第11章　数学物理方程的定解问题

11.1 泛定方程的导出

自然现象 → 物理描述 → 数学方程 → 物理预言 → 改造自然

自然现象	物理描述	数学方程	物理预言	改造自然
热、电 声、光 等　等	温度 压力 电场强度 磁场强度	波动方程 扩散方程 位势方程 量子力学 等等	量子 能级 半导 体等 等	扩散工艺 半导体 激光 原子弹

- 三类典型的泛定方程

波动方程—双曲方程

描述现象：声波、电磁波等波动过程

扩散方程—抛物方程

描述现象：热扩散、物质扩散等扩散过程

位势方程—椭圆方程

电势、稳定温度场分布等与时间无关的稳定场—— <u>共性</u>

边界条件 —研究的物理系统与外部的相互作用；初始条件 —研究的物理系统过去的历史 ——个性

□弦的横向振动方程

假定：(1)张力 T>>重力 mg；
（2）静止时弦位于x 轴，横向振动时各点的位移为 $u(x,t)$;
(3) 弦的线密度为ρ；
（4）振动是无限小的。

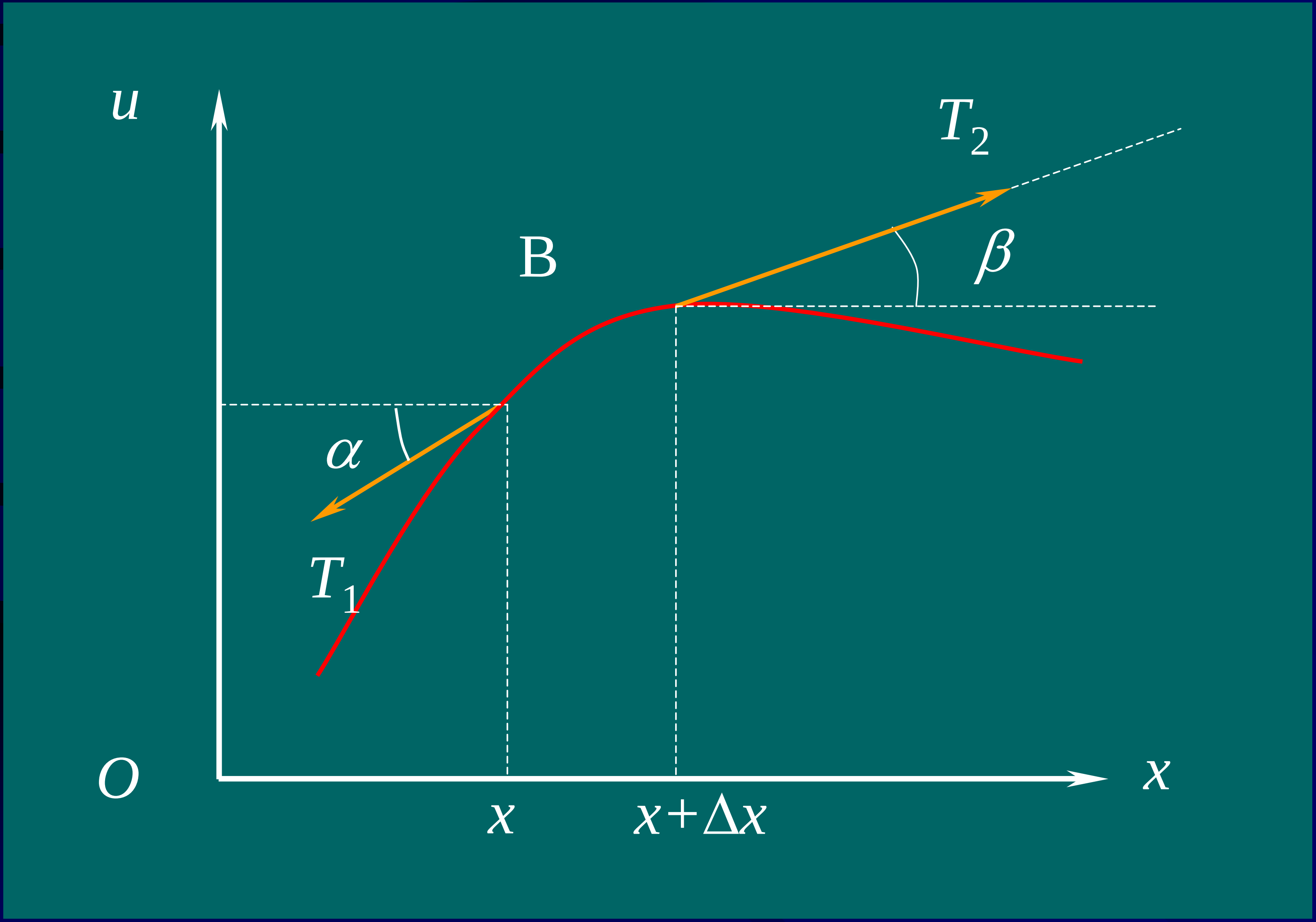
考察 x—$x+\Delta x$ 小段 B：力的平衡方程为

x方向

$$T_2 \cos\beta - T_1 \cos\alpha = 0$$

y 方向

$$T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha = \rho \Delta S u_{tt}$$



u
T_2
B
β
α
T_1
O
x
$x+\Delta x$
x

三个近似

$$(1)\quad \cos\beta \approx \cos\alpha \approx 1$$

$$(2)\quad \sin\beta \approx \beta = u_x\big|_{x+\Delta x};\quad \sin\alpha \approx \alpha = u_x\big|_x$$

$$(3)\quad \Delta S = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta u)^2} = \Delta x\sqrt{1+(u_x)^2} \approx \Delta x$$

x 方向 $T_2 \approx T_1 \Rightarrow T_2 = T_1 = T$

y 方向 $T(u_x\,|_{x+\Delta x} - u_x\,|_x) = \rho \Delta x u_{tt}$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u_x\,|_{x+\Delta x} - u_x\,|_x}{\Delta x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

