

摘要

由于数控机床的发展,非圆齿轮的加工成本大大下降,现已广泛应用于机床,自动化设备,印刷机,纺织机械,仪器及解算装置中,作为自动进给机构或用于实现函数关系,或用来改善运动和动力性能^[34],同时还出现了诸如非圆齿轮行星轮系低速大扭矩液压马达等不同于一般非圆齿轮的系统。然而,随着这些机械工作条件日益向高速、重载发展,使得非圆齿轮的动态特性日益凸显,并直接影响到整个设备能否正常、高效的运行。这就使得对于非圆齿轮系统的动态特性的研究成为一个十分紧迫和意义重大的课题。

目前对于圆齿轮的动力学问题,国内外已经有了相对成熟的研究结果^[1-32],建立了包括齿轮啮合动态激励基本原理、齿轮振动分析模型、齿轮系统参数振动学^[35]、齿轮系统间隙非线性动力学^[1]等较为成熟的系统理和方法。对于斜齿轮等特殊的圆齿轮的动力学问题的研究也以有了不小的进展^[39]。而对于椭圆齿轮的动态特性的研究却仍然处于空白阶段。由于椭圆齿轮本身固有的质量偏心,其在传动过程中所产生的震动要比圆齿轮强烈得多。圆齿轮的内部激励主要是时变啮合刚度、轮齿传递误差、啮入啮出冲击等。而椭圆齿轮的内部激励除开上述因素,还有因为偏心质量而导致的离心力和因转速变化导致的惯性力所产生的振动。椭圆齿轮与圆齿轮的另一本质区别就是在传动过程中其轮齿啮合的法线方向是不断变化的,这使得椭圆齿轮传动时,其啮合力具有本质的动态特征。

对于具有质量偏心的回转系统,相对于目前的其他各种建模方法,拉格朗日键合图方法具有其特殊的优势,能方便的建立系统的模型。因此,本文采用此方法建立了非圆齿轮系统的动力学模型,并使用 Simulink/Matlab 对椭圆齿轮的啮合情况进行了仿真分析,并进行了试验测试,为研究非圆齿轮系统动力学作了一些初步的探索。

关键词: 椭圆齿轮 动力学模型 键合图

ABSTRACT

As the development of numerical controlled machine tools, the casts of non-circular gears' manufactory is becoming less and less. Today, non-circular gears are wildly used in machine tools, auto machines, presswork machines and spin machines. These gears were help to auto control machines and to provide functioned movement. As these machine's work condition is steadily become high-speeded and heavy loaded, the dynamic characteristic of the non-circular gears in these machines is becoming more and more important. It determines the performance of the entire machine system. In this case, the study of dynamic characteristics of non-circular gears has become a essential problem in design and maintenance of these machines.

As now, we got mature conclusions in the research area of dynamic characteristics of circular gears. We have established an entire system, which was compounded by several subfields, to solve the problems of this kind. And in addition, we have also got progress in researching bevel wheels. But, the study of dynamic characteristics of non-circular gears is still a blank. In most case, non-circular gears have eccentricity, it makes much more vibration compare to circular gear pairs. Forces inspirited non-circular gears are completely different from the forces inspirited circular gears. The main force inspirited non-circular gears are eccentricity force bring up by the eccentricity of the gear itself. This makes the non-circular gears' vibration inherent and natural.

This paper setup a method of modeling non-circular gears based on the Lagrange Bond-graph theory. And established a dynamic mode of a pair of non-circular gears. The simulation part of this paper is done by Simulink/Matlab software. Experiments and tests are also done to validate the conclusions of the simulations part.

Key Words: ellipse gears dynamic model bond graph

原创性声明

本人声明，所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了论文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得中南大学或其他单位的学位或证书而使用过的材料。与我共同工作的同志对本研究所作的贡献均已在论文中作了明确的说明。

作者签名：马强 日期：2006年4月25日

关于学位论文使用授权说明

本人了解中南大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留学位论文，允许学位论文被查阅和借阅；学校可以公布学位论文的全部或部分内容，可以采用复印、缩印或其它手段保存学位论文；学校可根据国家或湖南省有关部门规定送交学位论文。

作者签名：马强 导师签名：马强 日期：06年4月25日

第一章 概述

1.1 齿轮动力学的发展简介

齿轮系统动力学是研究齿轮系统在传递动力和运动过程中动力学行为的一门科学，齿轮系统包括齿轮副、传动轴、支承轴承和箱体，也可以包括与齿轮传动有关的联轴器、飞轮、原动机和负载等。齿轮系统种零部件结构及相互连接关系是一个复杂的弹性机械系统。

齿轮系统的动力学行为包括轮齿动态啮合力和动载系数，以及齿轮系统的振动和噪声特性等。通过齿轮系统动力学的研究，可以了解齿轮系统结构形式、几何参数、加工方法等对这些动力学行为的影响，从而指导高质量齿轮系统的设计与制造。齿轮系统中动力和运动是通过轮齿共轭齿面间连续的相互作用而传递的，因此齿轮副啮合传动问题就是其核心问题之一。

齿轮系统是各种机器和机械设备中应用最广的动力传递装置，随着近代机械日趋高速、重载，其力学行为和工作性能对整个机器有重要影响。因此，齿轮系统动力学问题近百年以来一直受到人们的广泛关注，并对此问题进行了大量深入的分析研究，取得了相当的进展,已经形成了一个比较完整的理论体系，如图 1-1 所示^[1,2]。

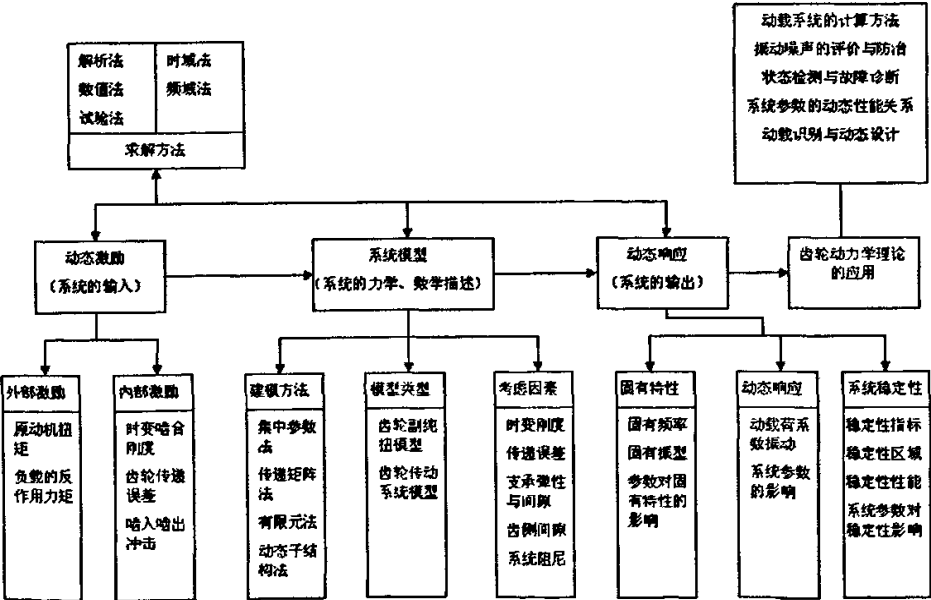


图 1-1

齿轮动力学的发展是从研究齿轮动载荷开始的。1868 年, H.Walker 首先提出了动载系数的定义。到 20 世纪 30 年代, E.Buckingham^[3]公布了 ASME 一个研究小组的结果, 提出了齿轮动载的计算公式, 考虑了有效质量、有效误差和速度的影响。其中一些公式经修正还沿用至今。50 年代以前, 主要以啮合冲击作为描述和解释齿轮动态激励的基础, 将齿轮简化为单自由度系统。以冲击下的单自由度系统的动态响应来表达齿轮系统的动力学行为。50 年代以后, 将齿轮系统作为弹性的机械系统, 以振动理论为基础, 分析在啮合刚度、传递误差和啮合冲击作用下, 系统的动力学行为。这一发展奠定了现代齿轮系统的动力学的基础。

齿轮系统动力学在振动理论的框架内, 经历了由线性振动理论向非线性振动理论的发展(时变刚度、齿侧间隙、啮合误差等)。在线性振动理论范畴内, 人们以平均啮合刚度代替时变啮合刚度, 并由此计算齿轮副的固有频率和振型, 利用数值积分方法计算系统的动态响应, 不考虑因时变刚度引起的动态稳定问题, 且避免研究由齿侧间隙引起的非线性及多对齿轮副、齿轮副与支承轴承、轴承间隙等时变刚度间的相互关系、相互作用对系统动态特性的影响。齿轮系统的非线性振动理论, 在考虑了啮合刚度的时变性、齿侧间隙、齿轮啮合误差等非线性因素的情况下, 将齿轮系统作为一种非线性的参数振动系统研究其基本理论、基本方法和基本性质。从而由振动理论的基本概念出发, 将啮合齿轮抽象为时变的弹性元件, 统一描述和研究齿轮啮合中刚度的时变激励、误差的周期性激励和啮入啮出期间的冲击瞬态性激励, 并将这种弹性元件作为整个齿轮系统的一个组成部分, 可以在一个完整的弹性机械系统中来考察激励、系统、相应间的作用和相互影响, 从激励和系统的统一性出发研究系统参数与结构的优化选择与配置。齿轮系统动力学的研究对象也经历了由一对齿轮组成的简单系统向同时包含齿轮、传动轴、轴承和箱体结构的复杂系统过渡。将整个齿轮系统作为分析对象, 可以全面研究齿轮系统的动态性能, 齿轮啮合过程以及系统其他零件对啮合过程动态激励的影响, 还可以研究动态激励在系统中的传递特性和传递路线, 同时可以研究齿轮动态啮合力、轴承支承反力、齿轮、传动轴和箱体的振动特性以及系统振动噪声的产生、传播与辐射。

齿轮动力学的基本问题是求激励系统特性和响应三者之间的关系。齿轮系统的激励分为内部激励和外部激励, 外部激励是系统外部对其的作用, 主要是指原动机的主动力矩和负载的阻力矩。内部激励是由齿轮副的齿轮啮合过程产生的, 内部激励问题是齿轮系统动力学研究的重点之一, 包括刚度激励、误差激励和啮合冲击激励。刚度激励是因啮合轮齿对数的变化导致啮合综合刚度随着时间周期变化而引起齿轮轮齿啮合力周期变化, 它是一种参数激励。其力学效应使齿轮系

统处于参数振动状态。这样即使在外载荷为零或常量的情况下,系统也会因刚度激励而产生振动。由于齿轮加工、安装误差引起的齿廓表面相对于理想齿廓位置的偏移是齿轮系统的误差激励。误差激励是啮合轮齿间的一种周期性位移激励。研究误差激励对于系统的影响、了解各种轮齿加工误差与系统动态特性的关系,可以为齿轮设计中精度等级的确定和加工方法的选择提供指导

此外,由于轮齿受载变形和加工误差,轮齿进入和推出啮合时,齿面之间会产生冲击,引起啮合冲击激励。这种激励的不同之处在于它是一种周期性的载荷激励。

随着人们对传动性能的要求不断提高,齿轮动力学越来越广泛地受到学者的重视。从目前的齿轮啮合方面的文献资料来看,齿轮动力学研究的主要方向是:

一. 系统的动态响应、动力稳定性

在动态激励作用下齿轮系统的动态相应是齿轮系统动力学的重要研究内容^[4-15],主要包括齿轮动态啮合力,齿轮激励在系统中的传递,传动系统中各个零件的动态响应以及箱体结构的动态响应。研究齿轮的动态力,可以了解系统动态激励产生的机理、大小和性质,确定齿轮的动载荷和动载系数,对齿轮强度和可靠性设计具有重要意义;研究动态激励的传递与零件的动态响应,目的在于通过研究系统设计与时间响应间的关系,进行结构修改,减少动态激励的传递,降低系统中各零件的振动,减小支承的受载,提高系统的工作寿命,并降低箱体结构的振动和噪声。齿轮系统是一种参数激励系统,与一般的振动系统的重要区别在于它具有动力稳定问题。通过齿轮系统的参数激励动力稳定性分析,确定影响稳定性的因素等,为齿轮系统的设计提供指导。

二. 振动和噪声的控制

齿轮降噪是传动动力学的重要课题^[4,16-25]。齿轮传动产生振动和噪声的原因除了齿轮的时变啮合刚度之外,另一个主要原因是齿轮的啮入啮出冲击和节圆冲击。齿轮系统动力学的研究,即从动态激励、系统设计、响应特性三方面全面研究齿轮的振动和噪声的机理、性质、特点和影响因素,采取相应的措施降低齿轮系统的振动和噪声,是齿轮系统动力学的重要应用领域之一。在这方面人们已经进行了卓有成效的工作。

三. 状态监测和故障诊断

齿轮系统作为机器设备的动力和运动传递系统^[29-32],其工作状态对整个机器设备的运行会有重要影响,齿轮系统故障可能产生严重后果,因此,该系统的状

态监测和故障诊断非常重要。其中,系统振动信号和噪声信号的测试和分析是一种主要的监测和诊断手段。因此,开展系统振动和噪声产生机理的研究有助于采用更可靠,更有效的状态监控和故障诊断方法。

1. 2 非圆齿轮传动简介

非圆齿轮作为一种比较特殊的齿轮传动方式^[33,34,45-53],广泛应用于各种自动机械、仪器及解算装置中。

非圆齿轮的机构的传动关系,可用主动构件和从动构件回转角间的非线性关系来表示。因此,这种机构可以用来传递变速比运动。

根据非圆齿轮的使用特点,可以列出非圆齿轮应用在机器中的情况:

1. 为了使机器的工作机构和控制机构具有变速运动;
2. 为了协调平行工作的机构的循环时间;
3. 用非圆齿轮带动铰链机构的主动构件,使铰链机构的运动特性具有所需要的形式。

机器中通常所使用的非圆齿轮,其节曲线形状有椭圆形、卵形和相对于回转中心有一定偏心矩的圆形等集中形状。其具体形状由给定的传动比变化规律来确定。

1. 2. 1 非圆齿轮的啮合原理简介

平面啮合用于传递两平行轴之间的运动。一般情况下,传动比是变化的,这就是非圆齿轮传动;特殊情况下,传动比是常量,这就是圆齿轮传动。

齿轮的节曲线是齿轮传动时的滚动曲线。齿轮传动时,两个相滚动曲线接触点上的相对速度为零,瞬接触点就是两齿轮的瞬时回转中心。因此,齿轮的节曲线就是瞬心线。

当一对非圆齿轮传动时,若主动轮转过 ϕ_1 角时,从动轮转过 ϕ_2 角,则转角关系可以表示为:

$$\phi_2 = F(\phi_1) \quad (1-1)$$

式(1-1)就是非圆齿轮传动的位置函数。

若主动轮的瞬时角速度为 ω_1 ,从动轮的瞬时角速度为 ω_2 ,则瞬时角速度比为:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d\phi_1}{dt} : \frac{d\phi_2}{dt} = \frac{d\phi_1}{d\phi_2} = \frac{1}{F'(\phi_1)} \quad (1-2)$$

式中 $F'(\phi_1)$ 是 $F(\phi_1)$ 对 ϕ_1 的一阶导函数。

同理可得:

$$i_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = F'(\phi_1) \quad (1-3)$$

$F'(\phi_1)$ 称为瞬时传动比函数, 简称传动比函数。传动比函数得自变量为主动轮的转角 ϕ_1 。

非圆齿轮传动时的位置函数 $\phi_2 = F(\phi_1)$ 和传动比函数 $F'(\phi_1)$ 都可以代表非圆齿轮副的几何特性。这是因为非圆齿轮副中的主动齿轮, 无论其运动规律在时间上怎样变化, 都不会影响这两种函数的特性。

1. 2. 2 椭圆齿轮的传动特性

椭圆齿轮是非圆齿轮中最常见的一种。当两个相同的椭圆齿轮传动时, 随着椭圆偏心率的不同, 可得到不同的传动比变化曲线。以完成各种机构的变速运动, 或作为速度和加速度调节之用。

椭圆齿轮的回转中心在其上的一个焦点上。当主动齿轮转过 ϕ_1 角时, 从动轮转过 ϕ_2 角。这时, 从动齿轮的向径 R_1 与从动轮向径 R_2 之和应等于两轮的中心距 A , 即:

$$R_1 + R_2 = A \quad (1-4)$$

当以回转中心 F_1 为原点, F_1M 方向为级轴时, 则主动椭圆齿轮的节曲线方程式为:

$$R_1 = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\phi_1} \quad (1-5)$$

式中 ϕ_1 ——向径 R_1 的极角

a ——椭圆的长半轴

e ——椭圆的偏心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

c ——椭圆对称中心到焦点的距离

b ——椭圆的短半轴

因 $R_1 + R_2 = 2a$, 得:

$$R_2 = 2a - R_1 = \frac{a(1+2e\cos\phi_1+e^2)}{1+e\cos\phi_1} \quad (1-6)$$

由式 (1-5) 和式 (1-6) 可得两齿轮的传动比函数 $i_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_2}$ 为:

$$i_{21} = \frac{1-e^2}{1+2e\cos\phi_1+e^2} \quad (1-7)$$

由此可得椭圆齿轮的位置函数为：

$$\phi_2 = \int_0^{\phi_1} i_{21} d\phi_1 \quad (1-8)$$

积分后得：

$$\operatorname{tg} \frac{\phi_2}{2} = \frac{1-e}{1+e} \operatorname{tg} \frac{\phi_1}{2} \quad (1-9)$$

若主动齿轮以等角速度 ω_1 回转，从动齿轮的瞬时角速度为：

$$\frac{d\phi_2}{dt} = \omega_1 \frac{R_1}{R_2} = \omega_1 \frac{1-e^2}{1+2e\cos\phi_1+e^2} \quad (1-10)$$

当 $\phi_1=0$ 时，从动轮具有最小角速度

$$\frac{d\phi_2}{dt}(\min) = \omega_1 \frac{a-c}{a+c} \quad (1-11)$$

当 $\phi_1=180^\circ$ 时，从动轮具有最大角速度

$$\frac{d\phi_2}{dt}(\max) = \omega_1 \frac{a+c}{a-c} \quad (1-12)$$

1.3 本文的研究内容及其意义

从前面的分析可以看出，对于圆齿轮系统的动力学问题，目前已经形成了成熟、完整的理论体系，可以较好地解决工程实践中遇到的一般问题。但是对于非圆齿轮系统的动力学问题，还未见有深入的探索。而在工程实践中，随着非圆齿轮的应用日趋广泛，这类齿轮的动力学问题日益凸现出来。

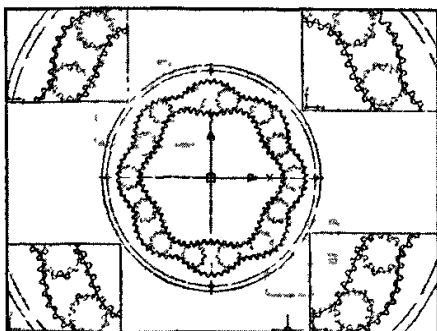


图 1-2 非圆齿轮行星轮

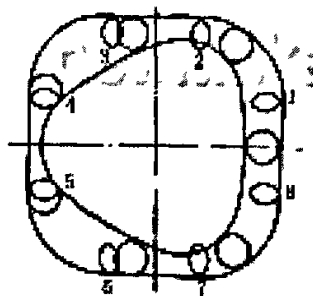


图 1-3 非圆液压马达节曲线

为了提出一种可行的理论方法和研究工具来分析这些问题，本文做出了如下

内容的研究:

