数学物理方程学习指导与习题解答

王明新　王晓光

内容简介

本书可作为数学和应用数学、计算数学、物理、力学专业的本科生以及工科相关专业的研究生的教学参考书，亦可供数学工作者、物理工作者和工程技术人员参考.

这是一本数学物理方程学习指导与习题解答参考书, 它是围绕作者的《数学物理方程》(清华大学出版社,2005 年出版) 一书写成的. 每章都包含三部分内容 — 内容提要, 作者的《数学物理方程》一书的习题解答和相关补充习题的解答. 阅读本书, 可以了解和掌握各种解题方法和技巧.

目　录

第一章　典型方程的导出、定解问题及二阶方程的分类与化简

§1.1　内容提要

建立偏微分方程模型的基本原理是两大物理定律 — 守恒律和变分原理, 其数学方法是微元法和 Fubini 交换积分次序定理. 常常用到微积分中的三个基本结论, 叙述如下:

命题 1.1 设开集 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, f 在 Ω 内连续. 如果对于任意的子集 $\Omega'\subset\Omega$, 都有

$$\int_{\Omega'} f(x)\mathrm{d}x=0,$$

则在 Ω 上 $f\equiv 0$.

命题 1.2 设开集 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, f 在 Ω 内连续. 如果对于任意的 $v\in C_0^\infty(\Omega)$, 都有

$$\int_{\Omega} f(x)v(x)\mathrm{d}x=0,$$

则在 Ω 上 $f\equiv 0$.

命题 1.3 (Stokes 公式)设 $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ 是一个有界光滑区域, 对于 C^1 的 m 维向量值函数 $\vec{v}$, 下面的积分等式成立:

$$\int_{\Omega}\operatorname{div}\vec{v}\,\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S, \tag{1.1}$$

其中 $\vec{n}$ 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量,$\mathrm{d}S$ 是 $\partial\Omega$ 上的面积元素. 当 $m=1,2,3$ 时, 公式(1.1)就分别是牛顿 – 莱布尼兹公式,Green公式和奥高公式.

§1.2　习题解答

1.1 有一长为 l 的均匀而柔软的细线, 上端 $(x=0)$ 固定, 在自身重力的作用下, 此弦处于铅直的平衡位置. 试导出此弦相对于竖直线的微小横振动方程.

解 将弦振动模型一般化. 弦密度是位置的函数记为 $\rho(x)$, 弦的张力亦是位置的函数记为 $T(x)$, 在 u 的正方向、单位长度上的外力密度记为 $f_0(x,t)$.

图 1.1

我们利用动量守恒来导出 u 的变化规律 (参见图 1.1). 任取一小段弦 $[a,b]$, 小时段 $[t_1,t_2]$, 在 $[a,b]\times[t_1,t_2]$ 上研究弦的变化情况. 这时沿水平方向的动量守恒律可以写成:

$$\boxed{\begin{array}{c} t=t_2 \\ \text{时的动量} \end{array}} - \boxed{\begin{array}{c} t=t_1 \\ \text{时的动量} \end{array}} = \boxed{\begin{array}{c} \text{外力在}\,[a,b]\times[t_1,t_2] \\ \text{内产生的冲量} \end{array}} + \boxed{\begin{array}{c} \text{张力在水平方} \\ \text{向产生的冲量} \end{array}}$$

即

$$\int_a^b \rho u_t|_{t=t_2}\,\mathrm{d}x - \int_a^b \rho u_t|_{t=t_1}\,\mathrm{d}x = \int_{t_1}^{t_2}\int_a^b f_0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} [T(b)\sin\alpha_b - T(a)\sin\alpha_a]\,\mathrm{d}t.$$

利用

$$\sin\alpha_a = \left.\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}\right|_{x=a} \approx u_x|_{x=a},\quad \sin\alpha_b = \left.\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}\right|_{x=b} \approx u_x|_{x=b},$$

可得

$$\begin{aligned}
\int_a^b\int_{t_1}^{t_2} \rho(x)u_{tt}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \rho(x)\,[u_t(x,t_2)-u_t(x,t_1)]\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{t_1}^{t_2}\int_a^b f_0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2}[T(b)u_x(b,t)-T(a)u_x(a,t)]\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{t_2}\int_a^b f_0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2}\int_a^b (T(x)u_x)_x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

根据 Fubini 交换积分次序定理以及 a, b, t_1, t_2 的任意性，可得

$$\rho(x)u_{tt} = (T(x)u_x)_x + f_0(x,t). \tag{1.2}$$

在本题中, 弦密度 $\rho(x)=\rho$ 是常数, 张力 $T(x)=(l-x)\rho g$, 外力密度 $f_0(x,t)=0$. 代入 (1.2) 式得弦的振动方程:

$$u_{tt} = g[(l-x)u_x]_x.$$

1.2 一根细弦在媒质中作横振动, 假设媒质的阻力与速度成正比. 试导出弦的横振动方程.

解 因为本题中是细弦, 所以 $\rho(x)=\rho_0$ (常数), $T(x)=T_0$ (常数), $f_0(x,t)=-\gamma u_t$, 其中 $\gamma>0$ 是阻力系数, 负号表示阻力与速度方向相反. 代入 (1.2) 式得

$$\rho_0 u_{tt} = (T_0u_x)_x - \gamma u_t.$$

若记 $a^2=T_0/\rho_0$, $k^2=\gamma/\rho_0$, 上式可写成

$$u_{tt} = a^2u_{xx} - k^2u_t.$$

1.3 均匀细杆在外力作用下沿杆的方向作微小纵振动. 试导出每一截面离开平衡位置所满足的方程 (见图 1.2).