故最后得到 x 处 Δx 长的弦的运动方程为

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

如果弦受到线密度为 $f(x,t)$ 的横向力作用，则弦的受迫振动方程为

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{f(x,t)}{\rho}}$$

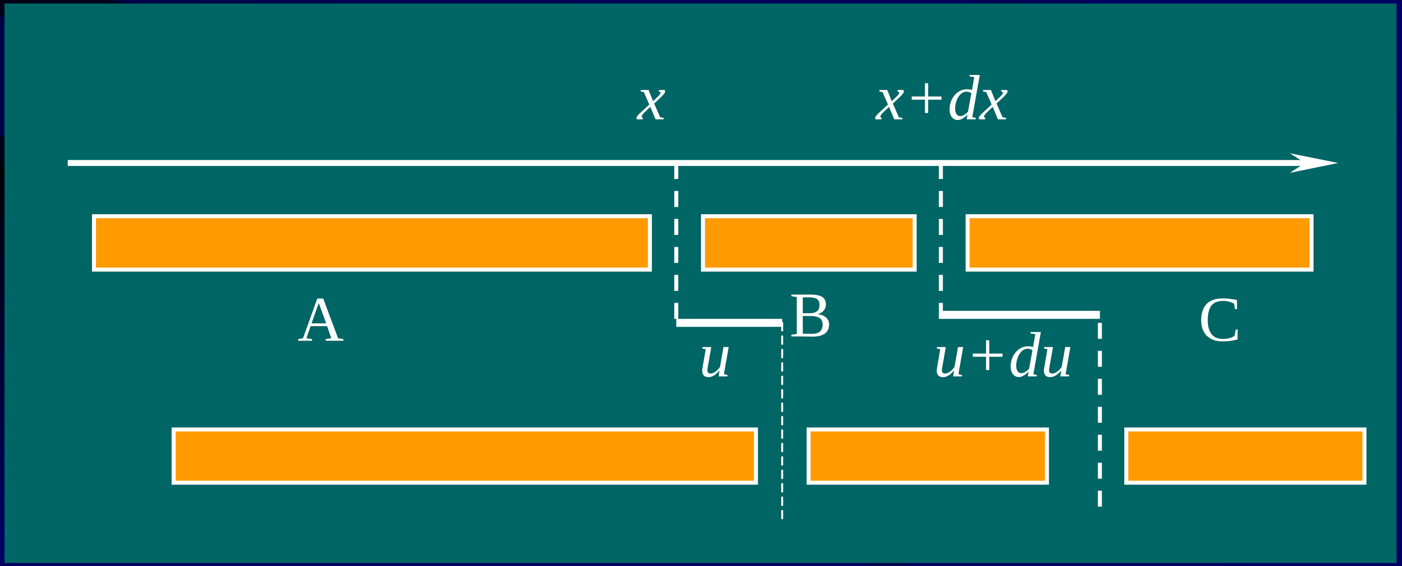
其中 $\boxed{a = \sqrt{T/\rho}}$ ——与弦中的张力有关——具有速度的量纲

❑ 杆的纵向振动

假定：（1）静止时杆位于x 轴，纵向振动时各点的位移为 $u(x,t)$; (2) 杆的密度为ρ，Young模量为 Y；(3)振动是无限小的。

B 段的运动方程为

$$\rho(Sdx)u_{tt} = YSu_x |_{x+dx} - YSu_x |_x$$



式中：S 是杆的面积，最后的方程与次无关。当$dx\to 0$ 时，我们有

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}-\frac{Y}{\rho}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=0$$

可见：两个方程具有相同的形式，可以写成统一的形式

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=0$$

式中

$$a=\sqrt{\frac{T}{\rho}}\quad 或者\quad a=\sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

以后将看到，a 是波在弦上（横波）或杆中（纵波）传播的速度。

□声波方程

描述参量：采取流体的 **Euler** 描述方式

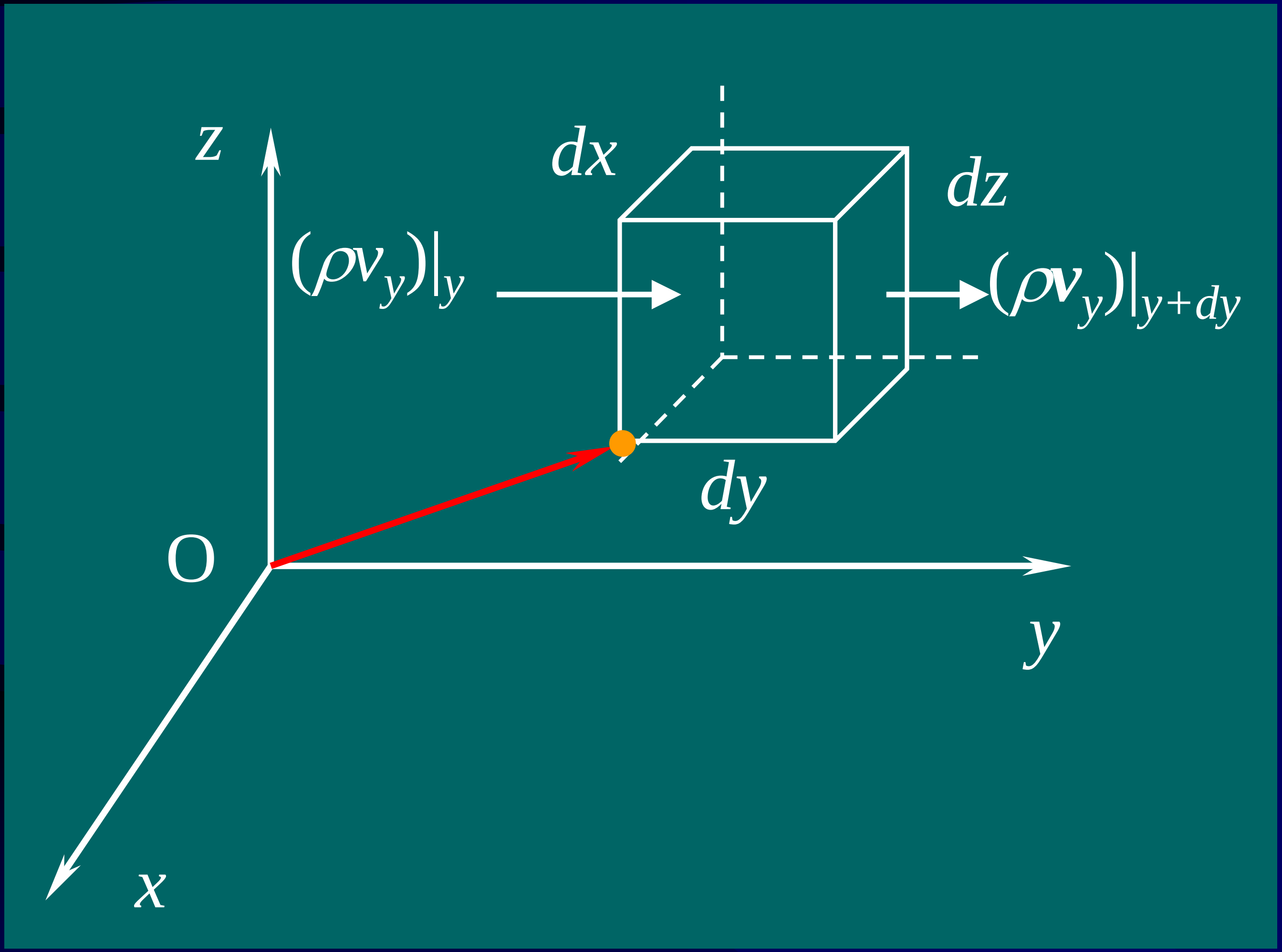
（1）$p=P(\mathbf{r},t)\text{-}P_0$: 压强差—声压 (其中 P_0 是大气压, $P(\mathbf{r},t)$ 是 $\mathbf{r}=(x, y, z)$ 点的瞬态压强分布;