1、对几种比较复杂的, 对非圆齿轮系统具有一定参考价值的圆齿轮模型进行分析, 并建立其相应的模型。

2、在拉格朗日键合图的基础上, 针对平面旋转系统进行了拓展, 并由此提出了一种建立非圆齿轮系统动力学模型的思路和方法。

3、针对一对啮合的椭圆齿轮, 通过运动学和力学分析, 使用该方法建立了其动力学模型。并通过数学变型, 使它能方便的由计算机进行仿真模拟和分析。

4、通过实验测试数据与仿真数据的对比, 说明了本文提出方法的正确性。

研究意义:

随着非圆齿轮和非圆行星轮(Non-circular planetary gear)等非常规齿轮的应用, 非圆齿轮的动力学问题开始引起人们的关注。对于相对于目前比较成熟的圆齿轮动力学研究, 非圆齿轮动力学研究的相关学术论文至今还未见发表。本文针对这一空白领域进行了尝试和探索, 并取得了一些有意义的结论。因此, 本文的研究内容对于非圆齿轮或其他非圆传动方式的动力学研究具有指导意义。

此外, 本文有关椭圆齿轮振动仿真和分析的部分为椭圆齿轮的振动分析提供了一种工具, 这一工具对椭圆齿轮的设计制造和使用维护都不无裨益, 具有的一定工程意义。

第二章 相关圆齿轮系统振动模型

目前,对于椭圆齿轮的研究,主要集中在设计参数、加工工艺等问题^[33,34,45-53]的研究,并未发现针对非圆齿轮进行动力学研究论文。这就使得本文对于这一问题的研究,必须以目前相对成熟的圆齿轮动力学分析为基础。

本章对常见的几种圆齿轮动力学模型分析进行了介绍,从简单到复杂的四种模型,这些模型的建立,为研究非圆齿轮动力学建模提供了思路和方法。

2.1 圆齿轮副扭转振动分析模型

扭转型分析模型是仅考虑系统扭转振动的模型,在齿轮系统的振动分析中,若不需考虑传动轴的横向和轴向变形以及支承系统的弹性变形,则可将系统简化成纯扭转的振动系统,相应的分析模型称为扭转分析模型。此外,由于不存在扭转角位移自由度与横向线位移或轴向线位移自由度间的耦合关系,因此这种模型是一种非耦合的模型。

在不考虑传动轴、支承轴承和箱体等的弹性变形时,圆柱齿轮系统可以简化为齿轮副的扭转系统,典型的一对齿轮副的扭转振动动力学模型如图 2-1 所示:

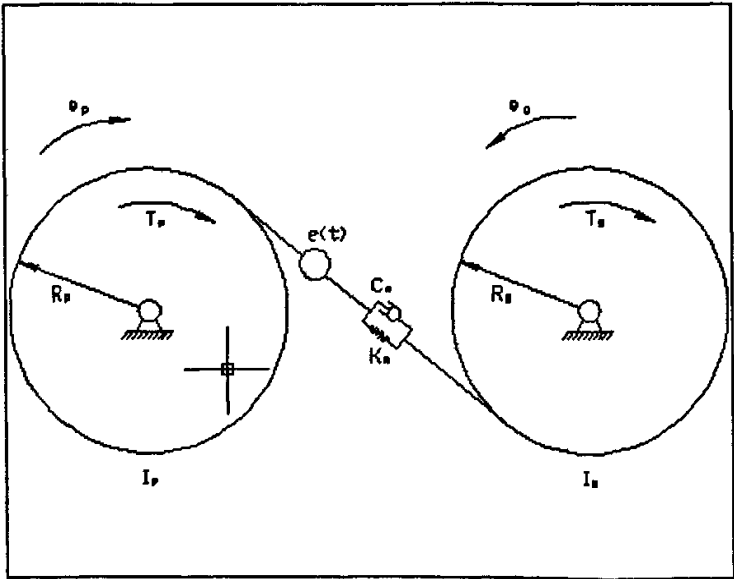


图 2-1 圆齿轮副扭转振动分析模型

设齿轮副的重合度在 1-2 之间,则由图可推得,一对齿轮副的扭转振动分析

模型为了:

$$I_p \ddot{\theta}_p + R_p c_m (R_p \dot{\theta}_p - R_g \dot{\theta}_g) - R_p c_1 \dot{e}_1 - R_p c_2 \dot{e}_2 + R_p k_m (R_p \theta_p - R_g \theta_g) - R_p k_1 e_1 - R_p k_2 e_2 = T_p \quad (2.1)$$

$$I_g \ddot{\theta}_g + R_g c_m (R_g \dot{\theta}_g - R_p \dot{\theta}_p) - R_g c_1 \dot{e}_1 - R_g c_2 \dot{e}_2 + R_g k_m (R_g \theta_g - R_p \theta_p) + R_g k_1 e_1 + R_g k_2 e_2 = -T_g \quad (2.2)$$

式中, $\theta_i (i=p, g)$ 为主、被动齿轮的扭转振动位移; $\dot{\theta}_i, \ddot{\theta}_i (i=p, g)$ 为主、被动齿轮的扭转振动速度和加速度; $I_i (i=p, g)$ 为主、被动车轮的转动惯量; $R_i (i=p, g)$ 为主、被动齿轮的基圆半径; $k_i (i=1, 2)$ 为第 i 对轮齿的综合刚度; $c_i (i=1, 2)$ 为第 i 对轮齿的阻尼系数; k_m 为齿轮副的啮合综合刚度; c_m 为齿轮副的啮合阻尼; $e_i (i=1, 2)$ 为第 i 对轮齿的误差; $T_i (i=1, 2)$ 为作用在主、被动齿轮上的外载荷力矩。

设定义啮合线上两齿轮的相对位移 x 为:

$$x = R_p \theta_p - R_g \theta_g \quad (2.3)$$

从而由式(2.1)和式(2.2)可以表示为:

$$m_e \ddot{x} + c_m \dot{x} + k_m x = W \quad (2.4)$$

$$m_e = \frac{I_p I_g}{(I_p R_g^2 + I_g R_p^2)} \quad (2.5)$$

$$W = W_0 + c_1 \dot{e}_1 + c_2 \dot{e}_2 + k_1 e_1 + k_2 e_2 \quad (2.6)$$

$$W_0 = \frac{T_p}{R_p} = \frac{T_g}{R_g} \quad (2.7)$$

式中, m_e 为等效质量; W 为等效载荷。由式(2.4), 略去动态项(惯性力项和阻尼力项), 则可以得到静传递误差为:

$$x_s = \frac{W_0}{k_m} + \frac{(k_1 e_1 + k_2 e_2)}{k_m} \quad (2.8)$$

而轮齿之间的动态啮合力 W_d 可以表示为:

$$W_d = c_m \dot{x} - c_1 \dot{e}_1 - c_2 \dot{e}_2 + k_m x - k_1 e_1 - k_2 e_2 \quad (2.9)$$

2.2 圆齿轮系统啮合耦合振动分析模型

在不考虑摩擦的情况下, 典型直齿圆柱齿轮副的啮合耦合型动力学模型如图 2-2 所示。由于不考虑传动轴等的具体振动形式, 因此可以将传动轴、轴承和箱体等的支承刚度和阻尼等效为 k_{xp} 、 k_{xg} 和 c_{xp} 、 c_{xg} 来表示。

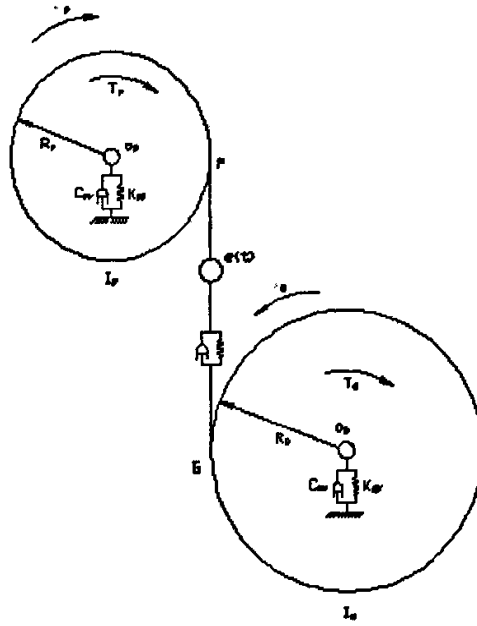


图 2-2 圆齿轮系统啮合耦合振动分析模型

可以看出，这时的动力学模型是一个二维平面振动系统，由于不考虑齿面摩擦，齿轮的动态耦合力沿啮合线方向作用，因此模型具有 4 个自由度，分别为主、被动齿轮绕旋转中心转动自由度和 y 方向的平移自由度。设这 4 个自由度的振动位移分别为 θ_1 、 θ_2 和 y_1 、 y_2 ，则系统的广义位移阵列可以表示为：

$$\{\delta\} = \{y_p \quad \theta_p \quad y_g \quad \theta_g\} \quad (2.10)$$

这样，若主、被动齿轮的啮合点位移方向分别为 $\bar{y}_p$ 、 $\bar{y}_g$ ，则它们与系统振动位移间的关系可以表示为：

$$\bar{y}_p = y_p + R_p \theta_p \quad (2.11)$$

$$\bar{y}_g = y_g - R_g \theta_g \quad (2.12)$$

式中， R_p, R_g 分别为主、被动轮的基圆半径。

而啮合轮齿间的弹性啮合力 F_k 和粘性啮合力 F_c 则可分别表示为：

$$\begin{aligned} F_k &= k_m (\bar{y}_p - \bar{y}_g - e) \\ &= k_m (y_p + R_p \theta_p - y_g + R_g \theta_g - e) \end{aligned} \quad (2.13)$$

和

$$\begin{aligned}
F_c &= c_m(\dot{y}_p - \dot{y}_g - \dot{e}) \\
&= c_m(\dot{y}_p + R_p\dot{\theta}_p - \dot{y}_g + R_g\dot{\theta}_g - \dot{e})
\end{aligned} \tag{2.14}$$

式中, k_m 、 c_m 分别为齿轮副啮合综合刚度和综合阻尼。

因此作用在主、被动齿轮上的轮齿动态啮合力 F_p 和 F_g 分别为:

$$F_p = F_k + F_c \tag{2.15}$$

$$F_g = -F_p = -(F_k + F_c) \tag{2.16}$$

由上述各式可以看出, 转动自由度和平动自由度分别耦合在弹性啮合力方程和粘性啮合力方程中, 这种现象称为具有弹性耦合和粘性耦合, 而且由于这种耦合是由齿轮的相互啮合引起的, 使得齿轮的扭转振动与平移振动相互的影响, 因此又称为耦合型弯-扭耦合, 此外, 在一般情况下, 由于阻尼力的影响较小, 分析中常常略去啮合耦合型振动中的粘性耦合。

根据上述分析, 可推得系统的分析模型为:

$$m_p \ddot{y}_p + c_{py} \dot{y}_p + k_{py} y_p = -F_p \tag{2.17}$$

$$I_p \ddot{\theta}_p = -F_p R_p - T_p \tag{2.18}$$

$$m_g \ddot{y}_g + c_{gy} \dot{y}_g + k_{gy} y_g = -F_g = F_p \tag{2.19}$$

$$I_g \ddot{\theta}_g = -F_g R_g - T_g = F_p R_g - T_p \tag{2.20}$$

因此

$$\begin{aligned}
m_p \ddot{y}_p + c_{py} \dot{y}_p + k_{py} y_p &= -c_m(\dot{y}_p + R_p\dot{\theta}_p - \dot{y}_g + R_g\dot{\theta}_g - \dot{e}) \\
&\quad - k_m(y_p + R_p\theta_p - y_g + R_g\theta_g - e)
\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}
I_p \ddot{\theta}_p &= -[c_m(\dot{y}_p + R_p\dot{\theta}_p - \dot{y}_g + R_g\dot{\theta}_g - \dot{e}) \\
&\quad + k_m(y_p + R_p\theta_p - y_g + R_g\theta_g - e)]R_p - T_p
\end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}
m_g \ddot{y}_g + c_{gy} \dot{y}_g + k_{gy} y_g &= c_m(\dot{y}_p + R_p\dot{\theta}_p - \dot{y}_g + R_g\dot{\theta}_g - \dot{e}) \\
&\quad + k_m(y_p + R_p\theta_p - y_g + R_g\theta_g - e)
\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}
I_g \ddot{\theta}_g &= [c_m(\dot{y}_p + R_p\dot{\theta}_p - \dot{y}_g + R_g\dot{\theta}_g - \dot{e}) \\
&\quad + k_m(y_p + R_p\theta_p - y_g + R_g\theta_g - e)]R_g - T_p
\end{aligned} \tag{2.24}$$

式中, $m_i, I_i (i = p, g)$ 为主、被动齿轮的质量和转动惯量; c_{py}, c_{gy} 为主、被动齿轮平移振动阻尼系数; k_{py}, k_{gy} 为主、被动齿轮平移振动的刚度系数。

方程的矩阵形式为:

$$[m]\{\ddot{\delta}\} + [c]\{\dot{\delta}\} + [k]\{\delta\} = \{p\} \tag{2.25}$$

$$[m] = \begin{bmatrix} m_p & & & \\ & I_p & & \\ & & m_g & \\ & & & I_g \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$[m] = \begin{bmatrix} c_{py} + c_m & c_m R_p & -c_m & c_m R_g \\ c_m R_m & c_m R_p^2 & -c_m R_p & c_m R_g R_p \\ -c_m & -c_m R_p & c_m + c_{gy} & -c_m R_g \\ -c_m R_g & -c_m R_p R_g & c_m R_g & -c_m R_g^2 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{py} + k_m & k_m R_p & -k_m & k_m R_g \\ k_m R_p & k_m R_p^2 & -k_m R_p & k_m R_g R_p \\ -k_m & -k_m R_p & k_m + k_{gy} & -k_m R_g \\ -k_m R_g & -k_m R_g R_p & k_m R_g & -k_m R_g^2 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

$$\{p\} = \begin{bmatrix} c_m \dot{e} + k_m e \\ c_m \dot{e} R_p + k_m e R_p - T_p \\ -c_m \dot{e} - k_m e \\ -c_m \dot{e} R_g - k_m e R_g - T_g \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

2.3 具有质量偏心的圆齿轮副分析模型

在圆齿轮的动力学模型之中,最接近非圆齿轮的模型就是齿轮副具有质量偏心的动力学模型。若齿轮副具有质量偏心,则在齿轮系统的弯-扭耦合振动分析中,会产生有质量偏心所引起的离心力和惯性力。其具体模型分析如下:

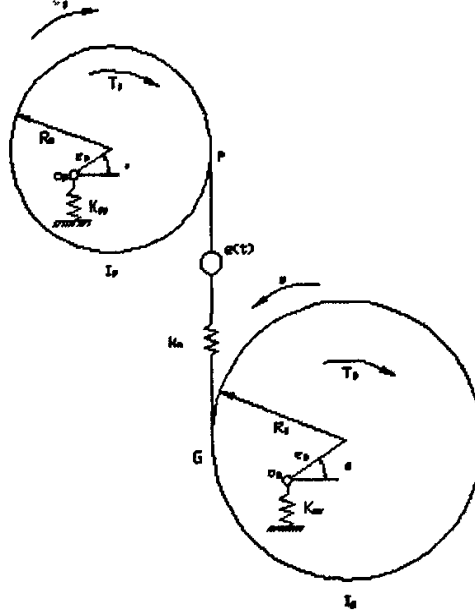


图 2-3 具有质量偏心的圆齿轮副分析模型

某一级齿轮传动系统可简化为图 2-3 所示的力学模型。不考虑齿面摩擦的情况，该系统是一个 4 自由度的弯-扭耦合振动系统。这 4 个自由度分别为主、被动齿轮沿啮合线方向(y 方向)的平移振动和绕旋转轴线的扭转振动，其广义位移阵列可表示为：

$$\{\delta\} = \{y_p \quad \theta_p \quad y_g \quad \theta_g\} \quad (2.30)$$

这样，啮合线与主、被动齿轮的切点 P 和 G 的 y 方向位移 $\bar{y}_p, \bar{y}_g$ 表示为：

$$\bar{y}_p = y_p - e_p \sin \theta_1 - R_p \theta_1 \quad (2.31)$$

$$\bar{y}_g = y_g - e_g \sin \theta_2 - R_g \theta_2 \quad (2.32)$$

$$\theta_1 = \omega_p t - \theta_p \quad (2.33)$$

$$\theta_2 = \omega_g t - \theta_g \quad (2.34)$$

式中， $e_i (i = p, g)$ 为主、被动齿轮的质量偏心量； θ_1, θ_2 为主、被动齿轮的旋转角度； ω_1, ω_2 为主、被动齿轮的转动角速度，以图示方向为正。

根据齿轮啮合的基本原理, 齿轮啮合的动态啮合力可表示为:

$$W_{cy} = c_m(\dot{\bar{y}}_p - \dot{\bar{y}}_g - \dot{e}) + k_m(\bar{y}_p - \bar{y}_g - e) \quad (2.35)$$

将式(2.31)- (2.34)带入式(2.35), 得

$$\begin{aligned} W_{cy} = c_m \{ & [\dot{y}_p - e_p(\omega_p - \dot{\theta}_p) \cos \theta_1 - R_p(\omega_p - \dot{\theta}_p)] \\ & - [\dot{y}_g - e_g(\omega_g - \dot{\theta}_g) \cos \theta_2 - R_g(\omega_g - \dot{\theta}_g)] - \dot{e}(t) \} \\ & + k_m \{ [y_p - e_p \sin \theta_1 - R_p \theta_1] \\ & - [y_g - e_g \sin \theta_2 - R_g \theta_2] - e(t) \} \end{aligned} \quad (2.36)$$

另一方面, 由于齿轮的质量偏心, 在齿轮旋转过程中将产生离心力, 经推导可得主、被动齿轮的离心力在 y 方向的分量 $W_{m_{py}}$ 和 $W_{m_{gy}}$, 即

$$W_{m_{py}} = m_p e_p (\dot{\theta}_p + \omega_p)^2 \sin \theta_1 \quad (2.37)$$

$$W_{m_{gy}} = m_g e_g (\dot{\theta}_g + \omega_g)^2 \sin \theta_2 \quad (2.38)$$

而由于扭转振动位移加速度引起的质心沿 y 向的平移加速度, 会使两齿轮产生沿 y 方向的惯性力 $\bar{W}_{m_{py}}$ 和 $\bar{W}_{m_{gy}}$, 即

$$\bar{W}_{m_{py}} = m_p e_p \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 \quad (2.39)$$

$$\bar{W}_{m_{gy}} = m_g e_g \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 \quad (2.40)$$

因此, 对图 2-4 所示的主、被动齿轮的受力图, 如不考虑支承系统和齿轮啮合的阻尼, 可推得系统的动力学方程为:

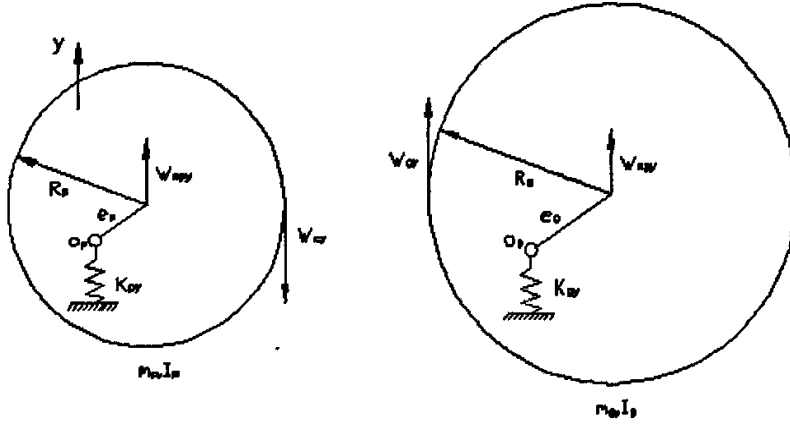


图 2-4

$$m_p \ddot{y}_p + k_{py} y_p = W_{mgy} - \bar{W}_{mgy} - W_{cy} \quad (2.41)$$

$$I_p \ddot{\theta}_p = W_{mgy} e_p \cos \theta_1 - \bar{W}_{mgy} e_p \cos \theta_1 - W_{cy} (R_p + e_p \cos \theta_1) \quad (2.42)$$

$$m_g \ddot{y}_g + k_{gy} y_g = W_{mgy} - \bar{W}_{mgy} - W_{cy} \quad (2.43)$$

$$I_g \ddot{\theta}_g = W_{mgy} e_g \cos \theta_2 - \bar{W}_{mgy} e_g \cos \theta_2 + W_{cy} (R_g + e_g \cos \theta_2) \quad (2.44)$$

2.4 考虑齿面摩擦和轴承横向振动的分析模型

在考虑齿面摩擦的影响时,还必须考虑齿轮在垂直于啮合线方向的平移自由度,相应的系统动力学模型如图 2-5 所示。

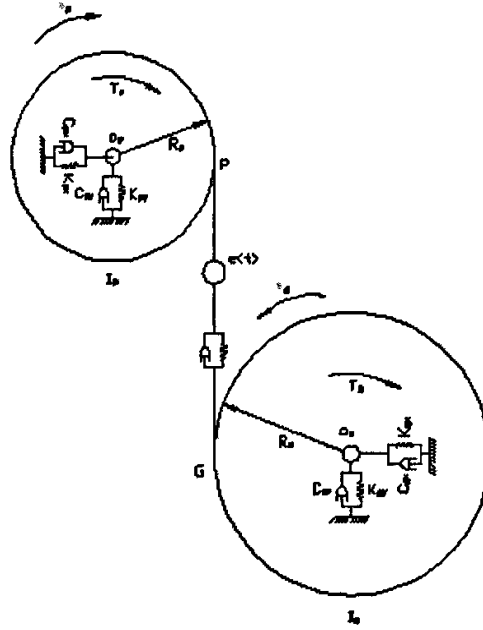


图 2-5 考虑齿面摩擦和轴承横向振动的分析模型

可以看,这时的系统是 6 自由度的二维平面振动系统,其中 4 个平移自由度,2 个转动自由度,系统的广义位移阵列可表示为:

$$\{\delta\} = \{x_p \ y_p \ \theta_p \ x_g \ y_g \ \theta_g\}' \quad (2.45)$$

与不考虑齿面摩擦的情况相类似,齿轮的动态啮合力可以表示为:
啮合力可以是:

$$\begin{aligned} F_p &= k_m(y_p + R_p\theta_p - y_g + R_g\theta_g - e) \\ &+ c_m(\dot{y}_p + R_p\dot{\theta}_p - \dot{y}_g + R_g\dot{\theta}_g - \dot{e}) \end{aligned} \quad (2.46)$$

而齿面摩擦力可以近似表示为:

$$F_f = \lambda f F_p \quad (2.47)$$

式中, f 为等效摩擦系数; λ 为轮齿摩擦力方向系数, F_f 沿 x 方向时取为“+1”反之取为“-1”。

从而可以推得系统得分析模型为:

$$m_p \ddot{x}_p + c_{px} \dot{x}_p + k_{px} x_p = F_f \quad (2.48)$$

$$m_p \ddot{y}_p + c_{py} \dot{y}_p + k_{py} y_p = -F_p \quad (2.49)$$

$$I_p \ddot{\theta}_p = -F_p R_p - T_p + F_f (R_p \tan \beta - H) \quad (2.50)$$

$$m_g \ddot{x}_g + c_{gx} \dot{x}_g + k_{gx} x_g = -F_f \quad (2.51)$$

$$m_g \ddot{y}_g + c_{gy} \dot{y}_g + k_{gy} y_g = F_p \quad (2.52)$$

$$I_g \ddot{\theta}_g = -F_p R_g - T_g + F_f (R_g t g \beta + H) \quad (2.53)$$

即:

$$\begin{aligned} m_p \ddot{x}_p + c_{px} \dot{x}_p + k_{px} x_p &= \lambda f[k_m(y_p + R_p \theta_p - y_g + R_g \theta_g - e) \\ &+ c_m(\dot{y}_p + R_p \dot{\theta}_p - \dot{y}_g + R_g \dot{\theta}_g - \dot{e})] \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} m_p \ddot{y}_p + c_{py} \dot{y}_p + k_{py} y_p &= -[k_m(y_p + R_p \theta_p - y_g + R_g \theta_g - e) \\ &+ c_m(\dot{y}_p + R_p \dot{\theta}_p - \dot{y}_g + R_g \dot{\theta}_g - \dot{e})] \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} I_p \ddot{\theta}_p &= -R_p[k_m(y_p + R_p \theta_p - y_g + R_g \theta_g - e) \\ &+ c_m(\dot{y}_p + R_p \dot{\theta}_p - \dot{y}_g + R_g \dot{\theta}_g - \dot{e})] \\ &+ \lambda f(R_g t g \beta - H)[k_m(y_p + R_p \theta_p - y_g + R_g \theta_g - e) \\ &+ c_m(\dot{y}_p + R_p \dot{\theta}_p - \dot{y}_g + R_g \dot{\theta}_g - \dot{e})] - T_p \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} m_g \ddot{x}_g + c_{gx} \dot{x}_g + k_{gx} x_g &= -\lambda f[k_m(y_p + R_p \theta_p - y_g + R_g \theta_g - e) \\ &+ c_m(\dot{y}_p + R_p \dot{\theta}_p - \dot{y}_g + R_g \dot{\theta}_g - \dot{e})] \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} m_g \ddot{y}_g + c_{gy} \dot{y}_g + k_{gy} y_g &= k_m(y_p + R_p \theta_p - y_g + R_g \theta_g - e) \\ &+ c_m(\dot{y}_p + R_p \dot{\theta}_p - \dot{y}_g + R_g \dot{\theta}_g - \dot{e}) \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} I_g \ddot{\theta}_g &= -R_g[k_m(y_p + R_p \theta_p - y_g + R_g \theta_g - e) \\ &+ c_m(\dot{y}_p + R_p \dot{\theta}_p - \dot{y}_g + R_g \dot{\theta}_g - \dot{e})] \\ &+ \lambda f(R_g t g \beta + H)[k_m(y_p + R_p \theta_p - y_g + R_g \theta_g - e) \\ &+ c_m(\dot{y}_p + R_p \dot{\theta}_p - \dot{y}_g + R_g \dot{\theta}_g - \dot{e})] - T_g \end{aligned} \quad (2.59)$$

写成矩阵形式, 则分析模型表示为:

$$[m]\{\ddot{\delta}\} + [c]\{\dot{\delta}\} + [k]\{\delta\} = \{p\} \quad (2.60)$$

$$[m] = \begin{bmatrix} m_p & & & & & \\ & m_p & & & & \\ & & I_p & & & \\ & & & m_g & & \\ & & & & m_g & \\ & & & & & I_g \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{px} & -\lambda f c_m & -\lambda f c_m R_p & 0 & \lambda f c_m & -\lambda f c_m R_g \\ 0 & c_{py} + c_m & c_m R_p & 0 & -c_m & c_m R_g \\ 0 & c_m(R_p - \bar{R}_p) & c_m R_p(R_p - \bar{R}_p) & 0 & -c_m(R_p + \bar{R}_p) & c_m R_g(R_p - \bar{R}_p) \\ 0 & \lambda f c_m & \lambda f c_m R_p & c_{gx} & -\lambda f c_m & \lambda f c_m R_g \\ 0 & -c_m & -c_m R_p & 0 & c_{gy} + c_m & -c_m R_g \\ 0 & c_m(R_g - \bar{R}_g) & c_m R_p(R_g - \bar{R}_g) & 0 & -c_m(R_g + \bar{R}_g) & c_m R_g(R_g - \bar{R}_g) \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

其中

$$\bar{R}_p = \lambda f(R_p \tan \beta - H) \quad (2.63)$$

$$\bar{R}_g = \lambda f(R_g \tan \beta + H) \quad (2.64)$$

$$[k] = \begin{bmatrix} -k_{px} & -\lambda f k_m & -\lambda f k_m R_p & 0 & \lambda f k_m & -\lambda f k_m R_g \\ 0 & k_{py} + k_m & k_m R_p & 0 & -k_m & k_m R_g \\ 0 & k_m(R_p - \bar{R}_p) & k_m R_p(R_p - \bar{R}_p) & 0 & -k_m(R_p - \bar{R}_p) & k_m R_p(R_p - \bar{R}_p) \\ 0 & \lambda f k_m & \lambda f k_m R_p & k_{gx} & -\lambda f k_m & \lambda f k_m R_g \\ 0 & -k_m & -k_m R_p & 0 & k_{gy} + k_m & -k_m R_g \\ 0 & k_m(R_g - \bar{R}_g) & k_m R_p(R_g - \bar{R}_g) & 0 & -k_m(R_g - \bar{R}_g) & k_m R_g(R_g - \bar{R}_g) \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

$$\{p\} = \begin{bmatrix} -\lambda f e k_m - \lambda f \bar{e} c_m \\ k_m e + c_m \dot{e} \\ R_p k_m e + R_p c_m \dot{e} - \bar{R}_p k_m e - \bar{R}_p c_m \dot{e} - T_g \\ \lambda f e k_m + \lambda f \bar{e} c_m \\ -k_m e - c_m \dot{e} \\ R_g k_m e + R_g c_m \dot{e} - \bar{R}_g k_m e - \bar{R}_g c_m \dot{e} - T_g \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

2.5 本章小节

本章介绍了 4 种不同复杂程度的圆齿轮系统动力学模型, 这些模型是建立非圆齿轮系统模型的基础:

第一种圆齿轮副扭转振动分析模型, 是以振动理论分析一对圆齿轮啮合的最基本模型, 它是建立其他圆齿轮振动模型以及非圆齿轮振动模型的基础。第二种圆齿轮系统啮合耦合振动分析模型, 考虑了支撑系统的横向振动, 这种振动在非圆齿轮系统中尤其明显。

第三种具有质量偏心的齿轮副分析模型, 是考虑当圆齿轮由于加工误差和装配误差存在偏心时, 系统的模型。偏心距在圆齿轮系统中并非本质因素, 但对于

许多中非圆齿轮（如椭圆齿轮等）系统来说却是本质的，同时也是引发振动的最主要原因。第四种考虑齿面摩擦和轴承横向振动的分析模型，是一个平面六自由度的振动模型，也是非圆齿轮最常见的振动模型，它的建立，对于非圆齿轮振动模型是一个很好的参考。

下一章，本文将以这些振动模型的建模思想为基础，使用新的方法完成非圆齿轮系统进行动力学模型的建立。

第三章 非圆齿轮传动动力学系统建模方法

从第二章对于不同复杂程度的圆齿轮系统动力学模型的分析,可以看出:随着系统的复杂程度增加,特别是质量偏心的出现,使用传统的解振动微分方程的方法来建立系统的模型是相当烦琐和不方便的。

而基于系统的动能、势能和广义力的拉格朗日方程则能够方便的实现坐标变换,使得不同场的不同坐标能够通过坐标变换统一为系统的广义坐标,从而方便的建立系统的方程。

广义坐标表达的拉格朗日方程只涉及系统的动能、势能和广义力。因此利用拉格朗日方程一般可以很快的求得系统方程。但是由于要对拉格朗日函数进行求导运算,因此很难利用这一方法由计算机自动产生系统方程。另一方面,拉格朗日方程是耦合的、隐式的二阶微分方程,在许多情况下很难把它转换成一阶微分方程。因此直接利用拉格朗日方程对系统进行仿真将是比较困难的。

传统键合图提供了将系统方程从二阶转变为一阶的方法,将这种方法应用到拉格朗日方程中,就可以克服上述缺点,方便的生成系统方程。

3.1 拉格朗日键合图简介

3.1.1 拉格朗日键合图的结构

许多系统的键合图模型可以用下图所示的网络及其连接的场来表示,而网络则由描述广义坐标的一阶倒数(即广义速度)的1结以及联系广义速度和各个场的流变量的调制变换器组成。

一个系统的广义坐标就是一套完全描述该系统运动的独立坐标。广义坐标的维数就是所描述系统的自由度数。设 n 维广义坐标为 q_G ; α 维容性场(C 场)广义位移向量为 q_C ; β 维惯性场(I 场)广义位移向量为 q_I ; m 维阻性场(R 场)流向量为 V_R ; 势源场(S_c 场地) r 维流向量为 V_s 。又设由 $\dot{q}_G$ 到 $\dot{q}_C$ 的变换矩阵为 T_C ; 由 $\dot{q}_G$ 到 $\dot{q}_I$ 的变换矩阵为 T_I ; 由 $\dot{q}_G$ 到 V_s 的变换矩阵为 T_s ; 由 $\dot{q}_G$ 到 V_R 的变换矩阵为 T_R 。则一个在势源场作用下的系统可以用如图 3-1 的键图模型来表示:

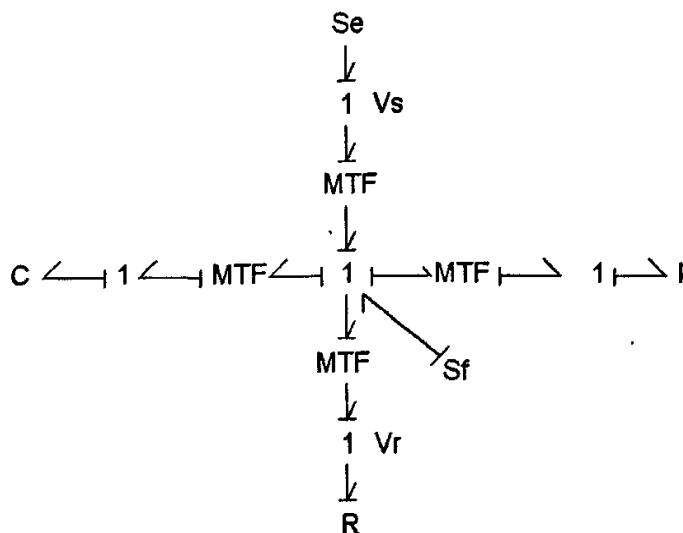


图 3-1

3.1.2 拉格朗日键合图到系统方程的转化

α 维容性场广义位移量 q_c 可用 n 维的广义坐标 q_G 表示如下:

$$q_c = f(q_G) \quad (3-1)$$

对方程(3-1)求导一次得:

$$\dot{q}_c = \frac{df(q_G)}{dq_G} \dot{q}_G \quad (3-2)$$

由变换矩阵 T_c 的定义:

$$\dot{q}_c = T_c \dot{q}_G$$

可知, $(\alpha \times m)$ 维的流变换矩阵 T_c 为:

$$T_c = \frac{df(q_G)}{dq_G} \quad (3-3)$$

β 维的惯性场广义位移向量 q_I 与广义坐标 q_G 的关系可以写成

$$q_I = \phi(q_G) \quad (3-4)$$

对式(3-4)求导一次得:

$$\dot{q}_I = \frac{d\phi(q_G)}{dq_G} \dot{q}_G \quad (3-5)$$

由变换矩阵 T_l 的定义

$$\dot{q}_l = T_l \dot{q}_G$$

可知, $(\beta \times n)$ 维的流变换矩阵 T_l 为:

$$T_l = \frac{d\phi(q_G)}{d(q_G)} \quad (3-6)$$

根据流变换矩阵 T_R 和 T_S 的定义, V_R 和 $\dot{q}_G$ 以及 V_S 和 $\dot{q}_G$ 之间的关系可以写成

$$V_R = T_R \dot{q}_G \quad (3-7)$$

$$V_S = T_S \dot{q}_G \quad (3-8)$$

式中, T_R 和 T_S 分别为 $(m \times n)$ 维和 $(n \times m)$ 维矩阵。

设 E_S' 、 E_C' 、 E_I' 和 E_R' 分别表示在 $\dot{q}_G$ 上的输入势向量以及容性场、惯性场和阻性场的势向量, 则可以列出共流结的势方程为

$$E_I' + E_C' = E_S' - E_R' \quad (3-9)$$

式(3-9)中的 E_S' 、 E_C' 、 E_I' 和 E_R' 可以通过各势变换矩阵由输入势向量 E_S 以及容性场、惯性场和阻性场的势向量 E_C 、 E_I 和 E_R 求得。

因调制变换器是功率守恒键图单元, 故势变换矩阵是流变换矩阵的转置矩阵。对于惯性场, 若设 p 为 β 维广义动量向量, 则有:

$$E_I' = T_I' E_I = T_I' \dot{p} \quad (3-10)$$

因 p 是 $\dot{q}_l$ 的函数

$$p = \phi_l(\dot{q}_l) \quad (3-11)$$

在线性的情况下式(3-11)可写成

$$p = I(\dot{q}_l) \quad (3-12)$$

式中, I 为 $(\beta \times \beta)$ 维的惯性矩阵。若惯性矩阵中所有惯性单元都是一通口键图单元, 则 I 为对角矩阵。将式(3-11)代入式(3-10)中, 可得:

$$E_I' = T_I' \frac{d}{dt} [\phi_l(T_l \dot{q}_G)] \quad (3-13)$$

或:

$$E_T' = T_I' I (T_I \ddot{q}_G + T_I \dot{q}_G) \quad (3-14)$$

因此, 对于容性场, 有:

$$E_C = T_C' E_C \quad (3-15)$$

E_C 是 q_C 的函数:

$$E_C = \phi_K(q_C) \quad (3-16)$$

在线性的条件下, 式(3-16)可写成

$$E_C = K q_C \quad (3-17)$$

式中, K 为 $(\alpha \times \alpha)$ 维的刚性矩阵。若容性场中所有容性单元都是一通口键图元, 则 K 为对角阵。将式(3-1)带入式(1-16)或式(1-17)后再带入式(1-15)可得:

$$E_C' = T_C' \phi_K[f(q_G)] \quad (3-18)$$

或

$$E_C' = T_C' K f(q_G) \quad (3-19)$$

对于阻性场, 有

$$E_R' = T_R' E_R \quad (3-20)$$

而 E_R 是 V_R 的函数

$$E_R = \phi_R(V_R) \quad (3-21)$$

在线性的情况下, 式(2-31)可以写为:

$$E_R = R T_R \dot{q}_G \quad (3-22)$$

将式(3-7)和式(3-21)或式(3-22)带入式(3-20)得:

$$E_R' = T_R' \phi_R(T_R \dot{q}_G) \quad (3-23)$$

或

$$E_R' = T_R' R T_R \dot{q}_G \quad (3-24)$$

式中, R 为 $(m \times m)$ 维的阻性矩阵。若阻性场中所有容性单元都是一通口键图元, 则 R 为对角阵。

对于势源场可以列出方程

$$E_S' = T_S' E_S \quad (3-25)$$

将方程(3-10)、(3-18)、(3-23)和(3-25)或方程(3-14)、(3-19)、(3-24)和(3-25)带入方程(3-9)可得:

$$\begin{aligned}
 T_I' \frac{d}{dt} [\phi_I(T_I \dot{q}_G)] + T_C' \phi_K(f(q_G)) \\
 = T_S' E_S - T_R' \phi_R(T_R \dot{q}_G)
 \end{aligned} \quad (3-26)$$

