总复习(一)

基本概念、求极限的方法

- 一、主要内容
- 二、典型例题

作业集重点题

练习册(上册)

(1) p.3, 3

(2) p.7, 5

(3) p.8, 4

(4) p.10, 7, 8

(5) p.11, 4

(6) p.12, 5(1), 6

(7) p.15, 5

(8) p.17, 6

(9) p.20, 5

(10) p.22, 10

(11) p.23, 2

(12) p.26, 8(3),

(13) p.27, 10

(14) p.28, 5

(15) p.30, 5

(16) p.31, 4

(17) p.32, 7

(18) p.33, 1(4), (8); 2

(19) p.34, 3, 4

(20) $p.36$, 3

(21) $p.37$, 5

(22) $p.39$, 10 – 12

(23) $p.40$, 3

(24) $p.42$, 1

(25) $p.43$, 2(1)

(26) $p.44$, 4, 6

(27) $p.45$, 1(1)、(2)

(28) $p.48$, 5

(29) $p.51$, 3(1), (3)

(30) $p.52$, 4(3), (4)

(31) $p.53$, 5(5), 6

(32) $p.55$, 1(3), 2, 3(2)

(33) $p.56$, 4(2), 5(3)

(34) $p.57$, 6 – 8

(35) $p.58$, 1(4), 2, 3(2)

(36) $p.59$, 4,5

(37) $p.60$, 6

(38) $p.61$,8

(39) $p.64$,5

(40) $p.65$, 10

(41) $p.66$, 11

(42) $p.71$, 1

作业集(总册)

(1) $p.1, 2$

(2) $p.2, 4(1), (4), 5$

(3) $p.3, 6-8$

(4) $p.4, 10$

(5) $p.5, 2, 3$

(6) $p.6, 5(1)$

(7) $p.7, 7, 9$

(8) $p.8, 10-12$

(9) $p.10, 3$

(10) $p.11, 4(3), (4), 5$

(11) $p.12, 6-9$

(12) $p.13, 10$

(13) $p.17, 1(10), 2, 3$

(14) $p.18, 1, 2, 3(2)$

(15) $p.19, 4, 5(1), 6$

(16) $p.20, 7-9$

(17) $p.21, 10-12$

(18) $p.22, 4$

(19) $p.23, 5, 6$

(20) $p.24, 8$

一、主要内容

1. 微分学基本概念

函数、极限、无穷小、无穷大、无穷小的比较(高阶无穷小、同阶无穷小、等价无穷小)、连续、间断点、导数、微分.

2. 几个重要关系

(1) $\{x_n\}$收敛 $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ $\{x_n\}$有界

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ $f(x)$在某$\mathring{U}(x_0)$内无界

(3) 函数极限与其子列极限 的关系;

(4) 有极限的变量与无穷小　的关系;

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$$

其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0.$

(5) 无穷大与无穷小的关系;

(6) 几个概念之间的关系

可微 $\Longleftrightarrow$ 可导 $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ 连续 $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ 极限存在

3. 求极限的方法

(1) 极限定义；

(2) 极限存在的充分必要条件；

(3) 有关无穷小的运算；

(4) 极限运算法则；

(5) 极限存在准则；

(6) 两个重要极限；

(7) 函数的连续性；

(8) 导数定义；

(9) 利用微分中值公式；

(10) 洛必达法则；

(11) 定积分定义.

二、典型例题

例1

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}, & x<0\\ 6, & x=0\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\dfrac{x}{4}}, & x>0\end{cases}$，问 a 为何值时，

$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续； a 为何值时， $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点？

解 $f(0^-)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}$ $(\frac{0}{0})$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax^3}{x-\arcsin x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{3ax^2}{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{6ax}{\frac{1}{2}\cdot\frac{-2x}{(1-x^2)^{3/2}}}=-6a$$

$$f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x \sin \frac{x}{4}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x \cdot \frac{x}{4}} = 4 \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x^2}$$

$$= 4 \lim_{x\to 0^+} \frac{ae^{ax} + 2x - a}{2x} = 4 \lim_{x\to 0^+} \frac{a^2 e^{ax} + 2}{2} = 2a^2 + 4$$

$$f(0) = 6$$

$\because \lim_{x\to 0} f(x)$存在 $\Longleftrightarrow$ $f(0^-)=f(0^+)$

即 $-6a=2a^2+4$, 得 $a=-1$, 或 $a=-2$.