（2）$\rho(\mathbf{r},t)$: 空气密度分布;

（3）$\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$：空气速度场分布。

考虑位于 (x, y, z) 的流体元 $dV=dxdydz$

(1) 质量守恒方程: dV 内质量的变化应等于六个面流入和流出的净增加量


z
dx
dz
$(\rho v_y)|_y$
$(\rho \boldsymbol{v}_y)|_{y+dy}$
dy
O
y
x

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz = dxdz\left[-(\rho v_y)|_{y+dy} + (\rho v_y)|_y\right] + dydx\left[-(\rho v_z)|_{z+dz} + (\rho v_z)|_z\right] + dzdy\left[-(\rho v_x)|_{x+dx} + (\rho v_x)|_x\right]$$

两边同除以$dxdydz$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0$$

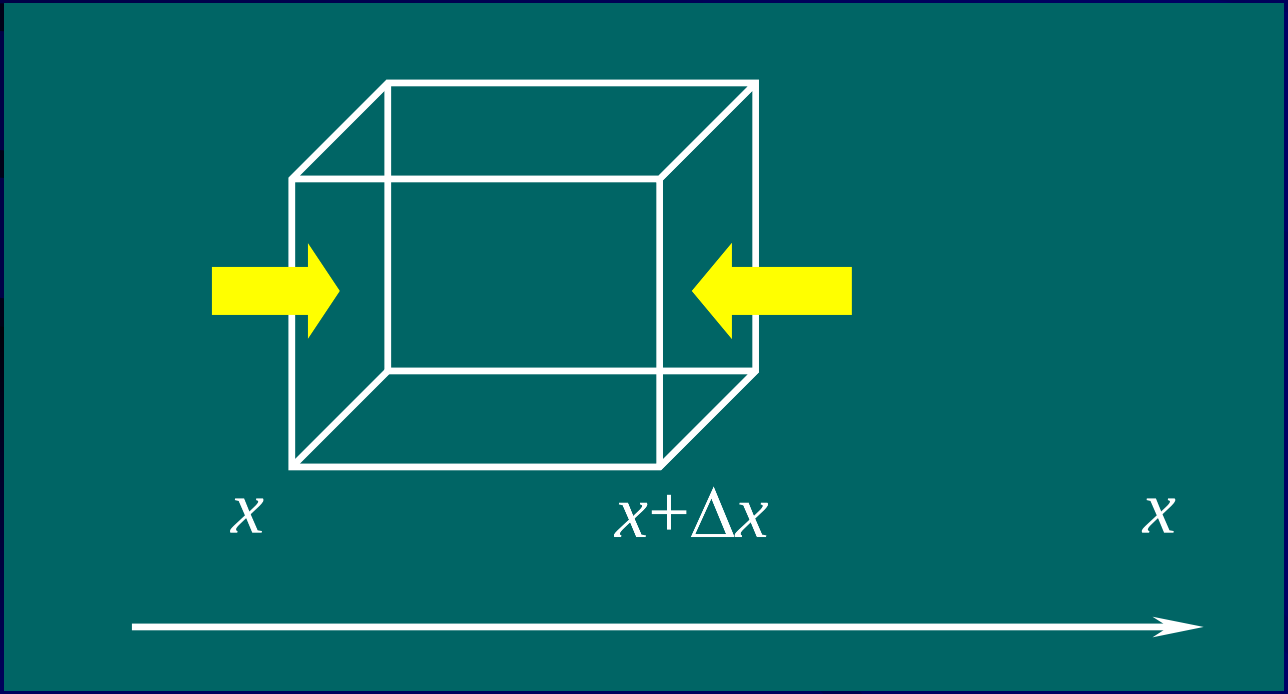
写作矢量形式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0$$

(2) 运动方程：三个分量方程分别为

x 方向的运动方程

$$(\rho dxdydz)\frac{dv_x}{dt} = dydz\left(-P|_{x+dx} + P|_x\right)$$



y 方向的运动方程

$$(\rho dxdydz)\frac{dv_y}{dt} = dydz\left(-P|_{y+dy} + P|_y\right)$$

z 方向的运动方程

$$(\rho dxdydz)\frac{dv_z}{dt} = dydx\left(-P|_{z+dz} + P|_z\right)$$

因此写作矢量形式，运动方程为

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P$$

——五个未知数：ρ、P、v_x、v_y、v_z，现有四个方程。

（3）介质本构方程：描述压强 $P=p+P_0$、密度 ρ（体积）和 熵 s 的关系，由热力学决定

$$\boxed{P=P(\rho,s)}$$

一般假定，声波振动是等熵过程，则

$$\boxed{P=P(\rho)}$$

其中：$\rho=\rho_0+\rho'$。这三个方程是声波过程的基本方程。

在无限小振动近似下

$$\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=(\rho'+\rho_0)\left(\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}\right)\approx\rho_0\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}$$

$$p\approx\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_s\rho';\quad \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=\nabla\cdot\left[(\rho'+\rho_0)\boldsymbol{v}\right]\approx\rho_0\nabla\cdot\boldsymbol{v}$$

总结

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t}+\rho_0\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0;\quad \rho_0\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=-\nabla P;\quad P=\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s\rho'$$

质量守恒　运动方程　介质本构方程

由质量守恒和运动方程

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2}-\nabla^2 P=0$$

由介质本构方程得

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2}-c^2\nabla^2 \rho'=0$$

其中

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s} = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$$

即为空气中的声速。同样有

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 p = 0$$

❑ 电磁波方程

描述参量：电场强度矢量 $\boldsymbol{E}$; 磁感应强度矢量 $\boldsymbol{B}$; 磁场强度矢量 $\boldsymbol{H}$; 电位移矢量 $\boldsymbol{D}$。

满足 Maxwell 方程组（无源情况）

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0; \quad \nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0; \quad \nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0; \quad \nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = 0$$

介质本构方程

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H};\quad \boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$$

因此电磁波方程为

$$\nabla\times\boldsymbol{E}+\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}=0;\qquad \nabla\times\boldsymbol{H}-\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=0$$

$$\varepsilon\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0;\qquad \mu\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0;$$

利用 $\nabla\times\nabla\times=\nabla\nabla\text{-}\nabla^2$， 前二个方程分别消去 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{H}$, 可得电磁波方程