或

$$T_I' I(T_I \ddot{q}_G + \dot{T}_I \dot{q}_G) + T_C' K f(q_G) = T_S' E_S - T_R' R T_R \dot{q}_G \quad (3-27)$$

方程(3-16)或方程(3-27)就是拉格朗日键图隐含的向量系统方程。他是系统的 n 个二阶微分方程的简明表达式。

3.2 拉格朗日键图的拓展

因为本文的使用拉格朗日键图作为工具进行系统建模的目标是建立非圆齿轮系统的动力学模型，这就必然涉及到角动量的问题。而上一节所描述的键图模型并不包含对转动惯量的模拟，因此还需要对这一键图模型进行一个简单的拓展，其原理与 3.1 相同，仍然是将系统的转动自由度的广义速度通过坐标变换统一为系统的广义坐标 q_G 。

3.2.1 拉格朗日键合图的扩展

刚体线性动量的计算与质点相同，但刚体角动量计算却相当复杂。对于非圆齿轮系统来说，一般的，都取为齿轮的质量中心为转矩中心。

以图 3-2 来表达刚体以角速度 ω 在惯性空间运动。该刚体固定在以 C 点为原点的中间坐标系 C_{xyz} 上。设刚体关于中间坐标系 C_{xyz} 的惯性矩阵为 I_C ；角速度关于 C 点的角动量的坐标系 C_{xyz} 各坐标轴上的分量为 ω_x 、 ω_y 、 ω_z 和 H_x 、 H_y 、 H_z 。

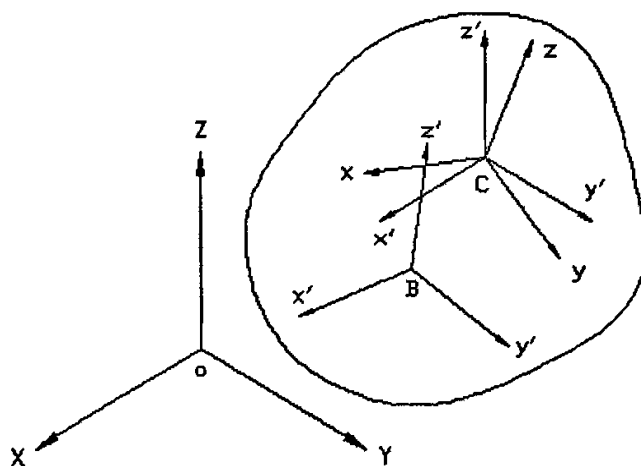


图 3-2

并设

$$\Omega_C = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]' \quad (3-28)$$

$$H_C = [H_x \quad H_y \quad H_z]' \quad (3-29)$$

则

$$H_C = I_C \Omega_C \quad (3-30)$$

而刚体对于 C 点的惯性矩为：

$$\tau_C = [\tau_x \quad \tau_y \quad \tau_z]' = \dot{H}_C \quad (3-31)$$

若刚体固定在某一中间坐标系 $B_{x'y'z'}$ 上, 坐标系原点 B 为刚体上的任意一点, 而 B 点的线速度不为零且不平行于刚体质心的线速度。设刚体关于并与坐标系 $B_{x'y'z'}$ 的惯性矩阵为 I_B , 刚体角速度在坐标系 $B_{x'y'z'}$ 的各坐标轴上的分量为 ω_x' 、 ω_y' 、 ω_z' , 刚体质量中心 C 对于坐标系 $B_{x'y'z'}$ 的坐标为 (a、b、c)。则以 C 为原点, 做平行于坐标系 $B_{x'y'z'}$ 的坐标系 $C_{x'y'z'}$, 可求得刚体关于坐标系 $C_{x'y'z'}$ 的惯性矩阵 I_C 为:

$$I_C = I_B - M \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ab & c^2 + a^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{bmatrix} \quad (3-32)$$

式中, M 为刚体的质量。同时知

$$\Omega_C = \Omega_B = [\omega_x' \quad \omega_y' \quad \omega_z']' \quad (3-33)$$

因此刚体的角动量和惯性力矩可利用上式进行计算。

建立如图所示的惯性参考坐标系 OXYZ。设刚体角速度在坐标系 OXYZ 各轴上的分量为: ω_x' 、 ω_y' 、 ω_z' ; 刚体关于坐标系 OXYZ 的惯性矩阵为 I_O , 并设:

$$\tau_O = [\tau_x \quad \tau_y \quad \tau_z]' \quad (3-34)$$

$$\Omega_O = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]' \quad (3-35)$$

$$H_O = [H_x \quad H_y \quad H_z]' \quad (3-36)$$

则有:

$$I_O = C_C' \cdot I_C \cdot C_C \quad (3-37)$$

$$\Omega_O = C_C' \cdot \Omega_C \quad (3-38)$$

$$H_o = I' \bullet \Omega_o \quad (3-39)$$

$$\tau_o = \dot{H}_o \quad (3-40)$$

上述各式中, C_c 是由坐标系 C_{xyz} 对于坐标系 OXYZ 的方向余弦组成的旋转矩阵; C_c' 是 C_c 的转置矩阵。

设 T_{lo} 为由 $\dot{q}_G$ 到 Ω_c 的角速度变换矩阵, 则:

$$\Omega_c = T_{lo} \bullet \dot{q}_G \quad (3-41)$$

根据上述推论可以得到扩展后的拉格朗日键图, 结构为:

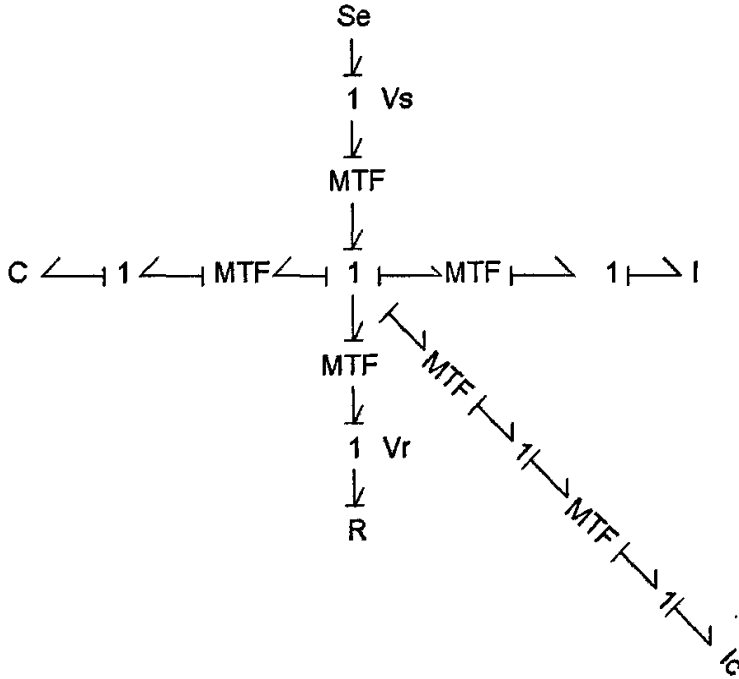


图 3-3

根据上图, 由方程(3-34)-(3-41)可以求得在 q_G 上的惯性力矩 τ 为

$$\begin{aligned} & T_{ls}' I_s (T_{ls} \ddot{q}_G + \dot{T}_{ls} \dot{q}_G) + T_{lo}' C_c \dot{C}_c' I_c T_{lo} \dot{q}_G + T_c' K f(q_G) \\ & = T_s' E_s - T_R' R T_R q_G \end{aligned} \quad (3-42)$$

式中, T_{ls} 为由 T_l 和 T_{lo} 组成的惯性场综合流变换; T_{ls}' 是 T_{ls} 的转置矩阵; I_s 是由 I 和 I_c 组成的惯性场参数矩阵, 其他符号的含义同 3.1。

作为分析非圆齿轮的基础, 我们需要先分析一个简单的平面旋转的薄板:

一个质量为 M 的平面旋转薄板 (如图 3-4 所示), 关于中间坐标系 B_{xyz} 的惯性矩阵为:

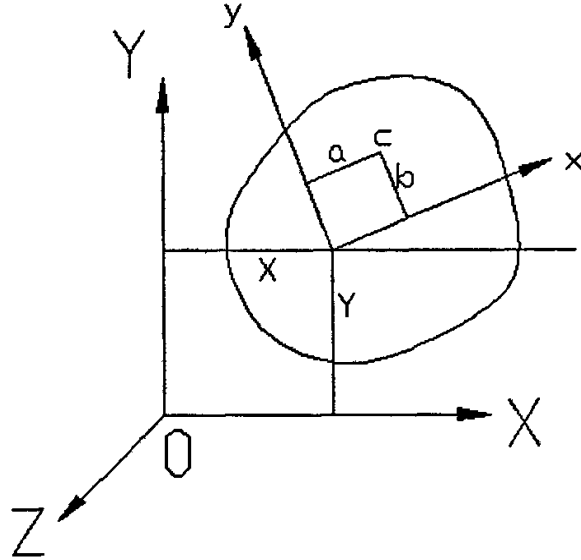


图 3-4

$$I_B = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & 0 \\ I_{xy} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (3-43)$$

在已知外力 F_x 、 F_y 和外力矩 τ_ϕ 作用下, 在 X-Y 平面内做自由运动的情况。已知该薄板的质量中心对于中间坐标系 B_{xyz} 的坐标为 $(a, b, 0)$ 。

可知, 这是一个既做转动又做移动的三自由度系统。今选广义坐标为

$$q_G = [X \ Y \ \phi]^T \quad (3-44)$$

则, 惯性场综合流变换矩阵 T_{Is} 为:

$$T_{Is} = \begin{bmatrix} T_I \\ T_{I\phi} \end{bmatrix} \quad (3-45)$$

其中:

$$T_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -(a \sin \phi + b \cos \phi) \\ 0 & 1 & a \cos \phi - b \sin \phi \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-46)$$

$$T_{I\omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-47)$$

惯性场参数矩阵 I_s 为:

$$I_s = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I_c \end{bmatrix} \quad (3-48)$$

其中:

$$I = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-49)$$

$$I_c = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & 0 \\ I_{xy} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} - M \begin{bmatrix} b^2 & -ab & 0 \\ -ab & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix} \quad (3-50)$$

旋转矩阵 C_c 为:

$$C_c = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-51)$$

输入势向量 E_s 以及流变换矩阵 T_s 为:

$$E_s = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ \tau_\varphi \end{bmatrix} \quad (3-52)$$

$$T_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-53)$$

另已知 $K=0, T_c=0; R=0, T_R=0$ 。

将广义坐标、各流变换矩阵及其转置矩阵、旋转矩阵、输入势向量以及各参数矩阵带入方程 (3-42) 求得系统方程如下:

$$\begin{aligned} M\ddot{X} - M(a\sin\varphi + b\cos\varphi)\ddot{\varphi} - M(a\cos\varphi - b\sin\varphi)\dot{\varphi}^2 &= F_x \\ M\ddot{Y} + M(a\cos\varphi - b\sin\varphi)\ddot{\varphi} - M(a\sin\varphi + b\cos\varphi)\dot{\varphi}^2 &= F_y \\ M(a\ddot{Y} - b\ddot{X})\cos\varphi - M(a\ddot{X} + b\ddot{Y})\sin\varphi + I_z\ddot{\varphi} &= \tau_\varphi \end{aligned} \quad (3-54)$$

3.3 建立非圆齿轮系统动力学模型的一般方法

以第二章对于椭圆齿轮系统动力学问题的分析作为基础,采用扩展后的拉格朗日键图建立非圆齿轮系统的动力学模型是可行的。从前面的分析可以看出,非圆齿轮的振动主要是由偏心 and 速比变化引起的,正是这样的特性,使得非圆齿轮传动具有本质的动态特征,而时变啮合刚度等其他因素已经退化成为了次要因素。因此,本文在建立非圆齿轮的动力学模型时,假设轮齿的啮合刚度为定值,忽略误差激励,啮合激励等这些次要因素。也正是因此,本文的相关仿真部分关于啮合刚度的计算,均沿用了圆齿轮的相关结论。

根据以上的假设,可采取以下方法来建立如图所示的任意非圆齿轮系统的动力学模型:

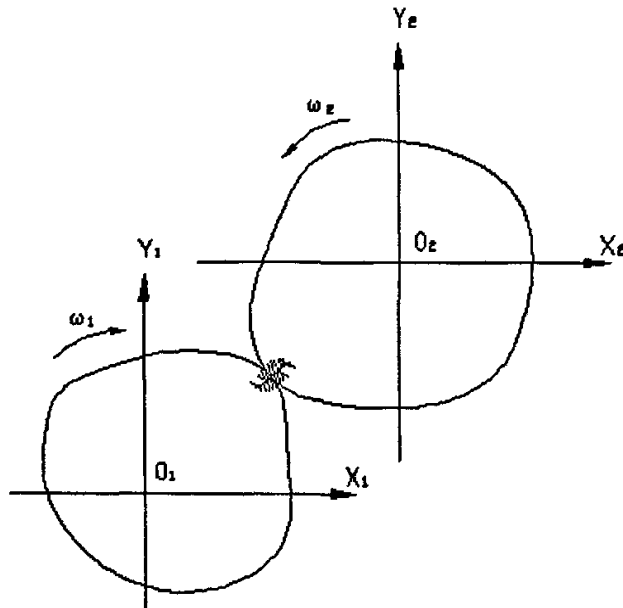


图 3-5

一般的来说,这样的系统是一个既转动也平动的六自由度系统,现选广义坐标为:

$$q_G = [X_1 \ Y_1 \ \phi_1 \ X_2 \ Y_2 \ \phi_2]^T \quad (3-55)$$

设主动、从动轮的质量分别为 M_1 、 M_2 , 传动轴、轴承和箱体等对主动轮在 X 方向上的支撑刚度为 K_{x1} , 在 Y 方向上的支撑刚度为 K_{y1} 。同理, 对于从动轮, 相应的支撑刚度为 K_{x2} 和 K_{y2} 。主动、从动轮的转角分别为 ϕ_1 和 ϕ_2 。对于轮齿处的啮合刚度, 设其在 X 方向为 K_x , 在 Y 方向为 K_y , 均为定值。设主动轮在 X 方

向的阻尼为 C_{x1} ，在 Y 方向上的阻尼为 C_{y1} ，从动轮在 X 方向的阻尼为 C_{x2} ，在 Y 方向上的阻尼为 C_{y2} ，在转动方向上，主动轮阻尼为 C_1 ，从动轮为 C_2 。

设主动轮转速为 ω_1 ，位置参数为 ϕ_1 ；从动轮转速为 ω_2 ，位置参数为 ϕ_2 ，主动轮的节曲线方程为 $R_1 = P(\phi_1)$ ，从动轮的节曲线方程为 $R_2 = P(\phi_2)$ 。主动轮的质量重心到旋转中心的横坐标距离为 a ，纵坐标距离为 b ；从动轮的质量重心到旋转中心的横坐标距离为 c ，纵坐标距离为 d 。

根据这些参数，就可以使用拉格朗日键合图方法对系统进行建模。

首先根据惯性场综合流变换矩阵 T_{Is} 的定义：

$$T_{Is} = \begin{bmatrix} \frac{T_I}{T_{I\omega}} \end{bmatrix} \quad (3-56)$$

其中：

$$T_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -(a \sin \phi_1 + b \cos \phi_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \cos \phi_1 - b \sin \phi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -(c \sin \phi_2 + d \cos \phi_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c \cos \phi_2 - d \sin \phi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-57)$$

$$T_{I\omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-58)$$

惯性场参数矩阵 I_s 为：

$$I_s = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I_c \end{bmatrix} \quad (3-59)$$

其中：

$$I = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-60)$$

$$I_C = \begin{bmatrix} I_{x1x1} & I_{x1y1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_{y1x1} & I_{y1y1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{x2x2} & I_{x2y2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{y2x2} & I_{y2y2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (3-61)$$

$$-M \bullet \begin{bmatrix} b^2 & -ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -ab & a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d^2 & -cd & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -cd & c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c^2 + d^2 \end{bmatrix}$$

旋转矩阵 C_C 为:

$$C_C = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-62)$$

系统的阻性场分析, 根据定义, 系统的 6 维阻性场流向量为:

$$V_R = [\dot{X}_1 \quad \dot{Y}_1 \quad \dot{\phi}_1 \quad \dot{X}_2 \quad \dot{Y}_2 \quad \dot{\phi}_2]^T \quad (3-63)$$

则由 $V_R = T_R \dot{q}_G$ 可知:

$$T_R = E \quad (3-64)$$

容性场广义位移向量计算:

在啮合点, X 方向的相对位移为 $X_1 - X_2$ 。Y 方向的位移则和圆齿轮有本质的区别, 当主动轮和从动轮分别转过 ϕ_1 和 ϕ_2 之后, 在啮合点转过的线位移分别为 $\int_0^{\phi_1} P(\phi_1) d\phi_1$ 和 $\int_{-\pi}^{\pi+\phi_2} P(\phi_2) d\phi_2$, 则可以得出, 在啮合点, Y 方向的相对位移为: $Y_1 + \int_0^{\phi_1} P(\phi_1) d\phi_1 - Y_2 + \int_{-\pi}^{\pi+\phi_2} P(\phi_2) d\phi_2$ 。

由此可知, 容性场广义位移向量为:

$$q_c = f(q_G) = [X_1 \quad Y_1 \quad (X_1 - X_2) \quad X_2 \quad Y_2 \quad (Y_1 + \int_0^{\phi_1} P(\phi_1) d\phi_1 - Y_2 + \int_{\pi}^{\pi+\phi_2} P(\phi_2) d\phi_2)]^T$$

可知:

$$\dot{q}_c = \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{Y}_1 \\ \dot{X}_1 - \dot{X}_2 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{Y}_2 \\ \dot{Y}_1 + P(\phi_1)\dot{\phi}_1 - \dot{Y}_2 + P(\phi_2)\dot{\phi}_2 \end{bmatrix} \quad (3-65)$$

则由 $\dot{q}_c = T_c \bullet \dot{q}_G$ 可知流变换矩阵 T_c 为:

$$T_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & P(\phi_1) & 0 & -1 & P(\phi_2) \end{bmatrix} \quad (3-66)$$

另已知系统刚度矩阵:

$$K = \begin{bmatrix} K_{x1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{y1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_y \end{bmatrix} \quad (3-67)$$

输入势向量 E_s 及流变换矩阵 T_s 为:

$$E_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{\phi 1} \\ 0 \\ 0 \\ \tau_{\phi 2} \end{bmatrix}, T_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-68)$$

