0$，求解。

系统的势能 $V=\frac{k}{2}(\delta_s+r\varphi)^2-mgr\varphi$

其中以静平衡位置和弹簧的原长位置分别作为重力场和弹性力场的零点位置。

拉氏函数

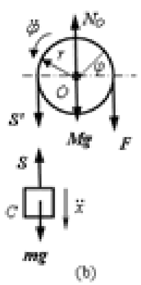
$$L=T-V=\frac{1}{2}(M+m)r^2\dot{\varphi}^2-\frac{k}{2}(\delta_s+r\varphi)^2-mgr\varphi。$$

求偏导数 $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=(M+m)r^2\dot{\varphi}$， $\frac{\partial L}{\partial \varphi}=-kr(\delta_s+r\varphi)+mgr=-kr^2\varphi$。

把上述各表达式代入拉氏方程 $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}})-\frac{\partial L}{\partial \varphi}=0$，

得 $(M+m)r^2\ddot{\varphi}+kr^2\varphi=0$

即式（2）。



(b)

解三：

分别取重物 C 和滑轮为研究对象（图 b），有

$$m\ddot{x}=mg-S,$$

$$(Mr^2)\ddot{\varphi}=(S-F)r。$$

又 $F=k(\delta_s+r\varphi)$， $\ddot{x}=r\ddot{\varphi}$。

联立解得 $Mr\ddot{\varphi}=mg-mr\ddot{\varphi}-k(\delta_s+r\varphi)=-mr\ddot{\varphi}-kr\varphi$，

化简后即式（2）。

解四：

用微分形式的动能定理 $dT=\sum d'W$

（或机械能守恒定理）求解。

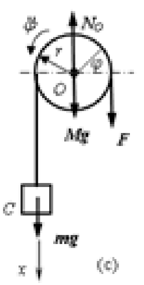
由式（1）可得 $dT=(M+m)r^2\dot{\varphi}d\dot{\varphi}$。

又 $\sum d'W=\left[mg-k(\delta_s+r\varphi)\right]r\cdot d\varphi=kr^2\varphi d\varphi$。

根据微分形式的动能定理，得

$$(M+m)r^2\dot{\varphi}d\dot{\varphi}=-kr^2\varphi d\varphi。$$

化简后即式（2）。



(c)

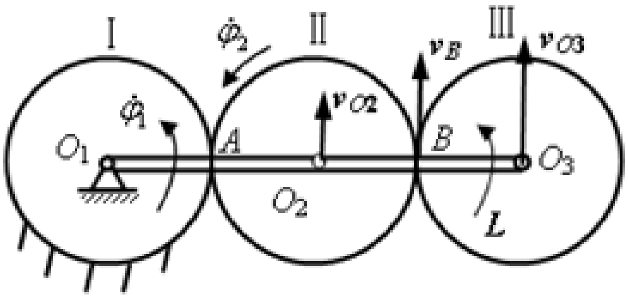
解五：

对整个系统应用动量矩定理 $\frac{dH_z}{dt}=\sum m_z(F)$ 求解（图 c），有

$$Mr^2\ddot{\varphi}+mr^2\ddot{\varphi}=\left[mg-k(\delta_s+r\varphi)\right]r=-kr^2\varphi,$$

化简即得式（2）。

2. 在行星轮机构中，以 C_1 为轴的轮 I 不动，轮 II 和 III 的轴 C_2 和 O_3 都安装在曲柄 O_1O_3 上。设各轮都是匀质的圆盘，半径都是 r，质量都是 m，整个机构在同一水平面内。如作用在曲柄 O_1O_3 上的转矩为 L，试求曲柄的角加速度。曲柄的质量不计。



解：系统是一个自由度，取曲柄的转角 φ_1 为广义坐标。轮 I 不动， 轮 II 和III轮作平动面运动。

运动分析：点 A 为轮 II 的速度瞬心，则有 $v_{O2} = r\cdot\dot{\varphi}_2 = 2r\cdot\dot{\varphi}_1$， $\dot{\varphi}_2 = 2\dot{\varphi}_1$。

$$v_B = 2r\cdot\dot{\varphi}_2，\ v_{O3} = 4r\cdot\dot{\varphi}_1 \ 。$$

所以 $v_B = v_{O3}$ ， $\dot{\varphi}_3 = 0$，轮III平动。

系统动能为

$$T_1 = 0 \quad , \quad T_2 = \frac{m}{2}(2r\dot{\varphi}_1)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\cdot(2\dot{\varphi}_1)^2, \quad T_3 = \frac{m}{2}(4r\dot{\varphi}_1)^2$$