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0;\quad \nabla^2\boldsymbol{H}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}=0$$

以及横波条件 $\cdot\boldsymbol{E}=0;\quad \nabla\cdot\boldsymbol{H}=0$

□扩散方程

物理过程：由于浓度不均匀，物质从浓度高的地方向浓度低的地方转移—称为扩散。

描述参量：浓度的空间和时间分布 $u(\boldsymbol{r}, t)$;

扩散流强度 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)$—单位时间通过单位面积的原子或分子数或质量。

物理规律：扩散定律

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t) = -D\nabla u(\boldsymbol{r},t)$$

基本规律：质量守恒

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{J} = q(\boldsymbol{r},t)$$

其中：D 是扩散系数，不同的物质有不同的扩散系数；q 是扩散源强度（单位时间内单位体积中产生的粒子数或质量）

由上述两方程，可以得到扩散过程满足的方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\nabla^2 u = q(\mathbf{r}, t)$$

一维扩散过程

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = q(x,t)$$

□热传导方程

物理过程；由于温度不均匀，热量从温度高的地方向温度低的地方传导—称为热传导。

描述参量：温度的空间和时间分布 $T(\mathbf{r}, t)$

热流强度 $\boldsymbol{J}(\mathbf{r},t)$—单位时间通过单位面积的热量。

物理规律：热传导定律

$$\boxed{\boldsymbol{J}(\mathbf{r},t)=-\kappa\nabla T(\mathbf{r},t)}$$ ——κ 是热传导系数。

基本规律：能量守恒定律

$$\boxed{\frac{\partial e}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{J}_e=q}$$

其中 e 是能量密度（单位质量物质的能量）；J_e 是能量流密度矢量，q 是其他热源。由于温度的变化，内能的变化方程为

$$\boxed{\rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \nabla^2 T = q}$$

上式即为热传导方程

■对于各向异性的材料：一般 D 和 κ 是张量 D_{ij} 和 κ_{ij} $(i,j=1,2,3)$,因此扩散定律和热传导定律变成

$$J_i = -\sum_{j=1}^{3} D_{ij} \frac{\partial u(\boldsymbol{r},t)}{\partial x_j};\quad J_i = -\sum_{j=1}^{3} \kappa_{ij} \frac{\partial T(\boldsymbol{r},t)}{\partial x_j}$$

这时热传导方程（扩散方程也作类似的变化）应该为

$$\rho C_v \frac{\partial T(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{3} \kappa_{ij} \frac{\partial^2 T(\boldsymbol{r},t)}{\partial x_i \partial x_j} = q(\boldsymbol{r},t)$$

❑静电场方程

电荷密度分布为 $\rho(\boldsymbol{r})$, 电场分布满足方程

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon};\ \nabla \times \boldsymbol{E} = 0$$

因此，存在标量势 $\phi(x,y,z)$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$$

代入上式，有

$$\nabla^2\phi = -\rho/\varepsilon$$ ——Poisson 方程。

如果 $\rho(\mathbf{r})=0$

$$\nabla^2\phi = 0$$ ——Laplace 方程。

❑Schrodinger 方程

质量为 m的微观粒子（如电子）在势场 V 中的运动 满足Schrodinger 方程

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi$$

11.2 定解条件

- 常微分方程

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2}+\omega^2u(t)=0$$

通解

$$u(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

两个任意常数：初始条件决定——Cauchy问题；两端边界决定——边值问题

- 偏微分方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=0$$

令 $\xi = x - t; \eta = x + t$

得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

通解 $u = G(\xi) + F(\eta)$

波动方程的通解

$$u(x,t) = F(x+t) + G(x-t)$$

两个任意函数：初始条件决定——Cauchy问题

$$u|_{t=0} = f(x);\ u_t|_{t=0} = g(x)$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x-t) + f(x+t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)ds$$

❑定解问题

偏微分方程：求通解没必要、意义不大

求给定条件的特解 ——定解问题

- 边界条件 —系统与外部的相互作用
- 初始条件 —系统过去的历史

❑ 初始条件

扩散方程、热传导方程(时间的一阶方程), 初始分布

$$u(\mathbf{r},t)\big|_{t=0}=u(\mathbf{r},0);\quad T(\mathbf{r},t)\big|_{t=0}=T(\mathbf{r},0)$$

波动方程(时间的二阶方程), 必须知道初始位移分布及速度分布

$$u(\mathbf{r},t)\big|_{t=0}=\varphi(\mathbf{r});\quad \left.\frac{\partial u(\mathbf{r},t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(\mathbf{r})$$