根据上述分析, 就可以使用式(3-42)完成对非圆齿轮系统的数学模型的建立。

3.4 本章小结

拉格朗日键合图是从能量角度考虑而求得的一种系统方程, 因此它特别适用于建立如非圆齿轮系统这样需要进行坐标变换的多自由度系统的模型。

本章利用拉格朗日键合图方法, 对简单的 3 自由度平面薄板进行了分析, 并在此基础上综合第二章所参考的几种圆齿轮系统建模的方法和思想, 建立了适用于各种平面运动的非圆齿轮系统动力学模型。模型中两齿轮的节曲线方程 $R_1 = P(\phi_1)$ 和 $R_2 = P(\phi_2)$ 可以改变为需要的曲线方程, 相关的偏心距等各种参数都随之改变, 因此使用这个方法建立不同节曲线和偏心率的非圆齿轮, 都是很方便的。

应当说明的是: 本文作为对于非圆齿轮动力学模型的研究的一个初步探索, 忽略了圆齿轮中占主导地位的啮合冲击, 时变刚度等因素(认为啮合刚度为固定值, 无啮合冲击), 而主要考虑了在非圆齿轮中普遍存在的偏心振动和速比变化等因素。

第四章 椭圆齿轮传动动力学系统建模及分析

椭圆齿轮作为非圆齿轮中最常见的一种，常用以得到不同的传动比变化曲线，完成各种机构的变速运动或用于速度和加速度的调节。由于它应用广泛，对它进行动力学建模及仿真，无疑是最有实践和工程意义的。

上一章讨论了使用拉格朗日键合图方法对非圆齿轮进行动力学建模的一般方法，本章使用该方法，对一对啮合的椭圆齿轮进行动力学建模。

4.1 椭圆齿轮力学分析

对于一对啮合的椭圆齿轮，其尺寸大小是相同的，为了简单起见，现将它们看成尺寸，密度等完全相同的两个齿轮。

现对于椭圆齿轮做基本力学分析，设轮 1 为主动轮，如图 1 所示：

F_r ———— 齿轮转动时产生的离心力

F_a ———— 齿轮转速发生变化时产生的惯性力

F_t ———— 动态啮合力

设主动轮转速为 ω_1 ，位置参数为 ϕ_1 ，主动、从动齿轮偏心率为 e ，椭圆焦点到对称中心的距离为 c ，齿轮质量为 m ，由理论力学可知：

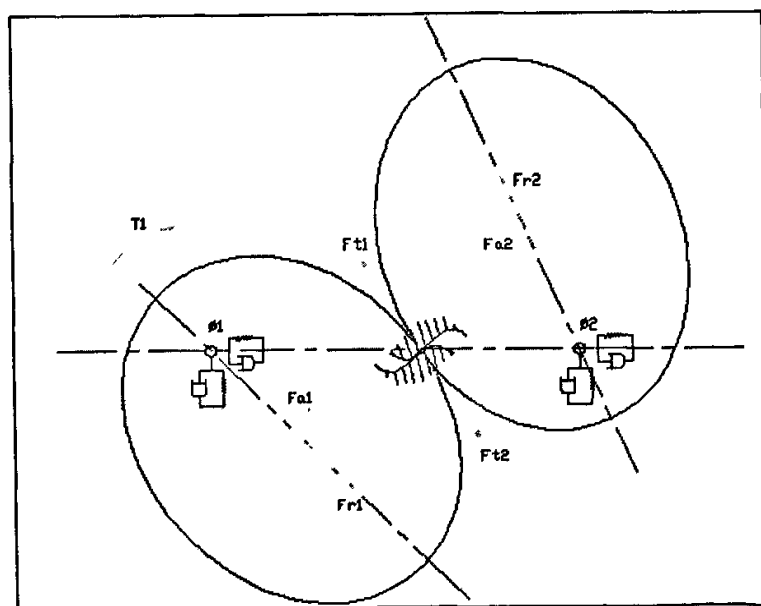


图 1 椭圆齿轮力学分析

$$F_{r1} = \omega_1^2 \cdot c \cdot m \quad (4.1)$$

$$F_{r2} = \omega_2^2 \cdot c \cdot m \quad (4.2)$$

$$F_{a1} = -\dot{\omega}_1 \cdot c \cdot m \quad (4.3)$$

$$F_{a2} = -\dot{\omega}_2 \cdot c \cdot m \quad (4.4)$$

4.2 椭圆齿轮系统模型的建立

根据先前对系统的力学分析，很显然，这个系统是一个既做转动，又做平动的六自由度系统，现选广义坐标为：

$$q_G = [X_1 \ Y_1 \ \phi_1 \ X_2 \ Y_2 \ \phi_2]^T \quad (4.5)$$

设主动、从动轮的质量均为 M ，传动轴、轴承和箱体等对主动轮在 X 方向上的支撑刚度为 K_{x1} ，在 Y 方向上的支撑刚度为 K_{y1} 。同理，对于从动轮，相应的支撑刚度为 K_{x2} 和 K_{y2} 。主动、从动轮的转角分别为 ϕ_1 和 ϕ_2 。对于轮齿处的啮合刚度，设其在 X 方向为 K_x ，在 Y 方向为 K_y 。根据拉格朗日键合图理论，6 维惯性场广义位移向量为：

$$q_I = [x_1 \ y_1 \ \phi_1 \ x_2 \ y_2 \ \phi_2]^T \quad (4.6)$$

惯性场综合流变换矩阵 T_{IS} 为：

$$T_{IS} = \begin{bmatrix} T_I \\ T_{I\omega} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

其中：

$$T_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -c \sin \phi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \cos \phi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -c \sin \phi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c \cos \phi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$T_{I\omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

惯性场参数矩阵 I_s 为：

$$I_s = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I_c \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

其中:

$$I = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$I_c = \begin{bmatrix} I_{x1x1} & I_{x1y1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_{y1x1} & I_{y1y1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{x2x2} & I_{x2y2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{y2x2} & I_{y2y2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} - M \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c^2 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

旋转矩阵 C_c 为:

$$C_c = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

设系统无阻尼, 则:

$$R=0, T_R=0$$

6 维容性场广义位移向量计算:

在啮合点, X 方向的相对位移为 $X_1 - X_2$ 。Y 方向的位移则和圆齿轮有本质的区别, 当主动轮和从动轮分别转过 ϕ_1 和 ϕ_2 之后, 在啮合点转过的线位移分别为 $\int_0^{\phi_1} R_1 d\phi_1$ 和 $\int_{\pi}^{\pi+\phi_2} R_2 d\phi_2$, 则可以得出, 在啮合点, Y 方向的相对位移为: $Y_1 + \int_0^{\phi_1} R_1 d\phi_1 - Y_2 + \int_{\pi}^{\pi+\phi_2} R_2 d\phi_2$ 。

由此可知，容性场广义位移向量为：

$$q_c = f(q_G) = [X_1 \quad Y_1 \quad (X_1 - X_2) \quad X_2 \quad Y_2 \quad (Y_1 + \int_0^t R_1 d\varphi_1 - Y_2 + \int_0^t R_2 d\varphi_2)]' \quad (4.14)$$

式中：

$$R_1 = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \varphi_1}, \quad R_2 = 2a - \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \varphi_2} \quad (4.15)$$

可知：

$$\dot{q}_c = \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{Y}_1 \\ \dot{X}_1 - \dot{X}_2 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{Y}_2 \\ \dot{Y}_1 + R_1 \dot{\varphi}_1 - \dot{Y}_2 + R_2 \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

则由 $\dot{q}_c = T_c \cdot \dot{q}_G$ 可知流变换矩阵 T_c 为：

$$T_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & R_1 & 0 & -1 & R_2 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

另已知系统刚度矩阵：

$$K = \begin{bmatrix} K_{x1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{y1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_y \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

输入势向量 E_s 及流变换矩阵 T_s 为：

$$E_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{\phi 1} \\ 0 \\ 0 \\ \tau_{\phi 2} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$$T_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

容性场在广义坐标 q_G 下的表达式计算如下:

$$\begin{aligned} & T_C' \cdot K \cdot f(q_G) \\ & = \begin{bmatrix} K_{X1} \cdot X_1 + K_X \cdot X_1 - K_X \cdot X_2 \\ K_{Y1} \cdot Y_1 + K_Y \cdot (Y_1 + \int_0^{\phi_1} R_1 d\phi_1 - Y_2 + \int_0^{\phi_2} R_2 d\phi_2) \\ R_1 \cdot K_Y \cdot (Y_1 + \int_0^{\phi_1} R_1 d\phi_1 - Y_2 + \int_0^{\phi_2} R_2 d\phi_2) \\ - K_X \cdot X_1 + K_{X2} \cdot X_2 + K_X \cdot X_2 \\ K_{Y2} \cdot Y_2 - K_Y \cdot (Y_1 + \int_0^{\phi_1} R_1 d\phi_1 - Y_2 + \int_0^{\phi_2} R_2 d\phi_2) \\ - R_2 \cdot K_Y \cdot (Y_1 + \int_0^{\phi_1} R_1 d\phi_1 - Y_2 + \int_0^{\phi_2} R_2 d\phi_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.21)$$

系统的输入为:

$$T_S' E_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{\phi 1} \\ 0 \\ 0 \\ \tau_{\phi 2} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

根据通用拉格朗日键合图模型所隐含的方程:

$$\begin{aligned} & T_{IS}' I_S (T_{IS} \ddot{q}_G + \dot{T}_{IS} \dot{q}_G) + T_{I\omega}' C_C \dot{C}_C' I_C T_{I\omega} \dot{q}_G + T_c' K f(q_G) \\ & = T_S' E_S - T_R' R T_R \dot{q}_G \end{aligned} \quad (4.23)$$

综合得出, 系统方程如下:

$$\begin{aligned}
 M\ddot{X}_1 - M \cdot c \cdot \sin \varphi_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 - M \cdot c \cdot \cos \varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1^2 + K_{x1} \cdot X_1 + K_X \cdot X_1 - K_X \cdot X_2 &= 0 \\
 M\ddot{Y}_1 + M \cdot c \cdot \cos \varphi_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 - M \cdot c \cdot \sin \varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1^2 + K_{r1} \cdot Y_1 + K_Y \cdot (Y_1 + \int_0^t R_1 d\varphi_1 - Y_2 + \int_0^t R_2 d\varphi_2) &= 0 \\
 -M \cdot c \cdot \sin \varphi_1 \cdot \ddot{X}_1 + M \cdot c \cdot \cos \varphi_1 \cdot \ddot{Y}_1 + I_{zz} \ddot{\varphi}_1 + R_1 \cdot K_Y \cdot (Y_1 + \int_0^t R_1 d\varphi_1 - Y_2 + \int_0^t R_2 d\varphi_2) &= \tau_{\mu 1} \\
 M\ddot{X}_2 - M \cdot c \cdot \sin \varphi_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 - M \cdot c \cdot \cos \varphi_2 \cdot \dot{\varphi}_2^2 - K_X \cdot X_1 + K_{x2} \cdot X_2 + K_X \cdot X_2 &= 0 \\
 M\ddot{Y}_2 + M \cdot c \cdot \cos \varphi_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 - M \cdot c \cdot \sin \varphi_2 \cdot \dot{\varphi}_2^2 + K_{r2} \cdot Y_2 - K_Y \cdot (Y_1 + \int_0^t R_1 d\varphi_1 - Y_2 + \int_0^t R_2 d\varphi_2) &= 0 \\
 -M \cdot c \cdot \sin \varphi_2 \cdot \ddot{X}_2 + M \cdot c \cdot \cos \varphi_2 \cdot \ddot{Y}_2 + I_{zz} \ddot{\varphi}_2 - R_2 \cdot K_Y \cdot (Y_1 + \int_0^t R_1 d\varphi_1 - Y_2 + \int_0^t R_2 d\varphi_2) &= \tau_{\mu 2}
 \end{aligned}
 \tag{4.24}$$

4.3 椭圆齿轮系统方程从二阶到一阶的转化

为了使得系统的方程便于进行计算机仿真, 还必须对系统的方程进行转化, 将他转换为一阶的方程组, 具体转换如下:

根据系统状态方程的前 3 个方程:

$$\begin{aligned}
 M\ddot{X}_1 - M \cdot c \cdot \sin \varphi_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 - M \cdot c \cdot \cos \varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1^2 + K_{x1} \cdot X_1 + K_X \cdot X_1 - K_X \cdot X_2 &= 0 \\
 M\ddot{Y}_1 + M \cdot c \cdot \cos \varphi_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 - M \cdot c \cdot \sin \varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1^2 + K_{r1} \cdot Y_1 + K_Y \cdot (Y_1 + \int_0^t R_1 d\varphi_1 - Y_2 + \int_0^t R_2 d\varphi_2) &= 0 \\
 -M \cdot c \cdot \sin \varphi_1 \cdot \ddot{X}_1 + M \cdot c \cdot \cos \varphi_1 \cdot \ddot{Y}_1 + I_{zz} \ddot{\varphi}_1 + R_1 \cdot K_Y \cdot (Y_1 + \int_0^t R_1 d\varphi_1 - Y_2 + \int_0^t R_2 d\varphi_2) &= \tau_{\mu 1}
 \end{aligned}
 \tag{4.25}$$

可以得到:

$$\begin{aligned}
 \ddot{X}_1 &= \frac{M \cdot c \cdot \sin \varphi_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 + M \cdot c \cdot \cos \varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1^2 - K_{x1} \cdot X_1 - K_X \cdot X_1 + K_X \cdot X_2}{M} \\
 \ddot{Y}_1 &= \frac{-M \cdot c \cdot \cos \varphi_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 + M \cdot c \cdot \sin \varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1^2 - K_{r1} \cdot Y_1 - K_Y \cdot (Y_1 + \int_0^t R_1 d\varphi_1 - Y_2 + \int_0^t R_2 d\varphi_2)}{M}
 \end{aligned}
 \tag{4.26}$$

将式(4.26)带入式(4.25)可得:

$$\begin{aligned}
& -M \cdot c^2 \cdot \sin^2 \varphi_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 - M \cdot c^2 \cdot \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1^2 + c \cdot \sin \varphi \cdot K_{x1} \cdot X_1 \\
& + c \cdot \sin \varphi \cdot K_x \cdot X_1 - c \cdot \sin \varphi \cdot K_x \cdot X_2 - M \cdot c^2 \cdot \cos^2 \varphi_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 \\
& + M \cdot c^2 \cdot \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1 \cdot \dot{\varphi}_1^2 - c \cdot \cos \varphi_1 \cdot K_{y1} \cdot Y_1 \\
& - c \cdot \cos \varphi_1 \cdot K_y \cdot (Y_1 + \int_0^t R_1 d\varphi_1 - Y_2 + \int_0^t R_2 d\varphi_2) \\
& + I \cdot \ddot{\varphi}_1 + R_1 \cdot K_y \cdot (Y_1 + \int_0^t R_1 d\varphi_1 - Y_2 + \int_0^t R_2 d\varphi_2) = \tau_{\varphi 1}
\end{aligned} \tag{4.27}$$

即:

$$\begin{aligned}
& (I - M \cdot c^2) \cdot \ddot{\varphi}_1 = \tau_{\varphi 1} - c \cdot \sin \varphi_1 \cdot K_{x1} \cdot X_1 - c \cdot \sin \varphi_1 \cdot K_x \cdot X_1 \\
& + c \cdot \sin \varphi_1 \cdot K_x \cdot X_2 + c \cdot \cos \varphi_1 \cdot C_{y1} \cdot \dot{Y}_1 + c \cdot \cos \varphi_1 \cdot K_{y1} \cdot Y_1 \\
& + c \cdot \cos \varphi_1 \cdot K_y \cdot (Y_1 + \int_0^t R_1 d\varphi_1 - Y_2 + \int_0^t R_2 d\varphi_2) \\
& - R_1 \cdot K_y \cdot (Y_1 + \int_0^t R_1 d\varphi_1 - Y_2 + \int_0^t R_2 d\varphi_2)
\end{aligned} \tag{4.28}$$

同理根据系统状态方程的后 3 个方程:

$$\begin{aligned}
& M \ddot{X}_2 - M \cdot c \cdot \sin \varphi_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 - M \cdot c \cdot \cos \varphi_2 \cdot \dot{\varphi}_2^2 - K_x \cdot X_1 + K_{x2} \cdot X_2 + K_x \cdot X_2 = 0 \\
& M \ddot{Y}_2 + M \cdot c \cdot \cos \varphi_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 - M \cdot c \cdot \sin \varphi_2 \cdot \dot{\varphi}_2^2 + K_{y2} \cdot Y_2 - K_y \cdot (Y_1 + \int_0^t R_1 d\varphi_1 - Y_2 + \int_0^t R_2 d\varphi_2) = 0 \\
& -M \cdot c \cdot \sin \varphi_2 \cdot \ddot{X}_2 + M \cdot c \cdot \cos \varphi_2 \cdot \ddot{Y}_2 + I_{zz} \ddot{\varphi}_2 - R_2 \cdot K_y \cdot (Y_1 + \int_0^t R_1 d\varphi_1 - Y_2 + \int_0^t R_2 d\varphi_2) = \tau_{\varphi 2}
\end{aligned} \tag{4.29}$$

可以得到:

$$\begin{aligned}
\ddot{X}_2 &= \frac{-M \cdot c \cdot \sin \varphi_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 - M \cdot c \cdot \cos \varphi_2 \cdot \dot{\varphi}_2^2 - K_x \cdot X_1 + K_{x2} \cdot X_2 + K_x \cdot X_2}{-M} \\
\ddot{Y}_2 &= \frac{-M \cdot c \cdot \cos \varphi_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 + M \cdot c \cdot \sin \varphi_2 \cdot \dot{\varphi}_2^2 - K_{y2} \cdot Y_2 + K_y \cdot (Y_1 + \int_0^t R_1 d\varphi_1 - Y_2 + \int_0^t R_2 d\varphi_2)}{M}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

将式(4.30)代入式(4.29)可得:

$$\begin{aligned}
& -M \cdot c^2 \cdot \sin^2 \varphi_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 - M \cdot c^2 \cdot \sin \varphi_2 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \dot{\varphi}_2^2 - K_X \cdot c \cdot \sin \varphi_2 \cdot X_1 \\
& + K_{X2} \cdot c \cdot \sin \varphi_2 \cdot X_2 + K_X \cdot c \cdot \sin \varphi_2 \cdot X_2 - M \cdot c^2 \cdot \cos^2 \varphi_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 \\
& + M \cdot c^2 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin \varphi_2 \cdot \dot{\varphi}_2^2 - K_{Y2} \cdot c \cdot \cos \varphi_2 \cdot Y_2 \\
& + K_Y \cdot c \cdot \cos \varphi_2 \cdot (Y_1 + \int_0^t R_1 d\varphi_1 - Y_2 + \int_0^t R_2 d\varphi_2) \\
& + I_{ZZ} \ddot{\varphi}_2 - R_2 \cdot K_Y \cdot (Y_1 + \int_0^t R_1 d\varphi_1 - Y_2 + \int_0^t R_2 d\varphi_2) = \tau_{\varphi 2}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

即:

$$\begin{aligned}
& (I - M \cdot c^2) \cdot \ddot{\varphi}_2 = \tau_{\varphi 2} - K_{X2} \cdot c \cdot \sin \varphi_2 \cdot X_2 - K_X \cdot c \cdot \sin \varphi_2 \cdot X_2 \\
& + K_X \cdot c \cdot \sin \varphi_2 \cdot X_1 + K_{Y2} \cdot c \cdot \cos \varphi_2 \cdot Y_2 \\
& - K_Y \cdot c \cdot \cos \varphi_2 \cdot (Y_1 + \int_0^t R_1 d\varphi_1 - Y_2 + \int_0^t R_2 d\varphi_2) \\
& + R_2 \cdot K_Y \cdot (Y_1 + \int_0^t R_1 d\varphi_1 - Y_2 + \int_0^t R_2 d\varphi_2)
\end{aligned} \tag{4.32}$$