而 $f(x)$在$x=0$处连续 $\Longleftrightarrow$ $f(0^-)=f(0^+)=f(0)$

即 $-6a=2a^2+4=6$,

$\therefore$ 当$a=-1$时，$f(x)$在$x=0$处连续;

当$a=-2$时， $\lim_{x\to 0} f(x)=12\neq f(0)=6$,

因而 $x=0$是$f(x)$的可去间断点 .

例2 讨论

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sin x}, & x<0\\ 2, & x=0\\ \dfrac{\int_0^{2x}\ln(1+t)dt}{2x^2}, & x>0\end{cases}$$

的连续性,

并指出其间断点的类型.

解 1° 找 $f(x)$ 无定义的点

间断点：$x=n\pi\ (n=-1,-2,\cdots)$

$$\because \quad \lim_{x\to n\pi} f(x) = \lim_{x\to n\pi} \frac{x}{\sin x} = \infty \quad (n = -1, 2, \cdots)$$

$\therefore \quad x = n\pi \ (n = -1, -2, \cdots)$是 $f(x)$的第二类无穷间断点.

2°　查分段点：　$x = 0$

$$\because \quad f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{2x} \ln(1+t)dt}{2x^2}$$

$$= \lim_{x \to +0} \frac{2 \cdot \ln(1+2x)}{2 \cdot 2x} = 1$$

$$f(0^-) = f(0^+) = 1 \neq f(0) = 2$$

$\therefore \quad x = 0$是$f(x)$的第一类可去间断点 .

再由初等函数的连续性可知，$f(x)$的连续范围是

$$I = \{x \mid x \neq n\pi \ (n = 0, -1, -2, \cdots), x \in R\}$$

类似题 1. 设函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$，则 $f(x)$有 (A)

2008考研

(A) 1个可去间断点，1个跳跃间断点；

(B) 1个可去间断点，1个无穷间断点；

(C) 2跳跃间断点；　(D) 2个无穷间断点.

解　$f(x)$ 无定义的点: $x=0,\ x=1.$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(\ln|x|)\sin x \overset{(\infty\cdot 0)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{\dfrac{1}{\sin x}} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\sin x=-1\times 0=0$$

$\therefore \quad x=0$是 $f(x)$的可去间断点.

$$f(x)=\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$$

$$f(1^-)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln x}{1-x}\sin x$$

$$=(\sin 1)\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln x}{1-x}\overset{(\frac{0}{0})}{=}(\sin 1)\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{1}{x}}{-1}=-\sin 1$$

$$f(1^+)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{x-1}\sin x=(\sin 1)\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{x-1}$$

$$=(\sin 1)\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\sin 1$$

$f(1^-)\neq f(1^+)$, $\therefore \quad x=1$是 $f(x)$的跳跃间断点.

2. 函数 $f(x)=\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}$ 在$[-\pi,\pi]$上的第一类间断点是 $x=($ **A** $)$.

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) $-\dfrac{\pi}{2}$.　　(D) $\dfrac{\pi}{2}$.

解 $$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}=-1$$

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}=1$$

3. 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$,

$$g(x)=\begin{cases} f(\frac{1}{x}), & x\neq 0 \\ 0 & 0 \end{cases}$$

讨论$g(x)$在$x=0$处的连续性，若 $x=0$是间断点，请指出其类型.