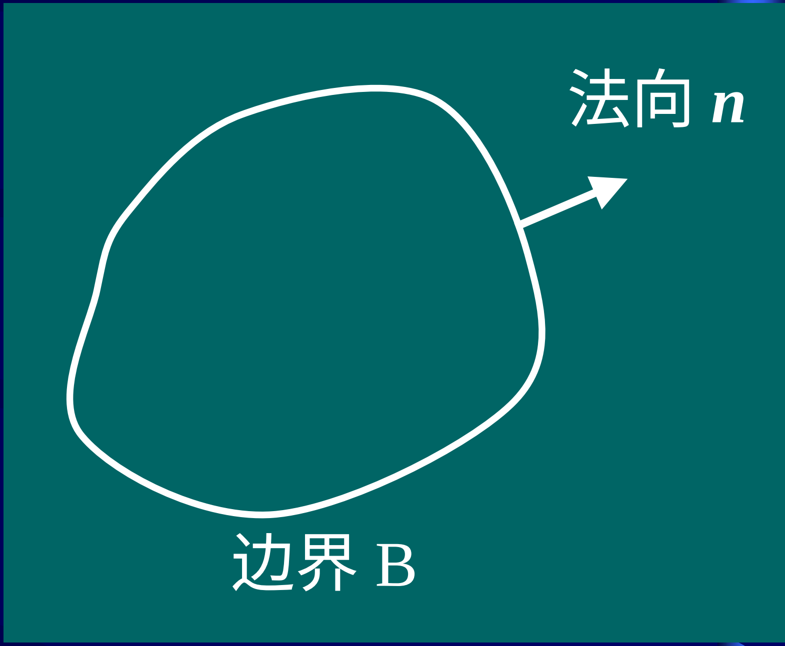
注意：是整个系统在 t=0 时的分布，而不是仅仅知道某点或某几点的值。

□边界条件

（1）第一类边界条件

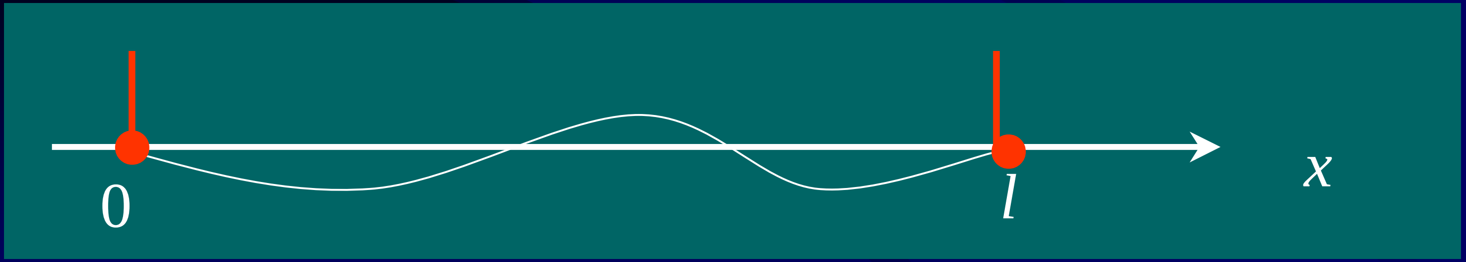
给出边界上的分布

$$u(\boldsymbol{r},t)\,|_{\boldsymbol{r}\in \boldsymbol{B}}=u_B(\boldsymbol{r},t)$$



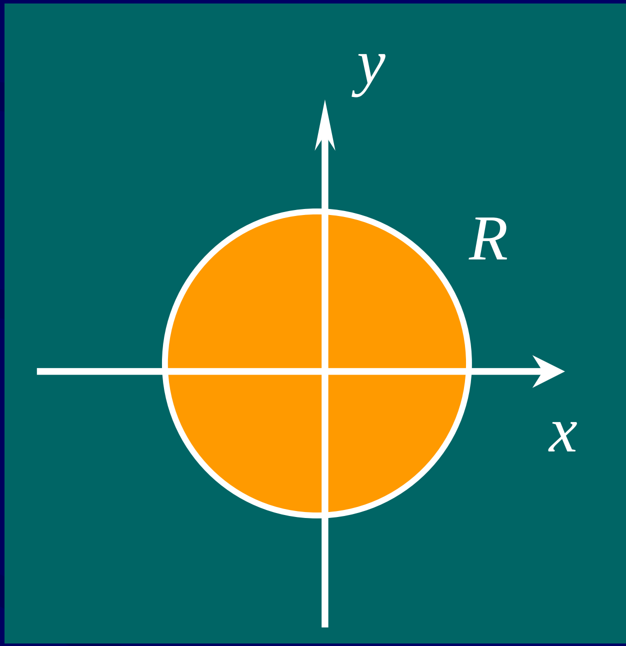
例1：弦乐器中两端固定的弦振动，边界条件可写作

$$u(x,t)\,|_{x=0}=u(x,t)\,|_{l=0}=0$$



例2：弦乐器中圆鼓的振动，因圆周固定，边界条件可写作

$$u(x,y,t)\big|_{\sqrt{x^2+y^2}=R}=0$$



在极坐标下

$$u(r,\vartheta,t)\big|_{r=R}=0$$

（2）第二类边界条件

给出边界上外法向导数的分布

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_B=\phi_B(\boldsymbol{r},t),\ \text{或}\ (\nabla u)\cdot\boldsymbol{n}=\phi$$

例1、一端自由、另一端固定纵向振动杆: 在固定端是第一类边界条件；在自由端，处于自由状态，无应力，由 虎克 定律

$$u(x,t)\big|_{x=0}=0;\ \ Y\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}=0$$

（3）第三类边界条件

给出边界上分布与法向导数的线性组合

$$\left.\left(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_B=\psi(\mathbf{r},t)$$

当 $\alpha=0$ 时 退化为第二类边界条件

当 $\beta=0$时 退化为第一类边界条件

例：物体的自由冷却。热传导泛定方程为

$$\rho C_v\frac{\partial T}{\partial t}-\kappa\nabla^2 T=0$$

物体初始温度分别为

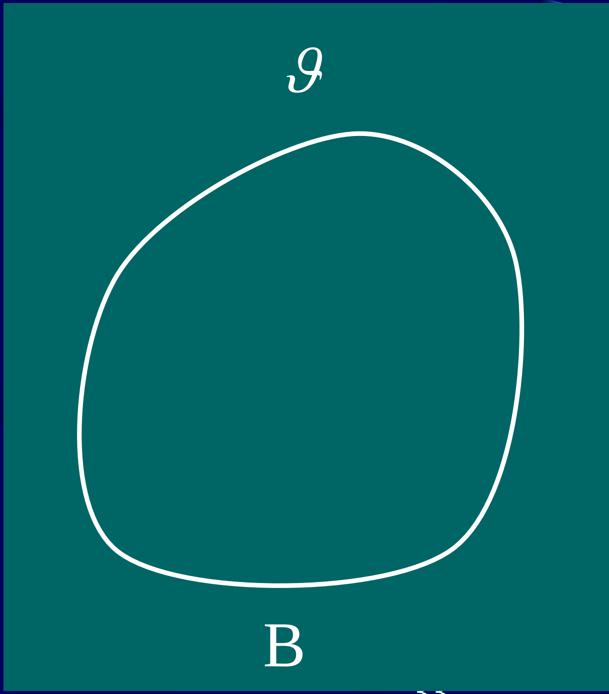
$$T(x,y,z,t)|_{t=0}=\psi(x,y,z,t)$$

边界条件由“自由冷却”而得到，由牛顿自由冷却定律：从物体流出的热流矢量密度正比于物体表面与周围介质的温度差

$$-\kappa\frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_B=h(T-\vartheta)|_B$$

因此

$$\left(hT+\kappa\frac{\partial T}{\partial n}\right)\bigg|_B=\vartheta$$



- 细杆两端的”自由冷却”：一维问题。

$x=0$, 外法向矢量 $n_x= -1$, 故

$$\left.\left(hT - \kappa \frac{\partial T}{\partial x}\right)\right|_{x=0} = \vartheta$$

$x=l$, 外法向矢量 $n_x=1$, 故

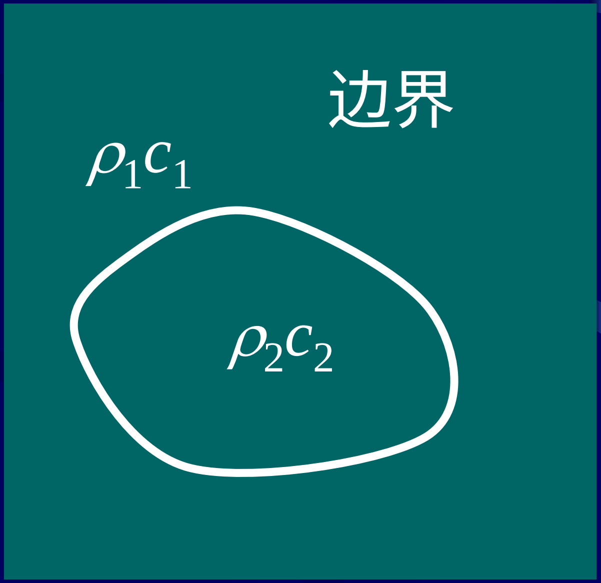
$$\left.\left(hT + \kappa \frac{\partial T}{\partial x}\right)\right|_{x=l} = \vartheta$$