到此,椭圆齿轮系统的数学模型分析完毕,第五章将对它的动态特性进行仿真分析。

4.4 本章小结

本章使用第三章提出的建模方法,完成了对椭圆齿轮啮合系统的建模,从建立的系统方程来看,可以得出如下结论:

1、这是一个高阶的非线性系统,齿轮的扭转振动和轴向振动存在耦合,系统的振动来自于椭圆的偏心所产生的离心力和扭转惯性力。

2、由于椭圆齿轮存在固有偏心,这一特性使得椭圆齿轮传动存在本质的动态特征。这样的特征决定了椭圆齿轮传动的转速不能过高,否则将导致轴承等支承系统的破坏。

3、对于这样的非线性方程组,无法使用常用于线性系统的状态空间方法在计算机中进行表达,因此直接对他进行计算机仿真无疑是十分不方便的,对此,本文采用了在拓扑键合图中常用的状态空间转换的方法对它进行了数学处理,使其能比较方便的进行仿真分析。

第五章 椭圆齿轮传动 MATLAB/SIMULINK 仿真分析

上一章中,通过使用拉格朗日键图对椭圆齿轮啮合系统进行分析,建立了系统的数学模型。为了仿真分析的方便,已经将系统的方程从二阶转化为一阶,接下来就需要对系统做仿真模拟和分析。

然而对于高阶的非线性方程组,使用传统的解析方法编程进行运算,显然是难以得到良好效果的。经过查阅资料的反复尝试,本文采用了 Simulink 软件作为分析工具,达到了较好的仿真效果。

5.1 基于 Simulink 软件的机械系统仿真的一般方法

MATLAB 作为目前十分流行的通用计算机数学元件,其附带 Simulink 是一个动态的、可视化的仿真软件,它具有建模方便,仿真功能强大,自动模型分析等优势。直接调用其功能模块,可以很好的实现机械系统中各种力的控制作用和非线性阻尼等的模拟仿真,从而为机械系统提供一个强大而方便的仿真和建模工具。

简单的机械系统是由一个质量系统、弹性系统和阻尼系统组成的动力学系统,其动力学方程可以描述为下叙的二阶微分方程:

$$m\ddot{x} + f(\dot{x}, x, t) = P(\dot{x}, x, t) \quad (5.1)$$

其中系统的输入控制作用力 $P(\dot{x}, x, t)$ 以及阻力 $f(\dot{x}, x, t)$ 满足有关位移、速度和时间的一定函数关系,以模拟实际机械系统中普遍存在的各种控制力的作用和非线性特性的阻力的作用,如各种类型的摩擦阻力,以速度、位移和时间等为控制量的动力作用等等,这些控制力和非线性特性在 Simulink 中有现成的功能模块或他们的组合,可以直接供用户调用。

取速度 x_2 和位移 x_1 为相互独立的量状态变量,可以把式(5.1)转化为以下的一阶微分方程组:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{m}[P(x_2, x_1, t) - f(x_2, x_1, t)] \end{cases} \quad (5.2)$$

采用 2 个积分器的级联结构,在 Simulink 中调用相应功能模块进行参速设置和连线建模,得到如图 5-1 系统模型的基本结构形式。

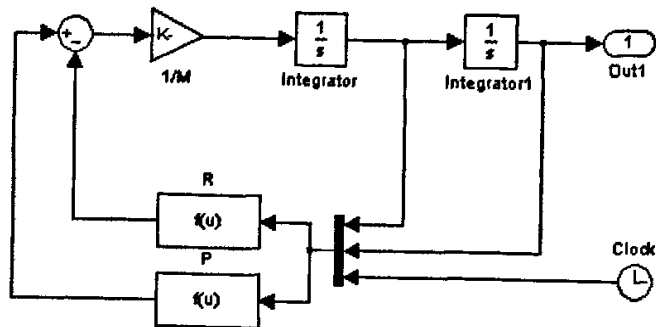


图 5-1

对于实际机械振动系统经过线性化处理, 可得到线性振动系统模型, 其基本动力学方程为:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = P(t) \quad (5.3)$$

其 Simulink 模型为:

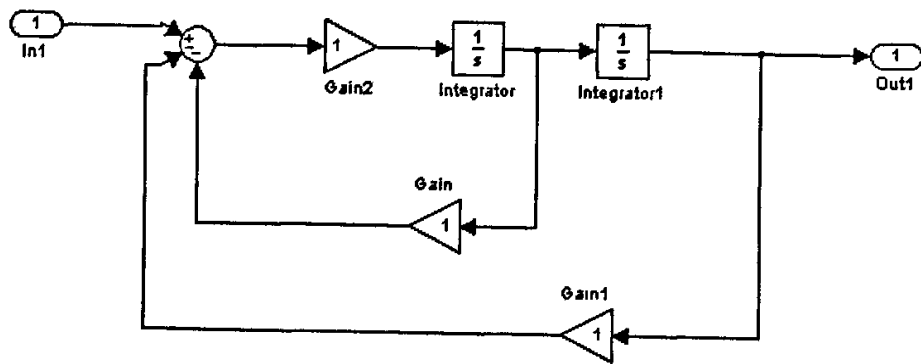


图 5-2

当然, 对于多自由度振动系统各自由度之间所存在的相互耦合, 根据系统作用力关系可以建立多输入多输出的模型。例如, 两自由度的线性系统的动力学方程为:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + a_{11}\dot{x}_1 + a_{12}x_1 + a_{13}\dot{x}_2 + a_{14}x_2 = f_1 \\ m_2\ddot{x}_2 + a_{21}\dot{x}_1 + a_{22}x_1 + a_{23}\dot{x}_2 + a_{24}x_2 = f_2 \end{cases} \quad (5.4)$$

其中系数 a_y 有两自由度的线性弹簧系数或者粘性阻尼系数组成。取两质量元件所受外力 f_1 、 f_2 为输入量, 两质量的位移 x_1 、 x_2 为输出量, 则它的系统模型如图 5-3 所示。模型中把 $\dot{x}_1$ 、 x_1 、 $\dot{x}_2$ 和 x_2 经过“复用”模块处理以后, 分别对应于输出量的 $u(1)$ 、 $u(2)$ 、 $u(3)$ 和 $u(4)$ 。其中函数自定义模块 Fcn_1 和 Fcn_2 的输出定义为两质量元件速度和位移关于系数 a_y 的线性组合。

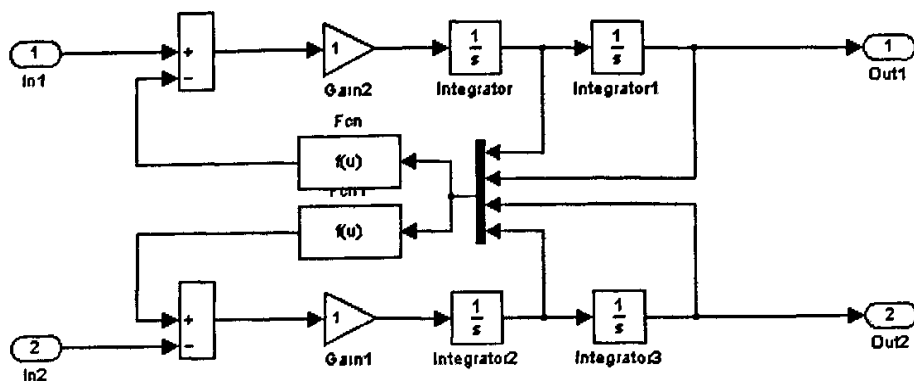


图 5-3

仿真实例，设一单自由度振动系统动力学方程如下：

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx^3 = P(t)$$

则根据这一方法，建立其 Simulink 模型如下：

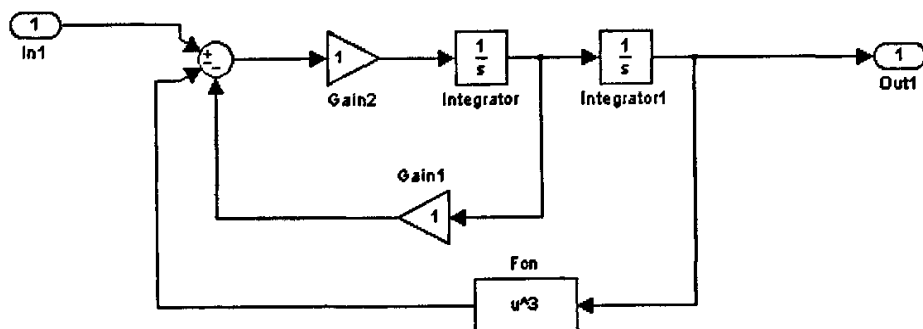


图 5-4

加入参数值 $m=1$, $c=0.05$, $k=1$, $P(t)=7.5\cos(t)$ ，子定义数学模块 Fcn 表达非线性弹簧，其定义值为： u^3 。得到分析结果如图 5-5。不难看出这个非线性系统的振动存在不可预测性，这也是非线性系统和线性系统的重要区别之一。

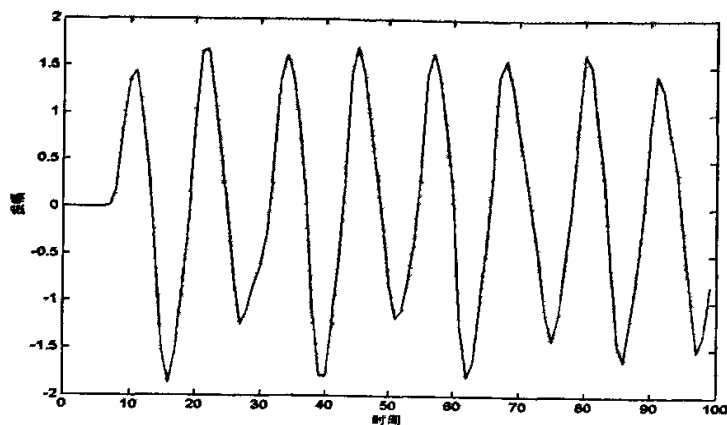


图 5-5

5.2 椭圆系统动力学模型仿真分析

根据上一章对于椭圆齿轮系统数学模型进行的分析, 得到结果式(4.31)和式(4.32)。应用 5.1 所提出的方法, 将它转化为 Simulink 模型, 对系统进行仿真分析。

5.2.1 椭圆齿轮系统仿真模型的建立

椭圆齿轮系统的 SIMULINK 模型如图 5-6 所示:

其中, 12 个积分器分别表示 $\ddot{X}_1 \rightarrow \dot{X}_1$ 、 $\dot{X}_1 \rightarrow X_1$ 、 $\ddot{Y}_1 \rightarrow \dot{Y}_1$ 、 $\dot{Y}_1 \rightarrow Y_1$ 、 $\ddot{\phi}_1 \rightarrow \dot{\phi}_1$ 和 $\dot{\phi}_1 \rightarrow \phi_1$ 以及 $\ddot{X}_2 \rightarrow \dot{X}_2$ 、 $\dot{X}_2 \rightarrow X_2$ 、 $\ddot{Y}_2 \rightarrow \dot{Y}_2$ 、 $\dot{Y}_2 \rightarrow Y_2$ 、 $\ddot{\phi}_2 \rightarrow \dot{\phi}_2$ 和 $\dot{\phi}_2 \rightarrow \phi_2$ 的积分。

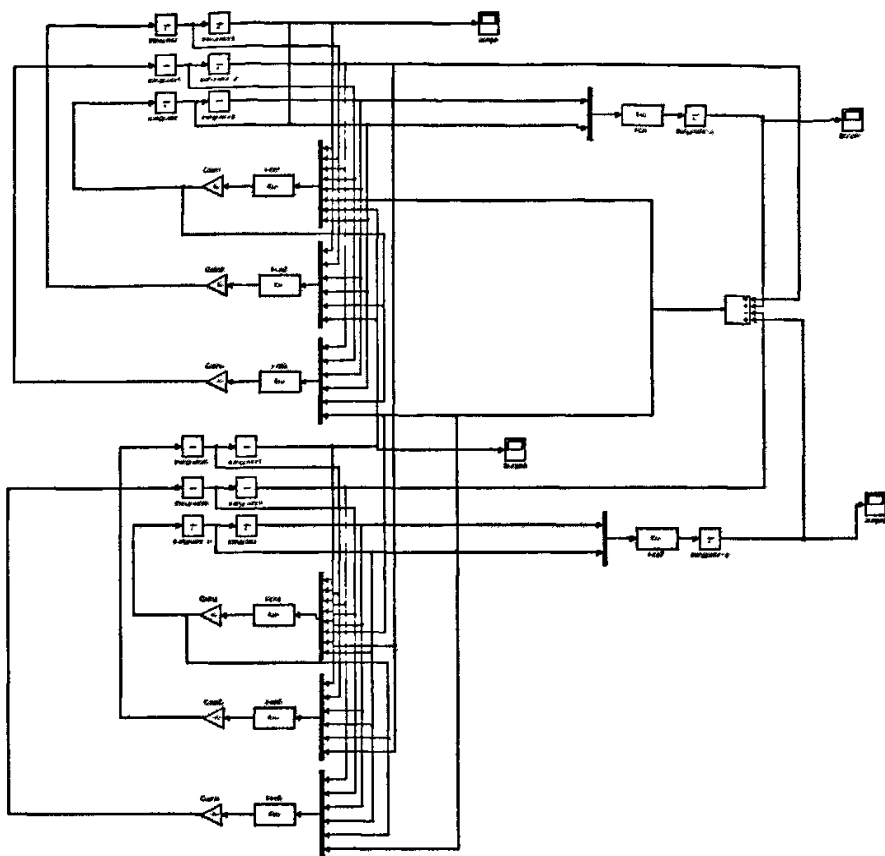


图 5-6 椭圆齿轮动态特性 SIMULINK 仿真模型图

5.2.2 椭圆偏心率参数对于系统动态特性影响的研究

根据 5.2.1 得到的系统 Simulink 模型，现将相关参数 ($M=25\text{kg}$, $a=0.5\text{m}$, $c=0.4\text{m}$, $k_{x1}=k_{y1}=k_{x2}=k_{y2}=1.2 \times 10^6 \text{N/m}$, $k_x=2.14 \times 10^6 \text{N/m}$, $I=2.53 \text{kg} \cdot \text{m}^2$) 带入系统方程。

对于轮齿的啮合刚度，这里沿用圆齿轮的相关结论，根据 3.3 节的相关分析，在这里采用复杂且精确的材料力学模型来计算轮齿的刚度，显然是没有必要的。因此，本文采用较为简单的，变截面悬臂梁模型来计算椭圆齿轮的轮齿刚度，将轮齿简化为，两段长度分别为 l_1 , l_2 的变截面悬臂梁，根据材料力学的相关分析，该梁相对于作用点 P 的挠度为：

$$f = -\frac{P}{3E} \left(\frac{l_1^3}{I_1} + \frac{l_2^3}{I_2} \right) - \frac{Pl_1 l_2}{EI_2} (l_1 + l_2)$$

即：

$$k_y = -\frac{1}{3E} \left(\frac{l_1^3}{I_1} + \frac{l_2^3}{I_2} \right) - \frac{l_1 l_2}{EI_2} (l_1 + l_2)$$

将相关参数带入计算可知， $k_y = 4.37 \times 10^5 \text{ n/m}$ 。

通过 SIMULINK 软件的仿真，观察系统在主动轮输入恒定转速 1rad/s 时的，主动轮和从动轮在 X 方向的振动情况。

主动轮的响应如下：

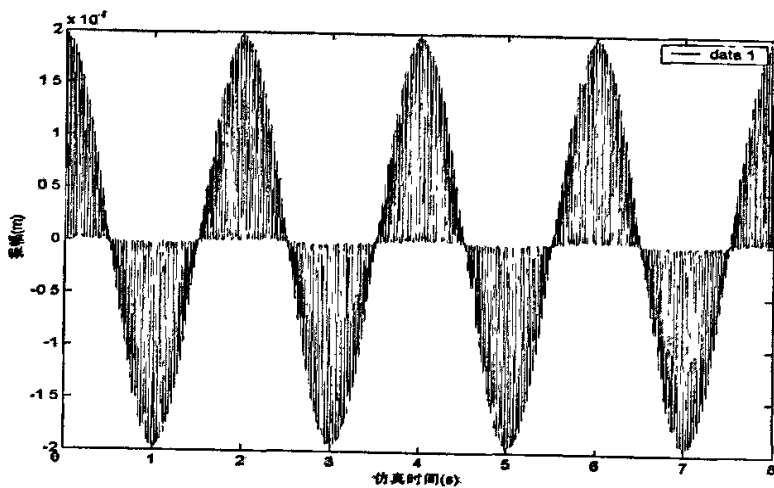


图 5-7 偏心率为 0.8 时主动轮响应

从动轮的响应如下：

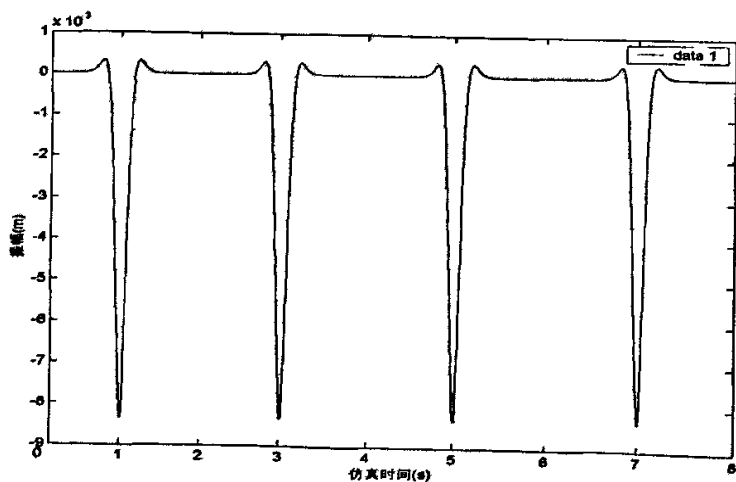


图 5-8 偏心率为 0.8 时从动轮响应

将椭圆齿轮长半轴不变，焦距 c 改变为 0.2m ，此时偏心率为 $e=0.4$ ，则齿轮的质量改变为 $m=38.2\text{kg}$ ，转动惯量 $I=4.27\text{kg}\cdot\text{m}^2$ ，此时齿轮主动轮响应为：