所以 $T = T_1 + T_2 + T_3 = 11mr^2\dot{\varphi}_1^{\,2}$

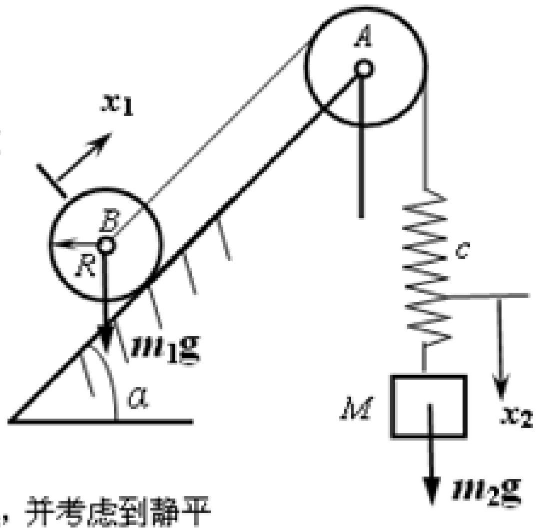
$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = 22mr^2\dot{\varphi}_1 \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) = 22mr^2\ddot{\varphi}_1$$

广义力 $$Q = \frac{\left(\sum \delta W\right)}{\delta\varphi_1}\varphi_1 = \frac{M\delta\varphi_1}{\delta\varphi_1} = M$$

代入拉氏方程 $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q$$

得 $$\varepsilon = \ddot{\varphi} = \frac{M}{22mr^2}$$

3.在图所示系统中，匀质圆柱 B 的质量 $m_1 = 2\text{kg}$，半径 R=10cm，通过绳和弹簧与质量 $m_2 = 1\text{kg}$ 的物块 M 相连，弹簧的刚度系数 $c = 2\text{N/m}$，斜面的倾角 $\alpha = 30°$。假设圆柱 B 滚动而不滑动，绳子的倾斜段与斜面平行，不计定滑轮 A、绳子和弹簧的质量，以及轴承 A 处摩擦，试求系统的运动微分方程。



解：系统具有两自由度，在初瞬时系统平衡，取这个位置为势能零点。广义坐标如图，原点均在静平衡位置。

系统的动能为

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}I_B\omega_B^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$
$$= \frac{3}{4}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

取静平衡位置为势能零点，设弹簧静变形为 λ_s，并考虑到静平衡时，$m_1 g\sin\alpha = c\lambda_s$，$m_2 g = c\lambda_s$，

$$V = m_1 g\sin\alpha\cdot x_1 - m_2 g x_2 + \frac{c}{2}\left[(x_2 - x_1 + \lambda_s)^2 - \lambda_s^2\right]$$
$$= \frac{c}{2}(x_2 - x_1)^2$$
$$L = T - V = \frac{3}{4}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{c}{2}(x_2 - x_1)^2$$

代入 $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

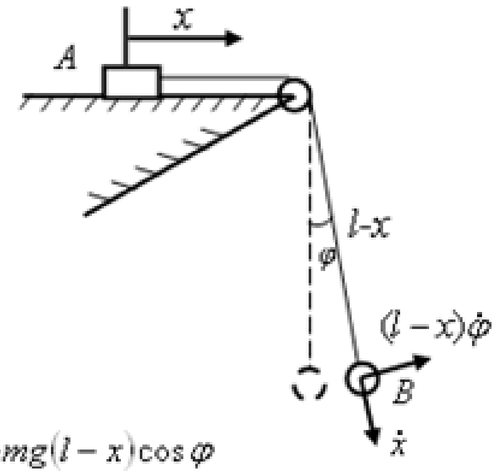
则得 $$\frac{3}{2}m_1\ddot{x}_1 - c(x_2 - x_1) = 0$$
$$m_2\ddot{x}_2 + c(x_2 - x_1) = 0$$

代入数值得

$$3\ddot{x}_1 + 200x_1 - 200x_2 = 0$$

$$\ddot{x}_2 - 200x_1 + 200x_2 = 0$$

4.滑块 A 和小球 B 的重量都是 $\boldsymbol{P}$，系于绳子两端，绳长 l。滑块 A 放在光滑的水平面上，绳子跨过大小不计的定滑轮。用手托住小球，并使其偏离铅直位置一微小角度，然后放手，求系统的运动微分方程。



解：取系统为研究对象，系统为二自由度，取物 A 的水平位移 x 和单摆 B 的摆角 θ 为广义坐标，系统的动能为

$$T = T_A + T_B = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2 + (l-x)^2\dot{\varphi}^2\right]$$

$$= m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(l-x)^2\dot{\varphi}^2$$

以 A 处水平位置为势能零点，则系统势能为 $V = -mg(l-x)\cos\varphi$

$$L = T - V = m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(l-x)^2\dot{\varphi}^2 + mg(l-x)\cos\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2m\dot{x} \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 2m\ddot{x}， \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = -m(l-x)\dot{\varphi}^2 - mg\cos\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = m(l-x)^2\phi^2， \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \phi}\right) = m(l-x)^2\ddot{\phi} - 2m(l-x)\dot{x}\dot{\phi}$$

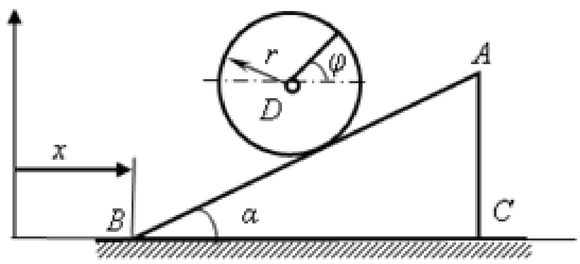
$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mg(l-x)\sin\varphi$$