说明：(1)齐次边界条件：右边的函数为零
(2)非齐次边界条件：右边的函数不为零
(3) 线性边界条件：仅仅出现待求分布的一次
(4)非线性边界条件: 非线性定解问题

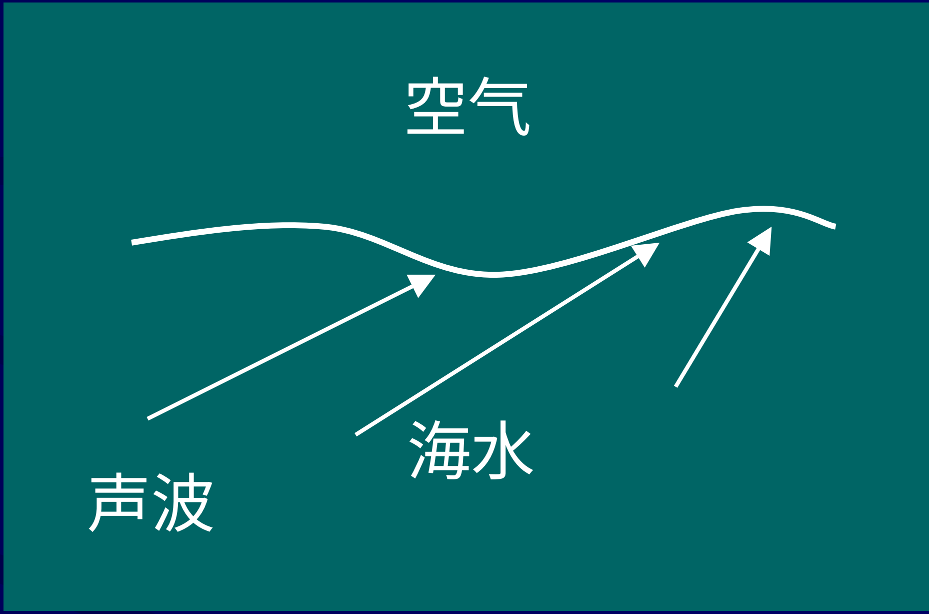
声学边界条件

（1）第一类边界：“ 硬 ” 介质被 “ 软 ” 介质包围。“ 软 ” 和 “ 硬 ” 由介质密度决定。边界上，声压 p为零，故边界条件为

$$p(x,y,z,t)\big|_B = 0$$



一个常遇到的例子是：水（“ 硬 ” 介质）中声波遇到空气（“ 软 ” 介质）界面，可以作这样的近似。因此水中的声波是不能进入空气的（？）。



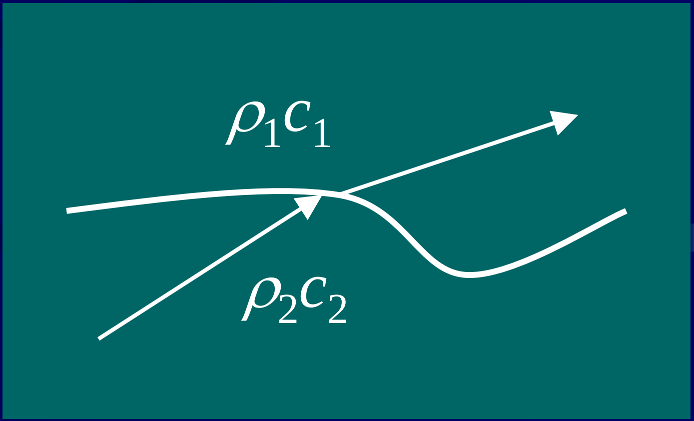
（2）第二类边界

“ 软 ” 介质被 “ 硬 ” 介质包围。边界上，流体粒子的速度为零，因此声压 p 的法向导数为零，故边界条件为

$$\left.\frac{\partial p(x,y,z,t)}{\partial n}\right|_B = 0$$

（3）第三类边界：吸声边界

$$\left(\alpha p+\beta\frac{\partial p}{\partial n}\right)\bigg|_B=0$$



（4）一般界面

根据力学性质：在介面上法向速度和声压连续，因此

$$\boldsymbol{v}_n\big|_1=\boldsymbol{v}_n\big|_2;\ \ p\big|_1=p\big|_2;$$

$$\rho_0\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}=-\nabla P$$

$$\frac{1}{\rho_1}\left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)\bigg|_1=\frac{1}{\rho_2}\left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)\bigg|_2$$

$$p\big|_1=p\big|_2$$

11.3 数学物理方程的分类

❑ 线性偏微分方程

自变量 $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, 函数 $u(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, 关于 u 的线性方程，一般形式

$$L[u]=f$$

$$L=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i}+c$$

（1）齐次方程:　　f=0; 一般是无源问题

（2）非齐次方程：$f\neq 0$; 有源问题

（3）常系数方程：a_{ij}, b_i, c 与自变量 $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 无关。一般是均匀介质；

（4）变系数方程：a_{ij}, b_i, c 与自变量 $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 有关。一般是非均匀介质。

❑叠加原理：如果 u_1 和 u_2 分别是方程的解，且相应的非齐次项为 f_1 和 f_2, 则 $u=u_1+u_2$ 也是方程的解，且相应的非齐次项为 $f=f_1+f_2$，即，如果

$$L[u_1]=f_1;\quad \text{和} \quad L[u_1]=f_1$$

则

$$L[u]=f$$

——其中 $u=u_1+u_2$ 和 $f=f_1+f_2$

❑两个自变量的方程分类

两个自变量的线性偏微分方程

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=f$$

二阶偏导数项：方程的主部

假定：a_{11}、a_{12}、a_{22}、b_1、b_2、c、f 是 x、y 的函数且是实数

试作变量变换

$$\begin{cases} x=x(\xi,\eta) \\ y=y(\xi,\eta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi=\xi(x,y) \\ \eta=\eta(x,y) \end{cases}$$

要求 Jacobi 行列式

$$J=\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\xi}{\partial x} & \dfrac{\partial\eta}{\partial x}\\ \dfrac{\partial\xi}{\partial y} & \dfrac{\partial\eta}{\partial y}\end{vmatrix}\neq 0$$