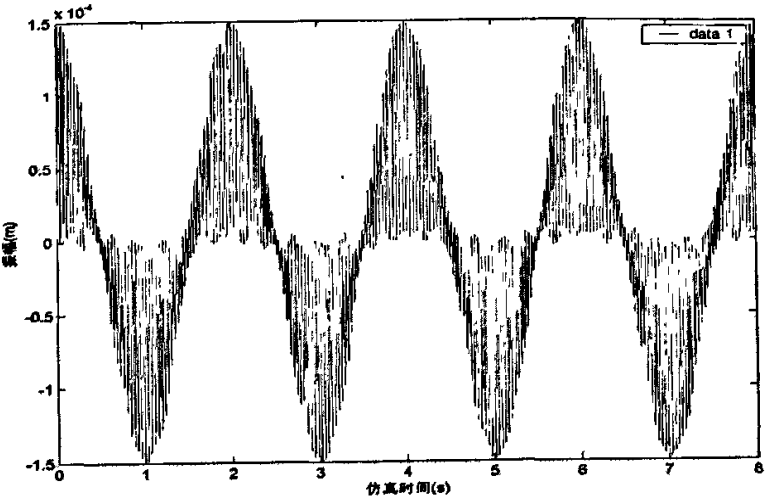


图 5-9 偏心率为 0.4 时主动轮响应

从动轮的响应如下：

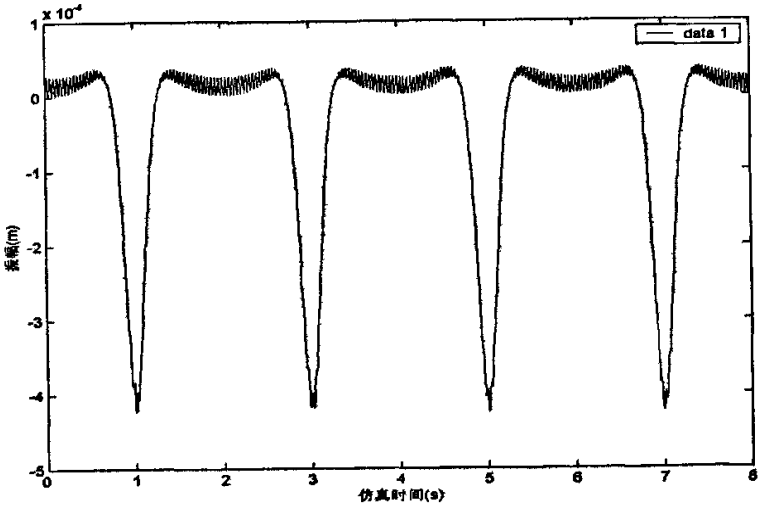


图 5-10 偏心率为 0.4 时从动轮响应

将椭圆齿轮长半轴不变，焦距 c 改变为 0.1m ，此时偏心率为 $e=0.2$ ，则齿轮的质量改变为 $m=40.8\text{kg}$ ，转动惯量 $I=5.05\text{kg}\cdot\text{m}^2$ ，此时齿轮主动轮响应为：

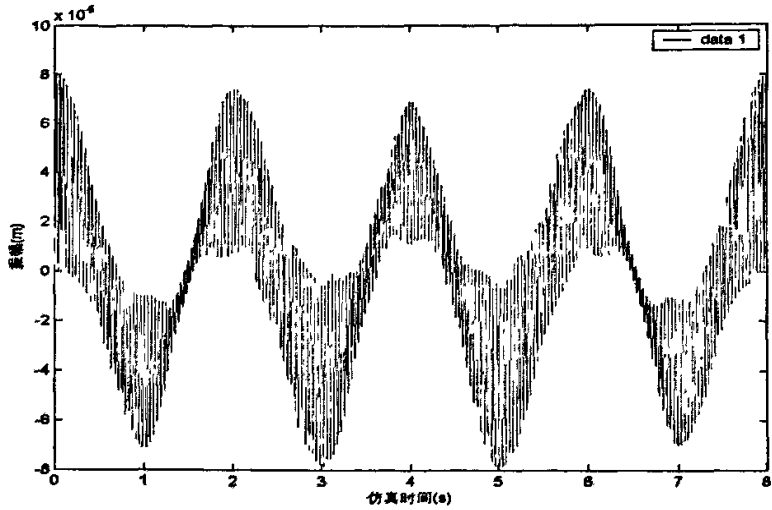


图 5-11 偏心率为 0.2 时主动轮响应

从动轮的响应如下：

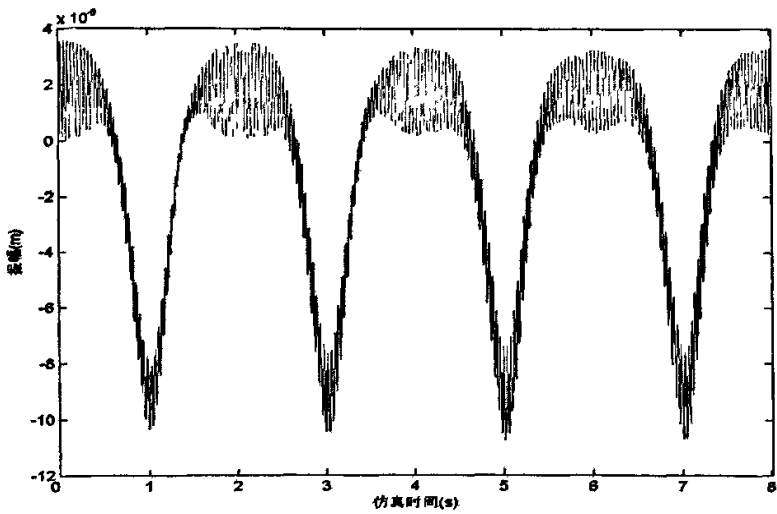


图 5-12 偏心率为 0.2 时主动轮响应

将椭圆齿轮长半轴不变，焦距 c 改变为 0.05m ，此时偏心率为 $e=0.1$ ，则齿轮的质量改变为 $m=41.4\text{kg}$ ，转动惯量 $I=5.15\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ，此时齿轮主动轮响应为：

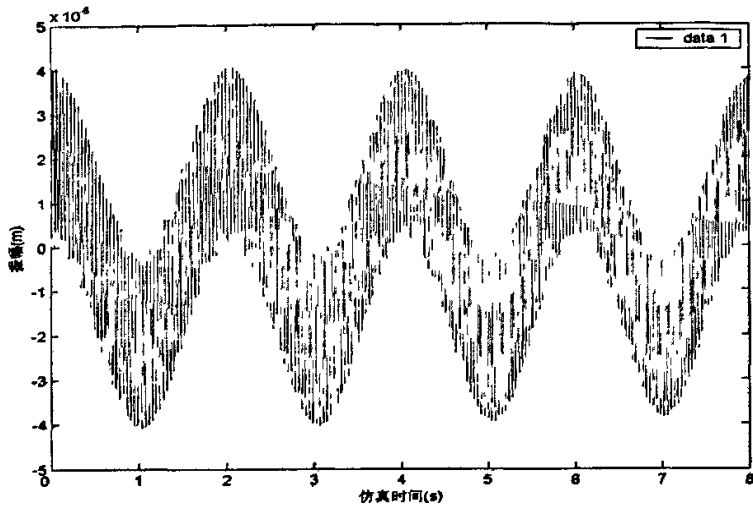


图 5-13 偏心率为 0.1 时主动轮响应

从动轮响应如下:

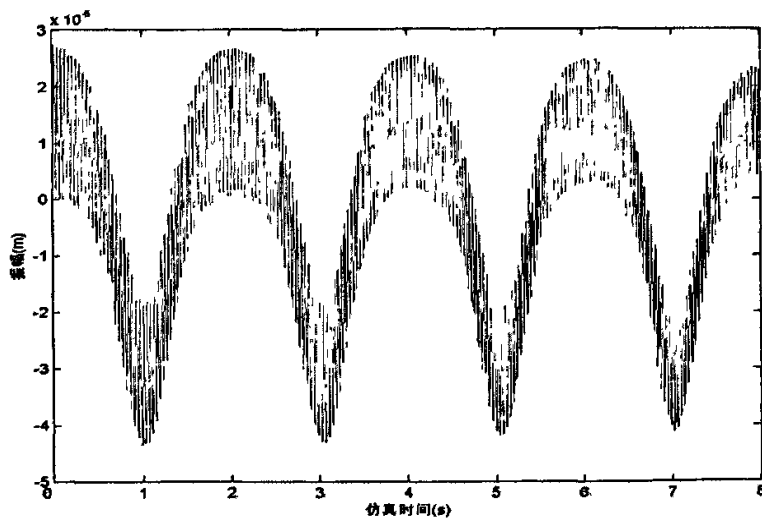


图 5-14 偏心率为 0.1 时从主动轮响应

将椭圆齿轮长半轴不变, 焦距 c 改变为 0.025m , 此时偏心率为 $e=0.05$, 则齿轮的质量改变为 $m=42.1\text{kg}$, 转动惯量 $I=5.37\text{kg} \cdot \text{m}^2$, 此时齿轮主动轮响应为:

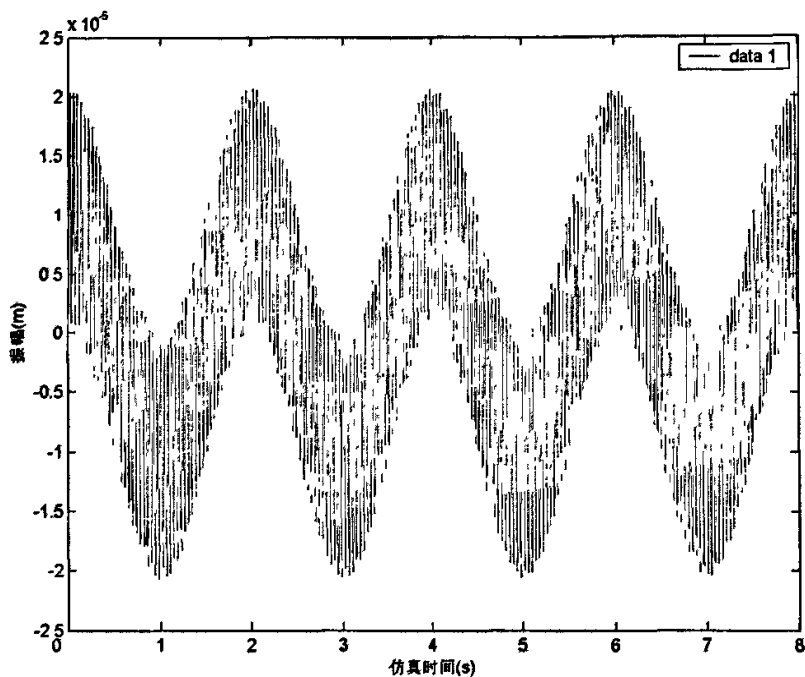


图 5-15 偏心率为 0.05 时主动轮响应

从动轮响应如下：

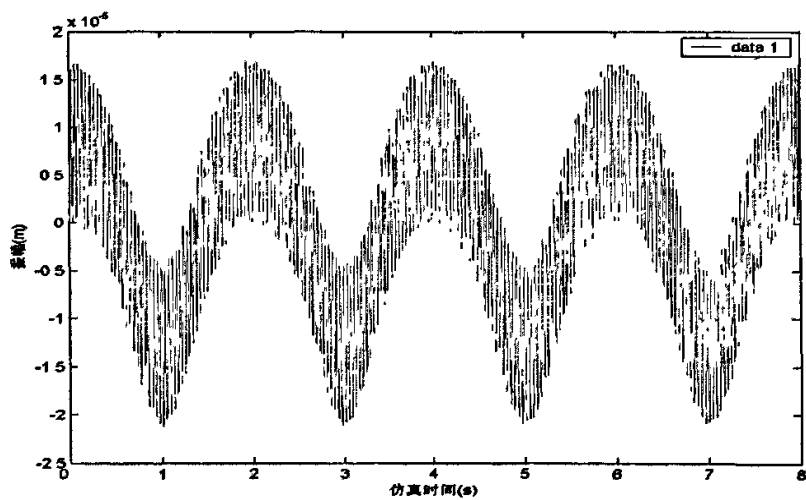


图 5-16 偏心率为 0.05 时从主动轮响应

通过仿真还可以得出，当系统的偏心率为 0 时，主、从动轮不存在振动，运行完全平稳。即：椭圆齿轮退化为理想圆齿轮，离心力因素和扭转加速度因素

的影响已经不复存在。

通过上述的仿真数据,可用一个简单的曲线来表示椭圆齿轮偏心率与主动轮振幅之间存在的关系,可以看出他们存在着近似线性的关系:

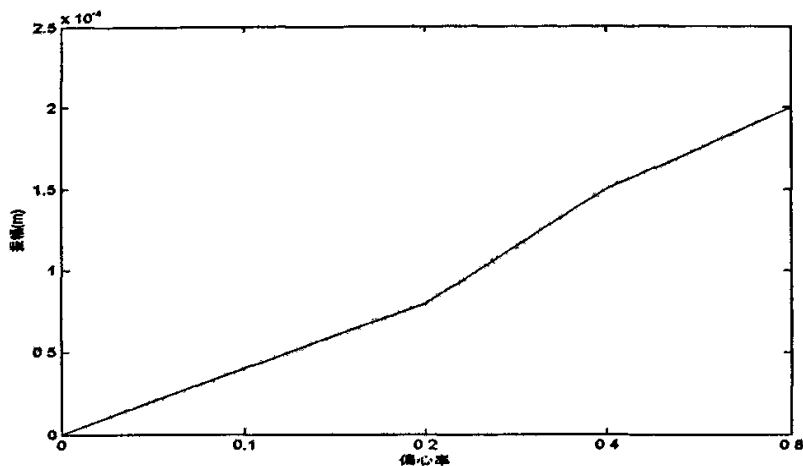


图 5-15 主动轮振幅与齿轮偏心率间的关系

相比之下,从动轮的振幅则随着偏心率的降低而迅速衰减:

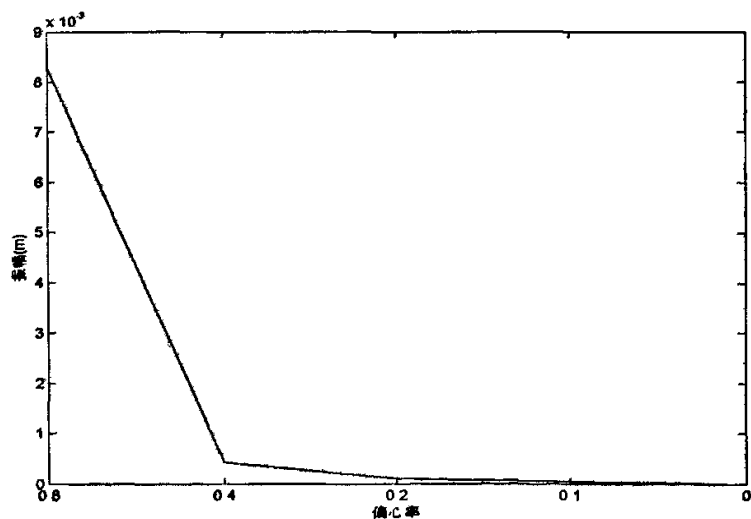


图 5-16 从动轮振幅与齿轮偏心率之间的关系

5.3 本章小节

1、由于除传动比函数不同之外,椭圆齿轮与其他非圆齿轮并无本质差别,

因此本文所提出的方法,不仅适用于椭圆齿轮,而且可以应用于其他非圆齿轮的动力学分析。

2、从椭圆齿轮的偏心率减小逐渐退化为圆齿轮的过程中,齿轮的振动情况可以看出,椭圆齿轮所具有的质量偏心,是导致其振动的主要因素(当偏心为零时,振动也随之消失)。并且当椭圆齿轮的偏心率很小时,主动轮和从动轮的振动情况开始接近,这也是和实际相吻合的。

3、使用该方法对各种不同参数的椭圆齿轮进行仿真,反映出不同参数条件下,椭圆齿轮的振动情况。虽然齿轮的质量和转动惯量发生了改变,但这些并不是改变齿轮振动的关键因素。椭圆齿轮的振幅明显随着其偏心率的增大而增大,并且存在着近似线性的关系。

4、从仿真的情况可以看出,从动轮的振动要比主动轮更为激烈,其振幅随偏心率增大而显著增大。从椭圆齿轮啮合的原理来分析,是因为主动轮在啮合半径最大点处正好是从动轮啮合半径最小点处,在这个区域附近的传动比随时间变化最为迅速,由此而形成的冲击是十分明显的。正是这样的特性,限制了椭圆齿轮的偏心率不能过大,否则将因强烈的振动而造成轴承或齿轮的损坏。

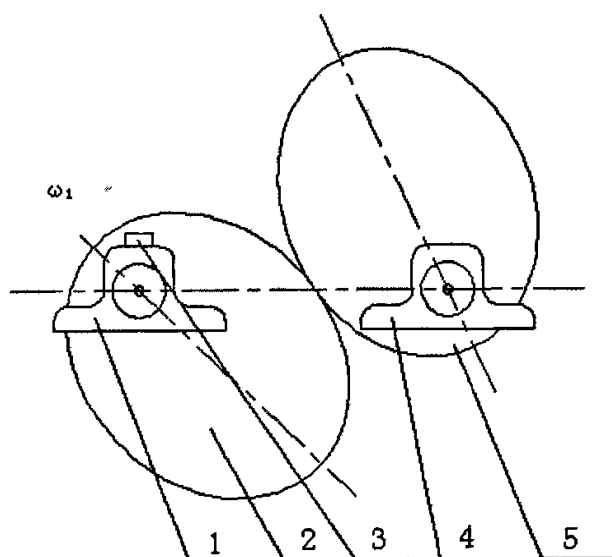
应当说明的是,这里使用的椭圆齿轮轮齿刚度计算方法,由于这个因素在本文讨论模型中为次要因素,因此沿用圆齿轮的相关结论中最为简单的模型。

第六章 试验分析

第五章通过仿真对椭圆齿轮的振动特性做出了几种分析,本章通过对三组不同偏心率的椭圆齿轮进行振动测试,以及对比试验数据和仿真数据进行分析来证明本文椭圆齿轮动力学模型以及相关结论的正确性。

6.1 试验装置及原理

为了证明理论分析的正确性,我们采用试验对比的方法。被测的齿轮均在同一试验平台,使用同样的测试仪器进行测试,试验装置如图 6-1 所示:



1. 主动轮轴承座 2.主动轮 3.传感器 4.从动轮轴承座 5.从动轮

图 6-1 试验装置原理图

试验齿轮为自主加工的三对椭圆齿轮。齿轮的基本参数如下:

齿轮副 1, 长轴 $a=50\text{mm}$, 偏心距 $c=40\text{mm}$, 偏心率 $e=0.8$, 齿轮厚度 16mm , 质量 0.774kg 。

齿轮副 2, 长轴 $a=50\text{mm}$, 偏心距 $c=20\text{mm}$, 偏心率 $e=0.4$, 齿轮厚度 16mm , 质量 1.014kg 。

齿轮副 3, 长轴 $a=50\text{mm}$, 偏心距 $c=10\text{mm}$, 偏心率 $e=0.2$, 齿轮厚度 16mm , 质量 1.437kg 。