解 $\because$ $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0} f(\frac{1}{x})=a$

$\therefore$ 当$a=0$时，$g(x)$在$x=0$处的连续；

当$a\neq 0$时，$x=0$是$g(x)$的第一类可去间断点．

例3 设 $f(x)=\begin{cases} a\ln(1-x)+b, & x\le 0 \\ x\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+3^n+x^n}, & x>0 \end{cases}$，

试确定常数 a,b，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导．

解 $\because \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+3^n+x^n}$

$$=\begin{cases} 3\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\frac{1}{3})^n+1+(\frac{x}{3})^n}, & 0<x\le 3 \quad (0<\frac{x}{3}\le 1) \\ x\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(\frac{1}{x})^n+(\frac{3}{x})^n+1}, & x>3 \quad (0<\frac{3}{x}<1) \end{cases}$$

$$=\begin{cases}3, & 0<x\le 3\\ x, & x>3\end{cases}$$

$$\therefore\ f(x)=\begin{cases}a\ln(1-x)+b, & x\le 0\\ 3x, & 0<x\le 3,\\ x^2, & x>3\end{cases}$$

由于 $f(x)$在$x=0$处可导，必连续 .

而 $f(x)$在$x=0$处连续 $\Longleftrightarrow$ $f(0^-)=f(0^+)=f(0)$

由 $f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}[a\ln(1-x)+b]=b$

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} 3x=0=f(0)$$

得 $b=0.$

又 $\because f(x)$在$x=0$处可导$\Longleftrightarrow f'_-(0)=f'_+(0)$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{a\ln(1-x)-0}{x}=-a.$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{3x - 0}{x} = 3$$

$\therefore \quad -a = 3, \qquad a = -3.$

即当$a = -3$，$b = 0$时，$f(x)$在$x = 0$处可导.

例4 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$， 其中$g(x)$有二阶导数，$g(0)=1$.

(1) 确定a的值，使 $f(x)$在 $x=0$处连续；

(2) 在(1)成立的情形下，求 $f'(x)$.

解 1. $f(x)$在$x=0$处连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=a$

$$\because \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)-\cos x}{x} \qquad (\frac{0}{0})$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{g'(x)+\sin x}{1} = g'(0)$$

$$\therefore \qquad a = g'(0)$$

2. 当 $x \neq 0$时， $f'(x) = [\frac{g(x)-\cos x}{x}]'$

$$= \frac{x[g(x)-\cos x]' - [g(x)-\cos x]}{x^2}$$

$$= \frac{x[g'(x)+\sin x] - [g(x)-\cos x]}{x^2}$$

当 $x=0$时，

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{g(x)-\cos x}{x}-g'(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\cos x-g'(0)x}{x^2}\qquad (\frac{0}{0})$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+\sin x-g'(0)}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}[\frac{g'(x)-g'(0)}{x-0}+\frac{\sin x}{x}]=\frac{1}{2}[g''(0)+1]$$

$$\therefore f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x[g'(x) + \sin x] - [g(x) - \cos x]}{x^2}, & x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2}[g''(0) + 1], & x = 0 \end{cases}$$

例5 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义，在区间$[0,2]$上

(2004年考研) $f(x)=x(x^2-4)$

若对于任意x都满足：

$$f(x)=k\,f(x+2)$$

其中k为常数. 问：k为何值时，$f(x)$在$x=0$处可导？

解 1° 求 $f(x)$在$[-2,0)$的表达式.

$$f(x)=k\,f(x+2) \qquad (-2\le x<0)$$

$$=k(x+2)[(x+2)^2-4] \qquad (0\le x+2<2)$$

$$=kx(x+2)(x+4)$$

于是当 $x\in[-2,2]$ 时，有

$$f(x)=\begin{cases} kx(x+2)(x+4), & -2\le x<0 \\ x(x^2-4), & 0\le x\le 2 \end{cases}$$

2° 讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可导性

由题设知 $f(0)=0.$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{kx(x+2)(x+4)-0}{x}=8k$$

$$f'_{+}(0) = \lim_{x \to 0^{+}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0^{+}} \frac{x(x^2 - 4) - 0}{x} = -4$$

$\because \quad f(x)$在$x = 0$处可导$\Leftrightarrow f'_{-}(0) = f'_{+}(0)$

即 $\quad 8k = -4, \quad k = -\dfrac{1}{2}$

$\therefore \quad$ 当$k = -\dfrac{1}{2}$时，$f(x)$在$x = 0$处可导.