否则函数相关。原方程变为

$$A_{11}u_{\xi\xi}+2A_{12}u_{\xi\eta}+A_{22}u_{\eta\eta}+B_1u_{\xi}+B_2u_{\eta}+Cu=f$$

式中系数

$$\begin{cases}A_{11}=a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2\\ A_{12}=a_{11}\xi_x\eta_y+a_{12}(\eta_x\xi_y+\eta_y\xi_x)+a_{22}\xi_y\eta_y\\ A_{22}=a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2\end{cases}$$

$$
\begin{cases}
B_1 = a_{11}\xi_{xx} + 2a_{12}\xi_{xy} + a_{22}\xi_{yy} + b_1\xi_x + b_2\xi_y \\
B_2 = a_{11}\eta_{xx} + 2a_{12}\eta_{xy} + a_{22}\eta_{yy} + b_1\eta_x + b_2\eta_y \\
C = c \\
F = f
\end{cases}
$$

注意：A_{11} 和 A_{22} 的系数具有对称的形式，如果取 $\xi=\xi(x,y)$ 和 $\eta=\eta(x,y)$ 是下列一阶偏微分方程二个独立的特解

$$
a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_x z_y + a_{22}z_y^2 = 0 \qquad \text{(I)}
$$

——则原方程的系数 A_{11} 和 A_{22} 为零！

设 $z=z(x,y)$ 是方程的一个特解，则 $z(x,y)=C$ (常数) 必满足常微分方程

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a_{12}\frac{dy}{dx}+a_{22}=0$$

反之，如果 $\varphi(x,y)=C$ (常数) 是上述常微分方程的一个通解，则 $z=\varphi(x,y)$ 必是一阶偏微分方程(1) 的一个特解

方程（I）称为方程的特征方程，其解

$$\xi(x,y)=C_1 \text{ 和 } \eta(x,y)=C_2$$

称为方程的特征曲线。

由(I) 可得到

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$$

根据特征曲线的性质进行分类

(1) 双曲型方程

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$$

存在二族实特征线

$\xi(x,y) = C_1$ 和 $\eta(x,y) = C_2$

作变换

$$\xi=\xi(x,y),\quad \eta=\eta(x,y)$$

方程 变成

$$u_{\xi\eta}=\frac{-1}{2A_{12}}\left(B_1u_\xi+B_2u_\eta+Cu-f\right)\qquad \text{(II)}$$

再令变换

$$\alpha=(\xi+\eta)/2,\ \text{和}\quad \beta=(\xi-\eta)/2$$

可得到双曲型方程的标准形式

$$u_{\alpha\alpha}-u_{\beta\beta}=\Phi(u_\alpha,u_\beta,\alpha,\beta)$$

——可见波动方程是典型的双曲方程

(2) 抛物型方程

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$$

仅存在一族实特征线： $\xi(x,y)=C_1$

令

$$\xi = \xi(x, y)$$

再取与$\xi(x,y)$无关的函数$\eta(x,y)$ 构成自变量变换。于是 $A_{11}=0$, 同时可证明 $A_{12}=0$, 因此方程变成

$$u_{\eta\eta} = \Phi(u_\xi, u_\eta, \xi, \eta)$$

——上述即抛物型方程的标准形式。显然扩散方程是典型的抛物方程。

(3) 椭圆型方程

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$$

因此无实的特征曲线，并且$\xi(x,y)=\eta^*(x,y)$

取

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \xi^*(x, y)$$

也有

$$u_{\xi\eta} = \frac{-1}{2A_{12}}\left(B_1 u_\xi + B_2 u_\eta + Cu - f\right) \quad \text{(III)}$$

但(II) 与（III) 不同的是： ξ 和 η 是复数并且 $\eta=\xi^*$，令

$$\begin{cases}\xi=\alpha+i\beta\\ \eta=\alpha-i\beta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=\mathrm{Re}(\xi)=(\xi+\eta)/2\\ \beta=\mathrm{Re}(\eta)=(\xi-\eta)/2\end{cases}$$

方程 (III) 变成

$$u_{\alpha\alpha}+u_{\beta\beta}=\Phi(u_\alpha,u_\beta,\alpha,\beta)$$

上述即椭圆型方程的标准形式。显然位势方程是典型的椭圆方程。

注意：（1）因为系数a_{11},a_{12},a_{22} 与 x,y 有关，所以，上述分类也与区域有关；（2）在同一区域，作自变量变换方程的类型不变，不可能通过自变量变换改变方程的类型。