代入 $\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$

得 $\quad 2\ddot{x} + (l-x)\dot{\varphi}^2 + g\cos\varphi = 0$

$$(l-x)\ddot{\varphi} - 2\dot{x}\varphi + g\sin\varphi = 0$$

5.三棱柱 ABC 的质量是 m_1，可沿光滑的固定水平面滑动。匀质圆柱的质量是 m_2、半径是 r，相对于水平面成 α 角的斜面 AB 纯滚动。已知系统从静止释放。试求三棱柱的加速度度 a_1 以及圆柱中心 D 相对于三棱柱的加速度 a_r。



解：选取广义坐标为 x 和 φ。

$$T=\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_2v_D^2+\frac{1}{2}I_D\dot{\phi}^2$$

$$=\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_2\left[\dot{x}^2+r^2\dot{\phi}^2-2r\dot{x}\dot{\phi}\cos\alpha\right]+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m_2r^2\dot{\phi}^2$$

$$=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2+\frac{3}{4}m_2r^2\dot{\phi}^2-m_2\dot{x}r\dot{\phi}\cos\alpha$$

选取系统静止时圆柱中心 D 为势能零点位置， $V=-m_2gr\varphi\cos\alpha$

$$L=T-V=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2+\frac{3}{4}m_2r^2\dot{\phi}^2-m_2\dot{x}r\dot{\phi}\cos\alpha+m_2gr\varphi\cos\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=(m_1+m_2)\dot{x}-m_2r\dot{\phi}\cos\alpha\quad,\qquad\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)=(m_1+m_2)\ddot{x}-m_2r\ddot{\phi}\cos\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}=\frac{3}{2}m_2r^2\dot{\phi}-m_2\dot{x}r\cos\alpha,\qquad\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}\right)=\frac{3}{2}m_2r^2\ddot{\phi}-m_2\ddot{x}r\cos\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi}=m_2gr\sin\alpha$$

代入 $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0\quad,\qquad\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0$$

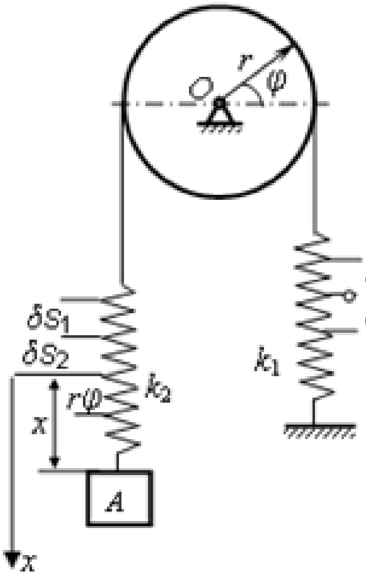
得 $$(m_1+m_2)\ddot{x}-m_2r\ddot{\phi}\cos\alpha=0$$

$$\frac{3}{2}m_2r^2\ddot{\phi}-m_2\ddot{x}r\cos\alpha-m_2gr\sin\alpha=0$$

求得 $$a_1=\frac{m_2\sin2\alpha}{3(m_1+m_2)-2m_2\cos^2\alpha}g$$

$$a_r=\frac{2(m_1+m_2)\sin\alpha}{3(m_1+m_2)-2m_2\cos^2\alpha}g$$

6.滑轮、质量和弹簧组成的系统如图所示。物块 A 的质量是 m，滑轮的半径是 r、对轴 O 的转动惯量是 I_O，两弹簧的弹簧系数分别是 k_1和 k_2。不计绳的质量，在运动过程中绳与滑轮无相对滑动，两弹簧都是铅直的。试列出此系统的微分方程。



解：取系统为研究对象，系统为二自由度。取物 A 的铅直位移 x 和滑轮 O 的转角 φ 为广义坐标，系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}I_o\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

取弹簧无变形位置为弹簧势能零点，取静平衡点 C 为重力势能零点。

$$V=\frac{k_1}{2}\left[(r\varphi+\delta_{s1})^2-0\right]+\frac{k_2}{2}\left[(x-r\varphi+\delta_{s2})^2\right]-mgx$$

$$V=\frac{k_1}{2}\left(r^2\varphi^2+\delta_{s1}^2\right)+\frac{k_2}{2}\left(x^2+r^2\varphi^2-2xr\varphi+2x\delta_{s2}\right)-mgx$$

静平衡时有 $k_1\delta_{s1}=k_2\delta_{s2}=mg$

$$L=T-V$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=m\dot{x}\quad,\qquad\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)=m\ddot{x},\qquad\frac{\partial L}{\partial x}=-k_2x+k_2r\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=I_o\varphi\quad,\qquad\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right)=I_o\ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi}=-(k_1+k_2)r^2\varphi+k_2rx$$

代入拉氏方程得 $m\ddot{x}+k_2x-k_2r\varphi=0$

$$I_o\ddot{\varphi}-k_2rx+(k_1+k_2)r^2\varphi=0$$