例6 设 $f(x)$连续， $\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt$, 且

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A,$$ 其中A为常数，求$\varphi'(x)$,

并讨论$\varphi'(x)$在$x=0$处的连续性.

解 $$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot x=A\cdot 0=0$$

$$\varphi(0)=\int_0^1 f(0)dt=\int_0^1 0dt=0$$

$$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt \overset{u=xt}{=\!=\!=} \int_0^x f(u)\cdot\frac{du}{x} \qquad (x\neq 0)$$

$$=\frac{\int_0^x f(u)du}{x} \qquad (x\neq 0).$$

(1) 求$\varphi'(x)$.

当$x\neq 0$时，$\varphi'(x)=\left(\frac{\int_0^x f(u)du}{x}\right)'$

$$=\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}.$$

当$x=0$时，

$$\varphi'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\int_0^x f(u)du}{x}-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}\overset{(\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2}$$

$$\therefore\quad \varphi'(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{2}, & x=0\\ \dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}, & x\neq 0\end{cases}.$$

(2) 讨论 $\varphi'(x)$在$x=0$处的连续性．

$$\lim_{x\to 0}\varphi'(x)\overset{?}{=}\varphi'(0)$$

$$\because\quad \lim_{x\to 0}\varphi'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}.$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)}{x}-\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}=\varphi'(0)$$

$\therefore\quad \varphi'(x)$在$x=0$处的连续．

例7 求下列极限：

(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\tan x}\sqrt{\sin t}\,\mathrm{d}t}{\int_0^{\sin x}\sqrt{\tan t}\,\mathrm{d}t}.\quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

解 原式 $$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\sin(\tan x)}\cdot\sec^2 x}{\sqrt{\tan(\sin x)}\cdot\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^3 x}\cdot\frac{\sqrt{\sin(\tan x)}}{\sqrt{\tan(\sin x)}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\sin(\tan x)}}{\sqrt{\tan(\sin x)}}\quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \sqrt{\frac{\sin(\tan x)}{\tan(\sin x)}}$$

$\because$ 当 $x \to 0$时， $\sin(\tan x) \sim \tan x$

$\tan(\sin x) \sim \sin x$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{\sin(\tan x)}{\tan(\sin x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{\sin x} = 1$$

从而 原式 $= \sqrt{1} = 1$

(2) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)$ $(\infty-\infty)$

当 $u\to 0$ 时，$e^u-1\sim u.$

解 原式 $=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-1+e^{-x}}{x(1-e^{-x})}$ $(\frac{0}{0})$

$=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-1+e^{-x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+2x-e^{-x}}{2x}$ $(\frac{0}{0})$

$=\lim_{x\to 0}\frac{2+e^{-x}}{2}=\frac{3}{2}.$

注 下列做法是错误的：

原式 $=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-1+e^{-x}}{x^2} \not= \lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-x}{x^2}=1$

(3) $I=\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{f(x+2r)+f(x-2r)-2f(x)}{r^2}$, $(\dfrac{0}{0})$

其中 $f(x)=\int_0^{x^2}\dfrac{1}{1+t^3}\mathrm{d}t.$

解 $I=\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{f'(x+2r)\cdot 2+f'(x-2r)\cdot(-2)}{2r}$

$=\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{f'(x+2r)-f'(x-2r)}{r}$

$=\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{2f''(x+2r)+2f''(x-2r)}{1}=4f''(x).$

$$\because \quad f(x) = \int_0^{x^2} \frac{1}{1+t^3} \mathrm{d}t$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+(x^2)^3} \cdot 2x = 2 \cdot \frac{x}{1+x^6}$$

$$f''(x) = 2 \cdot \left(\frac{x}{1+x^6}\right)' = 2 \cdot \frac{1-5x^6}{(1+x^6)^2}$$

$$\therefore \quad I = 4 f''(x) = \frac{8(1-5x^6)}{(1+x^6)^2}$$

(4) 设 $0<|x|<1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1})$.