例： Tricomi 方程

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

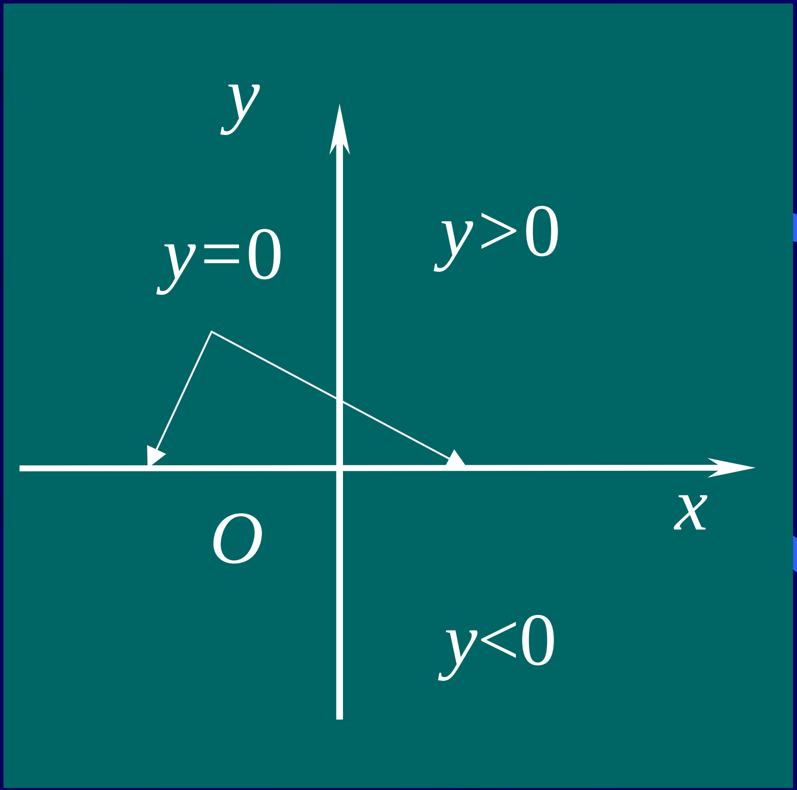
显然$a_{11}=y$, $a_{12}=0$, $a_{22}=1$

$$a_{12}^2-a_{11}a_{22}=-y$$

特征方程为

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=0$$

(1)上半平面是椭圆型的



即

$$dx \pm i\sqrt{y}dy = 0 \Rightarrow x \pm i\frac{2}{3}y^{3/2} = C_1$$

作变量变换

$$\xi = x; \quad \eta = \frac{2}{3}y^{3/2}$$

原方程变成标准形式

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta}u_{\eta} = 0$$

(2)下半平面是双曲型的

$$dx \pm \sqrt{-y}dy = 0$$

作变量变换

$$\frac{\quad}{3} \qquad\qquad \frac{\quad}{3}$$

原方程变成标准形式

$$u_{\xi\eta}-\frac{1}{6(\xi-\eta)}(u_{\xi}-u_{\eta})=0$$

(3)在 x 轴上 $y=0$, 是抛物型的

11.4 定解问题的适定性

- 双曲型

波动过程：复杂，波沿特征线传播，可能存在间断

- 抛物型

扩散过程：比较好，极值原理

- 椭圆型

位势平衡：好，极值原理，无限可微

□定解问题

给定边界条件和初始条件，求方程的解。

- 初值问题: 对无穷区域上的波动方程或扩散方程, 变量 t 有时间意义, 一般给定 t=0 时刻的分布,求 t>0 时间的分布

$$\boxed{u_t(\boldsymbol{r},t)\,|_{t=0}=\psi(\boldsymbol{r})}$$

对波动方程,还必须给出一阶导数

$$\boxed{u(\boldsymbol{r},t)\,|_{t=0}=\varphi(\boldsymbol{r})}$$

——这样的问题称为初值问题。

(2) 边值问题: 对 Laplace 方程, 描写的是稳态问题, 无时间变量, 一般给出的是边界条件

$$\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_B=\psi(\mathbf{r},t)$$

——这样的问题称为边值问题。

(3) 混合问题: 对有限区域上的波动方程或扩散方程,不仅要给出 t=0 时刻的分布,而且要给出边界条件， 这样的问题称为混会问题

❑ 定解问题的适定性

一般，对位势方程提边值问题，而对波动方程或扩散方程提混合问题，能否反过来：对位势方程提混合问题，而对波动方程或扩散方程提边值问题？

位势方程 → 边值问题

波动方程 → 混合问题

这不是偶然的！物理上，这样的提法有物理意义，数学上，这样的提法是否有根据？

如果定解问题满足

（1）解存在；（2）解唯一；（3）解稳定。

则称定解问题是适定的，否则称为不适定的

不适定问题的求解是目前一个研究课题，有很重要的应用。逆问题一般是不适定问题。

- **正问题**：已知边界、边界条件、方程的系数 或非齐次项 f，求方程的解。
- **逆问题**：已知部分边界、部分方程的系数 或部分非齐次项 f，或部分解（在某个实验上可测量的区域），要求未知的另一部分边界、或另部分方程的系数、 或另一部分非齐次项 f。

逆问题在地球物理勘探，医学成像，水力工程，超声无损评价等领域有非常重要的应用。

❑典型方程定解问题提法比较

位势方程：边值问题

波动方程： Cauchy问题、混合问题

输运方程： $t>0$

位势方程: Cauchy问题?

波动方程: 边值问题?

输运方程：$t<0$ ？

❑ 二维Laplace方程的Cauchy问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ y>0,\quad x\in(-\infty,\infty)$$

$$u\,|_{y=0}=\varphi(x);\quad u_y\,|_{y=0}=\psi(x),\ \ x\in(-\infty,\infty)$$

解为

$$u(x,y)=\mathrm{Re}\left[\varphi(x+iy)+\int_0^y \psi(x+it)dt\right]$$

——要求初值解分析：解的存在性问题

初值附加微小变化 $=n^{-k}\sin nx$

解的变化

$$\delta u = \frac{1}{2n^{k-1}}\left[\exp(ny) - \exp(-ny)\right]\sin nx$$

$$n \to \infty; \qquad \delta\psi \to 0; \qquad \delta u \to \infty$$

——解的稳定性问题

- 波动方程的边值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g(x, y), \quad (x, y) \in G$$

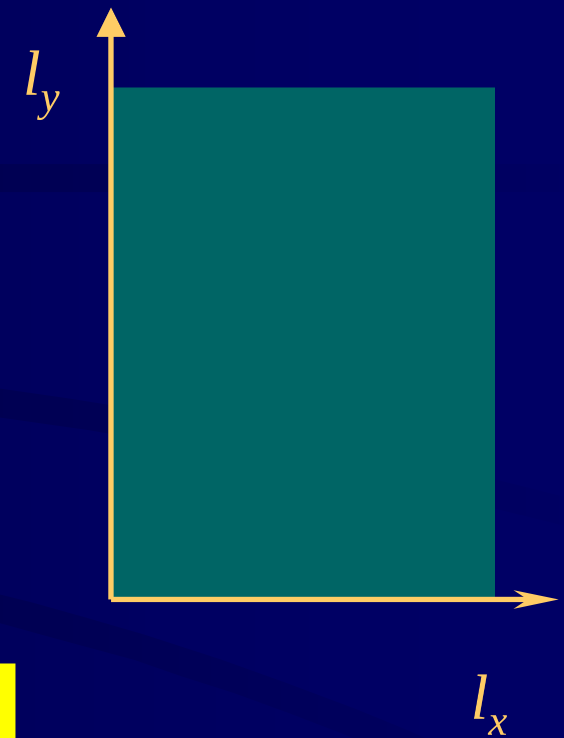
$$u\,|_{\partial G} = f(x, y), \ (x, y) \in \partial G$$

齐次问题有非零解

$$u(x,y) = A\sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{l_y}\right)$$

满足自洽条件

$$l_y / l_x = m / n, (m, n = 1,2,....)$$



l_y/l_x : 有理数, 解不唯一

l_y/l_x : 无理数时, 解唯一

——解的唯一性问题

□热传导方程对负时间的不稳定性

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, x\in(0,l), t<0$$

$$u|_{x=0}=u|_{x=l}=0, u|_{t=0}=\varphi(x)$$

解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\exp\left(-\frac{n^2\pi^2 t}{l^2}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad (t<0)$$

$$A_n=\frac{1}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

初值条件有扰动

$$\delta\varphi = k^{-2}\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)$$

可任意小

解的变化为

$$\delta u = \frac{1}{k^2}\exp\left(-\frac{k^2\pi^2 t}{l^2}\right)\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)$$

可任意大

- 热传导方程描述不可逆过程，不可能根据现在状态反推过去的状态；
- 热传导方程对时间反演不具有不变性；
- 波动方程对时间反演具有不变性，可从的波动状态反推知的波动状态；
- 但是如果波动方程包含不可逆的阻尼或耗散项，同样不具有时间反演不变性.