由主动轮输入恒定转速, 并通过压电传感器将振动信号发送至 DH5928 振动测试分析仪, 然后由电脑输出信号。试验使用的测试仪器为 DH5928 型振动测试

分析仪和试验平台为圆齿轮传动测试试验平台改装而来。分别如下图：

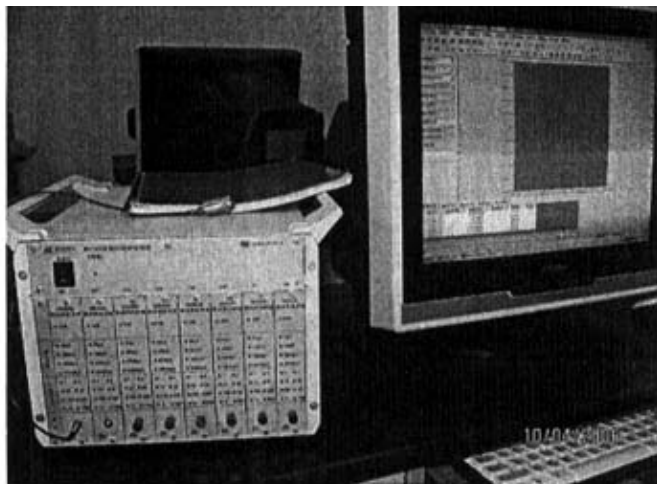


图 6-2 DH5928 测试仪

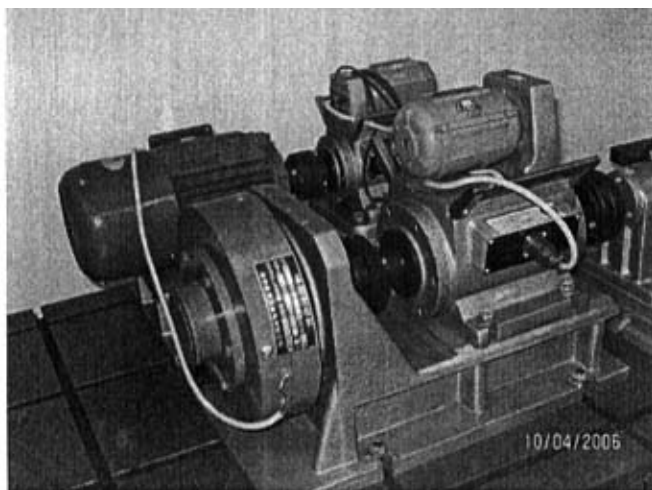


图 6-3 测试使用的传动测试平台

6.2 试验结果及数据分析

通过对相关椭圆齿轮的测试，试验结果如下：

齿轮副 1，在转速为 10rad/s 下，主动轮振动测试结果为：

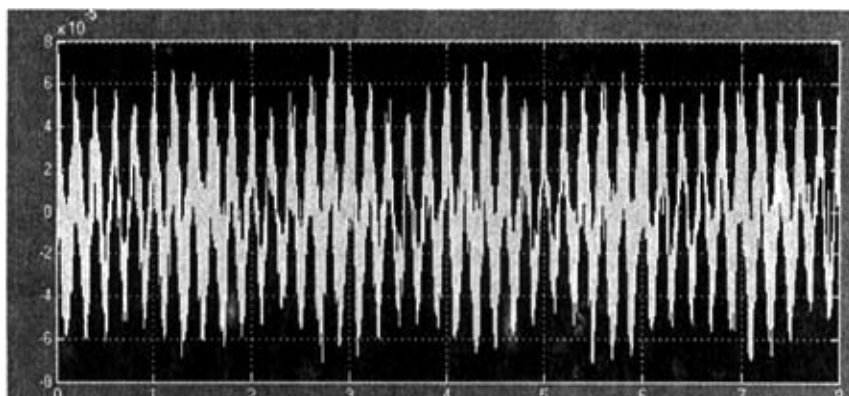


图 6-2 齿轮副 1 主动轮振动测试结果

齿轮副 2，在转速为 10rad/s 下，主动轮振动测试结果为：

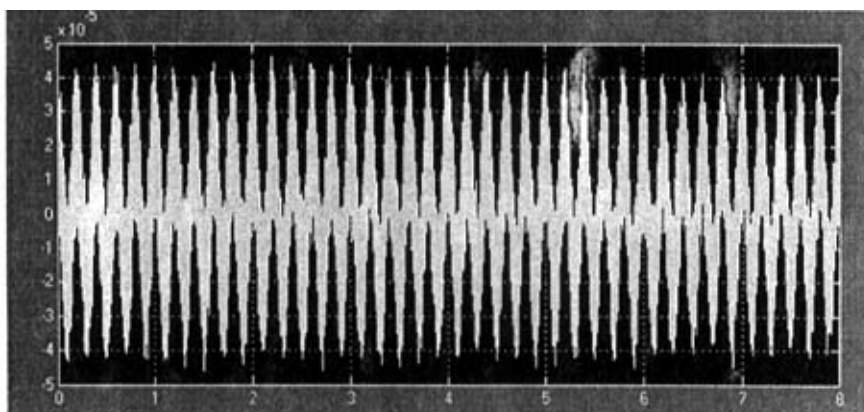


图 6-3 齿轮副 2 主动轮振动测试结果

齿轮副 3，在转速为 10rad/s 下，主动轮振动测试结果为：

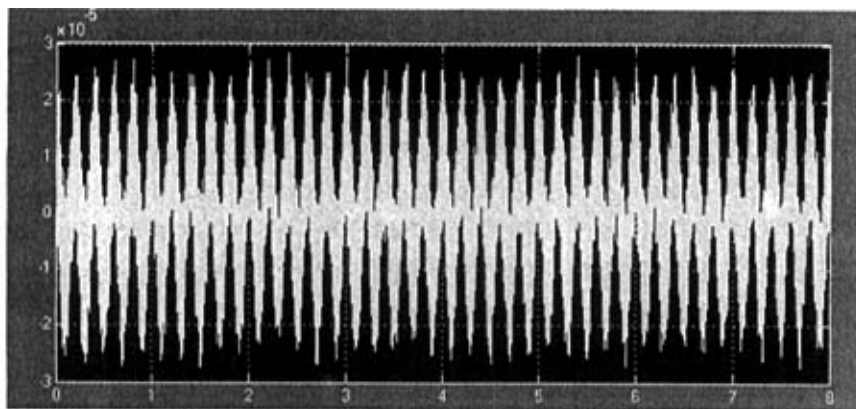


图 6-4 齿轮副 3 主动轮振动测试结果

主动轮振幅与齿轮偏心率之间的关系:

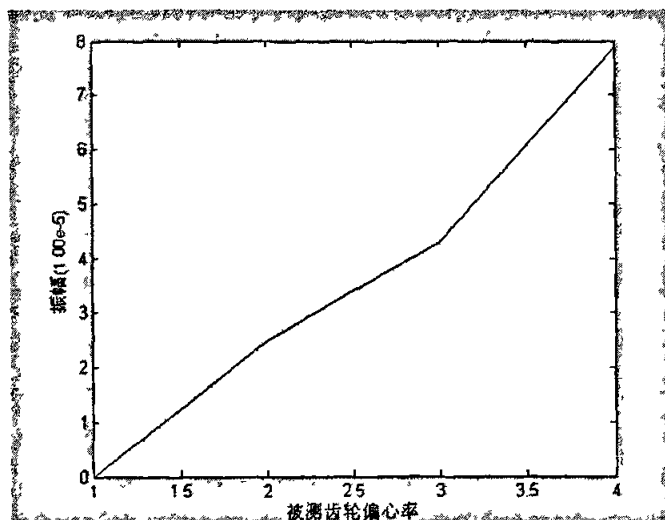


图 6-5 试验测得齿轮偏心率 and 主动轮振幅之间的关系

6.3 本章小结

虽然因为仪器误差和噪声等因素以及理论模型中忽略的一些因素的影响,试验曲线与理论仿真曲线相比,有一些不规则。但是从 3 对椭圆齿轮的实际测试数据曲线中可以明显看出,3 组被测齿轮的振幅与它们的偏心率存在着类似线性的关系,这一点也与仿真曲线得出的结论一致。

从以上分析可以看出理论结果和试验数据吻合较好,这也证明了本文提出的理论方法以及计算机仿真分析的正确性。

第七章 全文总结

本文通过研究以往圆齿轮动力学建模方法以及综合拉格朗日键合图的特点和优势,推导出一种新的适用于非圆齿轮的建模方法。并在此基础上,第一次建立了一对椭圆齿轮的动力学模型,并对系统方程的数学变形,从而完成了这个模型的计算机仿真分析。通过对于仿真数据的观察和分析,推导出椭圆齿轮振动的几种特性。随后,从试验数据与仿真理论数据的对比来说明模型以及相关结论的正确性。通过全文的分析,可以得出如下结论:

1、在以往的圆齿轮振动模型中,有不少较为复杂的模型考虑到了由轮齿摩擦、质量偏心等原因造成的齿轮轴承横向振动的模型。虽然这些模型中,上述因素并非最主要的激励源,但是这些方法对我们建立非圆齿轮系统的振动模型提供了很好的参考和借鉴。从本文的分析可以表明,这些圆齿轮振动系统中并非最主要的激励因素在非圆齿轮系统中很可能是决定性的激励因素。

2、本文通过对拉格朗日键合图的详细分析,针对非圆齿轮这样的平面偏心旋转振动系统做了专门的拓展,成功的使用这种新方法完成了非圆齿轮系统动力学建模的理论推导。这种方法所建立的数学模型考虑了在非圆齿轮系统中最关键的因为速比变化以及质量偏心引发的振动,而忽略了圆齿轮系统中占主导因素的时变啮合刚度、啮入啮出冲击等因素。这种方法可以应用于所有非圆齿轮振动系统的建模,对于其他非圆传动(如非圆带传动等)都具有指导意义。

3、从第三章所建立的数学模型可以看出,如果需要更精确地建立系统模型,还可以加入各种因素(如时变啮合刚度,以及各种冲击等),都可以通过拉格朗日键合图这个工具将它转换为数学模型。这样一个具有可扩展性的模型框架,可以作为后续研究的基础。

4、本文通过对建模方法的实际应用,建立了一对椭圆齿轮的系统模型。对于这样的高阶非线性系统,在进行计算机仿真之前采取必要的数学处理,能让计算机仿真变得更加易于实现。本文采用了拓扑键合图中用于实现系统方程降阶的数学方法,对模型进行了处理,为这类非线性系统的计算机仿真,提供了一种新的思路。

5、本文采用了 Simulink/Matlab 软件对各种不同偏心率的椭圆齿轮系统模型

进行了仿真,通过对比观察椭圆齿轮振动的特性,可以发现这些特性与圆齿轮的振动特性有相当大的不同。椭圆齿轮因为本身的几何非线性而导致的本质的动态特性在仿真数据中明显的表现出来。主动轮和从动轮的振动情况差异较大,这也是椭圆齿轮振动的重要特征。

6、数值仿真的结果和试验数据有较好的一致性,从仿真结果中总结的规律在试验数据中可以清楚的得到验证。这表明本文所提出的建模方法和数值仿真方法的正确性。本文进行的理论研究以及所编制的软件程序具有较大的理论意义和一定的工程实用价值。

参 考 文 献

- [1] 李润方, 王建军. 齿轮系统动力学. 北京: 科学出版社. 1997 第一版
- [2] 王建军, 李润方. 齿轮系统动力学的理论体系. 中国机械工程. 1998, 9 (12): 55—58
- [3] Buckingham. Analytical Mechanics of Gears. Dover. New York, 1949
- [4] 王建军等. 齿轮系统参数振动问题研究综述. 振动与冲击. 1997 16 (4): 69—73
- [5] L Ostinguy, I Constantinescu. 直齿轮的动态响应. 齿轮. 1985 9 (1)
- [6] Benton M, et al, Factors influencing instability and resonances in geared systems. ASME J. Mech. Des, 1981 103:372
- [7] Bollinger J G, et al, Instability potential of high speed gearing. Industrial Mathematics, 1967, 17, part 2: 38-55
- [8] Toridan G V, et al. Dynamic stability of two-stage gear train under the influence of variable meshing stiffness. ASME Eng. Ind, 1997 99:785-791
- [9] Benton M, et al, Simulation of resonances and instability conditions in pinion gear system. ASME Mech. Des, 1978, 100:26-35
- [10] Kumer A S, et al. On dynamic tooth load and stability of a spur-gear system using the state-spacing approach. ASME Mech. Trans. Auto. Des, 1985, 107:54-60
- [11] Knenkay F. Dynamic behavior of high speed gears. I Mech. E, 1984, C317, 84
- [12] 王建军. 参数共振理论及其在齿轮传动动力稳定分析中的应用. 第一届全国齿轮动力学学术会议论文集. 上册 1985
- [13] 李继彬等. 在动态载荷下齿轮振动方程的稳定性分析. 昆明工学院学报. 1986
- [14] Zadoks R I, et al. Parametric stability of a two-degree-of freedom machine system, Part I. ASME Mech. Trans. Auto. Des, 1987, 109:210-215
- [15] Zadoks R I, et al. Parametric stability of a two-degree-of freedom machine system, Part II. ASME Mech. Trans. Auto. Des, 1987, 109:216-223
- [16] 王玉芳, 童忠纺. 齿轮加速度噪声的研究. 振动与冲击. 1991, 14 2 -48
- [17] 肖利民, 唐进元. 低噪声齿轮设计方法. 制造技术与机床. 1995,

No.5-7

- [18] Smith J D. Gear Noise and Vibration. Makker, New York , 1999
- [19] Welbourn D B. Fundamental knowledge of Gear Noise – A Survey. Proceedings of I. Mech. E. conference on “Noise and Vibrations of Engines and Transmissions” Grandfield Institute of Technology 1979,7 10-11
- [20] Munro R G. Review of the theory and measurement of gear transmission error. Proc. Of the Inst. Of Mechanical Engineers, First International conference on Gearbox Noise and Vibration, April 9-11 1992, Cambridge, PP3-9
- [21] Oswald Fred B. Effect of operating condintious on gearbox noise. NASA TM-105331,1992
- [22] 王勇, 章文俊. 齿轮传动系统非白噪声随即误差激振的建模. 科学通报. 1998, 43 (1) 1116—1118
- [23] 唐进元, 严海燕. 红外啮合齿轮传动啮合刚度计算. 机械传动. 2002 26 (4) 22—24
- [24] 汤和, 赵振英等. 理想齿轮噪声与振动谱的计算机仿真. 齿轮. 1990 14 (4) 11—14
- [25] 肖利民等. 减小齿轮的啮入冲击, 降低传动噪声. 第二届全国齿轮动力学学术会议论文文集. 1991
- [26] 姚文席, 魏任之. 渐开线齿轮的啮合冲击研究. 振动与冲击. 1990 4 57—61
- [27] 会田俊夫. 齿轮的精度与性能. 北京: 中国农业机械出版社. 1985 第一版
- [28] J D Smith. Gear and Their Vibration . Marcel Dekker, New York, 1983
- [29] 曾緯楷, 彭东林, 张光辉. 齿轮传动误差的精密测量. 工具技术. 1999 33 (4): 37—39
- [30] 万小毛, 鲍明, 赵淳生. 齿轮箱故障诊断. 技术综述. 振动、测试与诊断. 1990, 10 (1): 33—40
- [31] 额定宏、喻雄, 张和豪. 齿轮根部疲劳裂纹的诊断和断齿预报. 齿轮. 1987 第一期 38—43
- [32] 众顾, 屈梁生. 自适应消噪及其在齿轮箱噪声分析中的应用. 西安交通大学科技报告. 87—90
- [33] 李福生等. 非圆齿轮. 机械工业出版社. 北京: 1979 年
- [34] 李福生、林子光、张作督等. 非圆齿轮与特种齿轮传动设计. 机械工业出版社. 北京: 1983

- [35] 李明、孙涛、胡海岩. 齿轮传动转子-轴承系统动力学的研究进展. 振动工程学报. 第15卷第3期 2002年9月
- [36] 张尚才. 工程系统的键合图模拟和仿真. 机械工业出版社. 1993年10月
- [37] 郭世伟、任中全、何万库. 机械振动系统的 MATLAB 仿真分析. 煤矿机械. 2000年第12期
- [38] 冯鉴、郭世伟. 基于 Simulink 的机械系统可视化建模仿真分析. 煤矿机械. 2002.6
- [39] 林江、楼建勇. 斜齿圆柱齿轮传动系统动力学模型及动特性试验研究. 机械工程学报. 2003年7月 Vol. 39 No. 7
- [40] Raul G.Longoria and Vinoo A.Narayanan <Model and Design of an Inertial Vibration Reflector > ASME Journal of Mechanical Design ,Vol .119 ,No.1, pp.20-27, March 1997.
- [41] Leon Kowalczyk, <The Geometry and Kinematics of a Toothed gear of Variable Motion> Fibers & Textiles in Eastern Europe vol.11.No.3(42) 2003 July/September
- [42] R.G.Parker <Non-linear Dynamic Response of a spur gear pair: Modelling and experimental comparisons> Journal of Sound and Vibration(2000) 237(3), 435-455
- [43] B.Demeulenaere, J.De Schutter <Accurate Realization of Follower Motions in High-Speed Cam-Follower Mechanisms> Proceedings of ISMA 2002 Volume III
- [44] Ahmet Sagirli, Muharrem Erdem <Modeling the Dynamics and Kinematics of a Telescopic Rotary Crane by the Bond Graph Method> Nonlinear Dynamics 33:337-351, 2003
- [45] 高雪强. 非圆齿轮传动技术概述. 机械传动. 2003年3期
- [46] 谭伟明、梁燕飞、安军、陈就、宇野义幸. 渐开线非圆齿轮的齿廓曲线数学模型. 机械工程学报. 2002年5期
- [47] 何芳、曹利新、吴宏基、刘健. 非圆挠性传动(非圆链传动)的若干运动几何学基础问题. 大连理工大学学报
- [48] 谭伟明、宇野义幸. 渐开线齿廓非圆齿轮的变啮合角特性. 机械传动. 2001年2期
- [49] 侯东海、刘忠明、吴序堂. 用工具斜齿条法加工斜齿非圆齿轮的啮合理论模型. 机械工程学报. 2003年8期
- [50] 武丽梅、鲁墨武. 非圆齿轮技术的发展及应用. 沈阳航空工业学院

学报. 2000 年 1 期

[51] 徐晓俊、李华忠、唐德威、高业田. 非圆齿轮数控插齿加工程序的计算机辅助设计与仿真技术. 机械传动. 1996 年 04 期

[52] 董国庆、徐晓俊、唐德威、张春丽. 非圆齿轮精度指标及其综合测量方法的初步研究. 机械传动. 1999 年 03 期

[53] 孙文磊、庞远棣、庄志国. 非圆齿轮加工计算机仿真. 机械传动. 1995 年 03 期

致 谢

论文付梓之际，作者首先要向导师王艾伦教授致以深深的谢意。在攻读硕士学位的两年半期间，导师严谨的治学态度、活跃的学术思想、渊博的知识、宽容的长者风范使学生受益匪浅。在撰写学位论文的过程中，导师从整个论文的选题到具体研究工作都付出了大量的心血，每遇到困难，导师总是耐心地指导和热情地鼓励。同时，学生在整个研究生阶段也得到了导师思想上的教育和生活上的关心，让学生能端正学术态度，集中精力地做好研究工作。在此谨向导师王艾伦教授表示衷心地感谢和深深的敬意！

在此还要感谢师兄宁威、张迁给我的鼓励和帮助，感谢刘琳琳同学、杨相稳同学在论文写作期间给我的无私帮助。

谨以此论文感谢所有关心、爱护和帮助过我的师长、同学、朋友和亲人！

马 强

2006 年 3 月

攻读学位期间主要的研究成果

发表论文情况:

- 1、王艾伦、马强、刘琳琳 椭圆齿轮动态特性仿真研究 机械传动
编号 2005—1325 (已发表 2006 年第 4 期)
- 2、王艾伦、马强 椭圆齿轮动态特性的仿真研究 机械科学与技术
(已通过初审)