解 $1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$

$$=(x)'+(x^2)'+(x^3)'+\cdots+(x^n)'$$

$$=(x+x^2+x^3+\cdots+x^n)'$$

$$=[(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n)-1]'=(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}-1)'$$

$$=\frac{-(n+1)x^n(1-x)-(1-x^{n+1})\cdot(-1)}{(1-x)^2}$$

$$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$$

$$=\frac{-(n+1)x^n(1-x)-(1-x^{n+1})\cdot(-1)}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{(n+1)x^n}{x-1}+\frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

当$0<|x|<1$时，

可以证明：

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)x^n=0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)x^n}{x-1}+\frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2}\right]=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

例8 填空题

1. 设 $x \to 0$时，$e^{\tan x} - e^{x}$与x^{n}是同阶无穷小，

则 $n = \underline{\quad 3 \quad}$.

解 $c = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\tan x} - e^{x}}{x^{n}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{x} \cdot \dfrac{e^{\tan x - x} - 1}{x^{n}}$

$$= \lim_{x\to 0} e^{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^{\tan x - x} - 1}{x^{n}} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^{n}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sec^{2} x - 1}{n x^{n-1}} = \frac{1}{n} \lim_{x\to 0} \frac{\tan^{2} x}{x^{n-1}} \qquad (c \neq 0)$$

2. 设当 $x \to 0$时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$是$x\sin x^n$高阶无穷小，而 $x\sin x^n$是比$(e^{x^2}-1)$高阶的无穷小，则正整数 $n =$ __2__ .

解 当 $x \to 0$时，

$$(1-\cos x)\ln(1+x^2) \sim \frac{x^2}{2}\cdot x^2 = \frac{x^4}{2},$$

$$x\sin x^n \sim x^{n+1}, \quad e^{x^2}-1 \sim x^2$$

依题设，

$$0 = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\ln(1+x^2)}{x\sin x^n} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{3-n}}{2}$$

得 $n < 3$

又由 $0 = \lim_{x \to 0} \frac{x \sin x^n}{e^{x^2} - 1} = \lim_{x \to 0} x^{n-1}$

得 $n > 1$

$\therefore \quad n = 2.$

3. 设 $a_n=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{n}{n+1}} x^{n-1}\sqrt{1+x^n}dx$， 则极限

$\lim\limits_{n\to\infty} na_n =$ $\underline{(1+e^{-1})^{3/2}-1}$.

解 $a_n=\frac{3}{2n}\int_0^{\frac{n}{n+1}} \sqrt{1+x^n}d(1+x^n)$

$$=\frac{1}{n}(1+x^n)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{n}{n+1}}=\frac{1}{n}\{[1+(\frac{n}{n+1})^n]^{\frac{3}{2}}-1\}$$

$$\lim_{n\to\infty} na_n=\lim_{n\to\infty}\{[1+\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}]^{\frac{3}{2}}-1\}=(1+e^{-1})^{3/2}-1.$$

4. 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf(x)+\ln(1+2x)}{x^2}=0$, 则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2+f(x)}{x}=$ <u>2</u>.

解(方法1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2+f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x+xf(x)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{xf(x)+\ln(1+2x)}{x^2}-\frac{\ln(1+2x)-2x}{x^2}\right]$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}-\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)-2x}{x^2}$$

$$=-\lim_{x\to0}\frac{\frac{2}{1+2x}-2}{2x}=-(-2)=2$$

(方法2) 由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf(x)+\ln(1+2x)}{x^2}=0$，知

$$xf(x)+\ln(1+2x)=o(x^2)$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{o(x^2)-\ln(1+2x)}{x}$$

故 $$\lim_{x\to0}\frac{2+f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2x+o(x^2)-\ln(1+2x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2x-\ln(1+2x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2-\dfrac{2}{1+2x}}{2x}=2$$

错解 由等价无穷小代换，$\ln(1+2x) \sim 2x \quad (x \to 0)$

得 $$0 = \lim_{x\to 0}\frac{xf(x)+\ln(1+2x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{xf(x)+2x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)+2}{x}$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0}\frac{2+f(x)}{x} = 0.$$

例9 已知 $f(x)$是周期为5的连续函数，它在 $x=0$的某邻域内满足关系式 ：

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x)$$

其中$o(x)$是当$x\to 0$时比x高阶的无穷小，且$f(x)$在$x=1$处可导，求曲线 $y=f(x)$ 在点$(6, f(6))$处的切线方程 .

解 由 $f(x)$的连续性，及

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x)$$

得 $\lim\limits_{x\to 0}[f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)]$

$=\lim\limits_{x\to 0}[8x+o(x)]=0$

即 $f(1)-3f(1)=0,\quad f(1)=0.$

又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}[\dfrac{8x}{\sin x}+\dfrac{o(x)}{x}\cdot\dfrac{x}{\sin x}]=8$

而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}$

$\overset{t=\sin x}{=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(1+t)-3f(1-t)}{t}$ $\quad(\because\quad f(1)=0)$

$=\lim\limits_{t\to 0}[\dfrac{f(1+t)-f(1)}{t}+3\cdot\dfrac{f(1-t)-f(1)}{-t}]$

$=f'(1)+3f'(1)=4f'(1)$

$\therefore\quad 4f'(1)=8,\quad f'(1)=2.$

由于 $f(x+5)=f(x)$,

所以令 $x=1$,

得 $f(6)=f(1)=0$

又 $f'(1)=f'(x)\big|_{x=1}$

$=f'(x+5)\big|_{x=1}\cdot(x+5)'\big|_{x=1}=f'(6)\cdot 1=f'(6)$

$\therefore\quad f'(6)=f'(1)=2$

故所求切线方程为： $y=2(x-6)$.

例10 已知 $f(x)$在$(0,+\infty)$内可导，$f(x)>0$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, 且满足：

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{1}{x}},$$ 求 $f(x)$.

解 $\because$ $$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}$$

$$=\lim_{h\to 0} e^{\frac{1}{h}\ln\left[\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right]}$$

而 $$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln[\frac{f(x+hx)}{f(x)}]$$

$$=x\lim_{h\to 0}\frac{\ln f(x+hx)-\ln f(x)}{hx}=x\cdot[\ln f(x)]'$$

$$\therefore \lim_{h\to 0}[\frac{f(x+hx)}{f(x)}]^{\frac{1}{h}}=\lim_{h\to 0}e^{\frac{1}{h}\ln[\frac{f(x+hx)}{f(x)}]}$$

$$=e^{x[\ln f(x)]'}$$

由已知条件得 $$e^{x[\ln f(x)]'}=e^{\frac{1}{x}},$$

故 $x[\ln f(x)]' = \dfrac{1}{x}$, 即 $[\ln f(x)]' = \dfrac{1}{x^2}$

$\therefore \ln f(x) = \int \dfrac{1}{x^2} dx = -\dfrac{1}{x} + c_1$

即 $f(x) = c e^{-\frac{1}{x}}$

由 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, 得 $c = 1$

$\therefore f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$.

例11 确定常数 a,b,c 的值，使

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c \quad (c\neq 0).$$

解 $\because \quad \lim_{x\to 0}\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}{ax-\sin x}\cdot(ax-\sin x)=\frac{1}{c}\cdot 0=0$$

$$\therefore \quad \int_b^0 \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt = 0$$

利用定积分的保号性，可以断定：$b = 0.$

于是 $c = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ax - \sin x}{\int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt}$ $\quad (\frac{0}{0})$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{a - \cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{(a - \cos x)x}{\ln(1+x^3)} \quad (\frac{0}{0})$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(a - \cos x)x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{a - \cos x}{x^2}$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to 0}(a - \cos x) = \lim_{x \to 0} \frac{a - \cos x}{x^2} \cdot x^2 = c \cdot 0 = 0$$

$$a - 1 = 0, \qquad a = 1.$$

从而 $c = \lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{2x} = \dfrac{1}{2}.$

例12 已知 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，且

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = e,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\frac{\int_{x-1}^{x} f(t)dt}{x},$$

求 c 的值.

解 $\because \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2c}{x-c}\right)^{\frac{x-c}{2c}}\right]^{\frac{2cx}{x-c}}$

$$= e^{2c}$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to\infty}\int_{x-1}^{x} f(t)dt = \lim_{x\to\infty}\frac{\int_{x-1}^{x} f(t)dt}{x}\cdot x = \infty$$

故 $$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_{x-1}^{x} f(t)dt}{x} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-f(x-1)}{1}$$

又由拉格朗日中值定理， $\exists \quad \xi \in (x-1, x),$

使 $$f(x)-f(x-1) = f'(\xi)\cdot 1$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)] = \lim_{x\to\infty} f'(\xi)$$

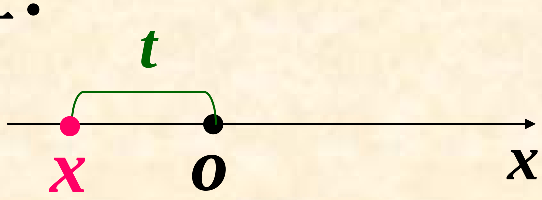
$$= \lim_{\xi\to\infty} f'(\xi) = e$$

于是 $e^{2c} = e,$ 故 $c = \dfrac{1}{2}.$

例13 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$ $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$

讨论$F(x)$的连续性及可导性.

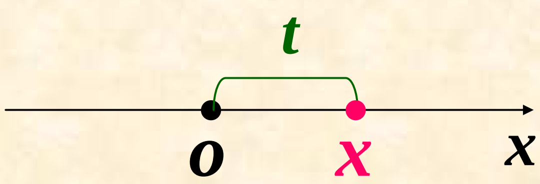
解 当$x<0$时,



$$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x(-1)\,\mathrm{d}t=-x$$

当$x=0$时, $F(0)=0$

当$x>0$时,



$$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x 1\,\mathrm{d}t=x$$

$\therefore \quad F(x) = |x|$

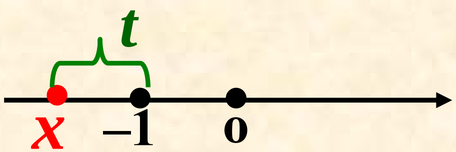
$\therefore \quad F(x)$在R上连续，在 $x = 0$处不可导，

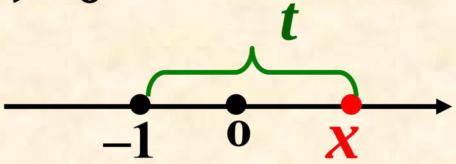
在$x \neq 0$处可导.

类似题:

1. 设 $f(x)=|x|$, 求 $\int_{-1}^{x} f(t)dt, x\in(-\infty,+\infty)$.

解
$$\int_{-1}^{x} f(t)dt=\begin{cases}\int_{-1}^{x}(-t)dt, & x\le 0\\ \int_{-1}^{0}(-t)dt+\int_{0}^{x}tdt, & x>0\end{cases}$$





$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}-\dfrac{x^2}{2}, & x\le 0\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{x^2}{2}, & x>0\end{cases}$$

2. 设 $f(x)=x,\ \ g(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$,

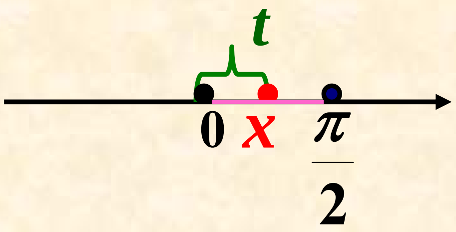
求 $\int_0^x f(t)g(x-t)dt$, 在 $[0,+\infty)$ 上的表达式.

解 $\int_0^x f(t)g(x-t)dt \overset{u=x-t}{=\!=\!=} \int_x^0 f(x-u)g(u)(-du)$

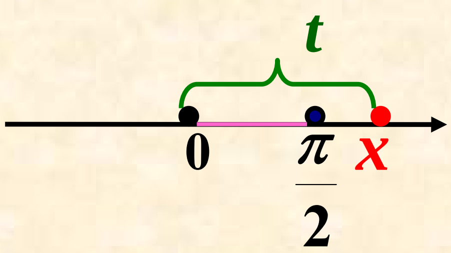
$$=\int_0^x f(x-u)g(u)du=\int_0^x (x-u)g(u)du$$

$$= \int_0^x (x-u)g(u)du$$

$$= \begin{cases} \int_0^x (x-u)\sin u\,du, & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-u)\sin u\,du + \int_{\frac{\pi}{2}}^x (x-u)\cdot 0\,du, & x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$



$$= \begin{cases} x - \sin x, & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ x - 1, & x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$



3. 设 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$,

求 $h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(t-x)\,\mathrm{d}x$的表达式.

解 $h(t)=\int_{-\infty}^{0} \underbrace{f(x)}_{0} g(t-x)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1} f(x)g(t-x)\,\mathrm{d}x$

$+\int_{1}^{+\infty} \underbrace{f(x)}_{0} g(t-x)\,\mathrm{d}x$

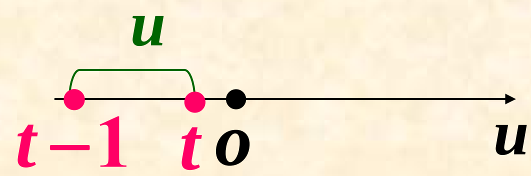
$=\int_{0}^{1} f(x)g(t-x)\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{1} 2xg(t-x)\,\mathrm{d}x$

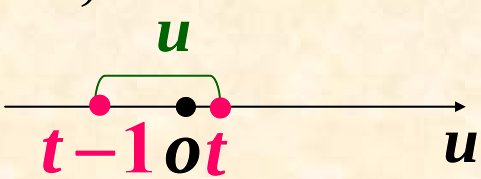
$$h(t)=\int_0^1 2xg(t-x)\,\mathrm{d}x \qquad g(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

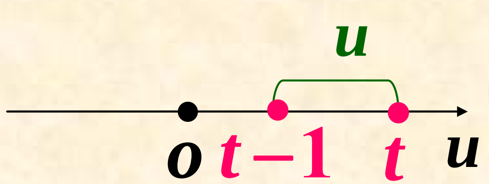
$$\underline{\underline{u=t-x}}\; 2\int_t^{t-1}(t-u)g(u)(-\mathrm{d}u)=2\int_{t-1}^{t}(t-u)g(u)\,\mathrm{d}u$$

$$=\begin{cases} 0, & \text{当}\, t\le 0\,\text{时} \\ 2\int_{t-1}^{0}(t-u)\boxed{g(u)}\,\mathrm{d}u+2\int_0^t (t-u)\,e^{-u}\,\mathrm{d}u, & \text{当}\, 0<t\le 1\,\text{时} \\ 2\int_{t-1}^{t}(t-u)e^{-u}\,\mathrm{d}u, & \text{当}\, t>1\,\text{时} \end{cases}$$

0







$$h(t)=\begin{cases} 0, & t \le 0 \\ 2(e^{-t}+t-1), & 0 < t \le 1 \\ 2e^{-t}, & t > 1 \end{cases}$$