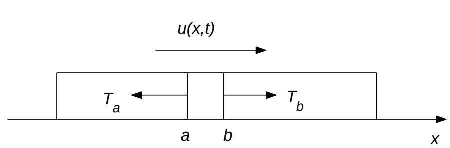

图 1.2

解 将杆的振动模型一般化. 杆密度是位置的函数, 记为 $\rho(x)$. 杆的横截面积亦是位置的函数, 记为 $S(x)$. 那么杆的截面所受张力为 $T(x) = ES(x)u_x$, 其中 E 是杨氏模量. 在 u 的正方向、单位长度上的外力密度是 $f_0(x,t)$. 在 $[a,b]\times[t_1,\, t_2]$ 上研究杆的振动情况. 杆的动量变化为

$$\Delta P = \int_a^b \rho(x)S(x)\left[u_t(x,t_2) - u_t(x,t_1)\right]\mathrm{d}x = \int_a^b \rho(x)S(x)\left(\int_{t_1}^{t_2} u_{tt}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x.$$

冲量包括两部分: 张力在 u 方向的冲量 I_1 和外力在 u 方向的冲量 I_2,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{t_1}^{t_2} (ES(x)u_x|_{x=b} - ES(x)u_x|_{x=a})\mathrm{d}t \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\int_a^b (ES(x)u_x)_x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \\ I_2 &= \int_{t_1}^{t_2}\int_a^b f_0(x,t)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

由动量守恒 $I_1 + I_2 = \Delta P$, 以及 a, b, t_1, t_2 的任意性, 可得

$$\rho(x)S(x)u_{tt} = (ES(x)u_x)_x + f_0(x,t). \tag{1.3}$$

因为本题中的杆是均匀细杆, 所以 $\rho(x) = \rho$ (常数), $S(x) = S_0$ (常数). 将它们代入 (1.3) 式得杆的微小纵振动方程:

$$\rho u_{tt} = (Eu_x)_x + f(x,t).$$

1.4 有一圆锥形轴 (见图 1.3), 其高为 h, 密度和杨氏模量分别为常数 ρ 和 E. 试证明其纵振动方程为

$$E\left[\left(1-\frac{x}{h}\right)^2 u_x\right]_x = \rho\left(1-\frac{x}{h}\right)^2 u_{tt}.$$

图 1.3

解 在 1.3 题的一般模型中, 取 $\rho(x) = \rho$ (常数), 外力密度 $f_0(x,t) = 0$. 利用初等几何的方法, 可导出杆的横截面积与位置的关系:

$$S(x) = S_0\left(1-\frac{x}{h}\right)^2,$$

其中 S_0 为圆锥形轴的底面积. 代入 (1.3) 式得圆锥形轴的纵振动方程:

$$E\left[\left(1-\frac{x}{h}\right)^2 u_x\right]_x = \rho\left(1-\frac{x}{h}\right)^2 u_{tt}.$$

1.5 试导出薄膜的横振动方程, 并分别对 (1) 边界固定在钢丝上; (2) 边界部分受到外力的作用; (3) 边界固定在弹性支承上, 这三种情况写出定解条件.

解 取一小块薄膜 D, 一时段 $[t_1,t_2]$, 记 D 的边界为 ∂D. 在 ∂D 上任取一小段 $\mathrm{d}S$, $\mathrm{d}S$ 上受到的外部张力为 $T\,\mathrm{d}S\,\vec{n}$, 该张力在 u 轴上的投影是 $T\mathrm{d}S\vec{n}\cdot\nabla u = T\nabla u\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$. 因此外部张力产生的冲量为

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial D} T\nabla u\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\int_D \nabla\cdot(T\nabla u)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t.$$

若记外力密度为 f_1, 则外力产生的冲量为

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_D f_1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t.$$

动量的增量是

$$\int_D \rho u_t|_{t_2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_D \rho u_t|_{t_1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_D\int_{t_1}^{t_2}\rho u_{tt}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

根据守恒律得

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_D \rho u_{tt}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\int_D \nabla\cdot(T\nabla u)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2}\int_D f_1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t,$$

由 D,t_1,t_2 的任意性得

$$\rho u_{tt} = \nabla\cdot(T\nabla u)+f_1,\quad \text{或者}\quad u_{tt}=a^2\Delta u+f.$$

初值条件是 $u(x,y,0)=\varphi(x,y),\ u_t(x,y,0)=\psi(x,y),\ (x,y)\in\Omega$.

边界条件分别是

(1) $u(x,y,t)=g(x,y,t),\quad (x,y)\in\partial\Omega,\ t\geq 0,$

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial\vec{n}}=g(x,y,t),\quad (x,y)\in\partial\Omega,\ t\geq 0,$

(3) $\alpha u+\dfrac{\partial u}{\partial\vec{n}}=0,\quad (x,y)\in\partial\Omega,\ t\geq 0.$

1.6 在杆纵向振动时, 假设 (1) 端点固定; (2) 端点自由; (3) 端点固定在弹性支承上. 试导出杆的纵振动方程, 并写出这三种情况下对应的边界条件.

解 记杨氏模量为 E, 密度为 ρ, 杆的横截面面积为 S. 取一小段杆长 $[a,b]$, 一时段 $[t_1,t_2]$. 在 a,b 点处的张力分别为 $ESu_x(a,t)$ 和 $ESu_x(b,t)$, 小杆所受的张力和为 $ESu_x(b,t)-ESu_x(a,t)$, 冲量为

$$\int_{t_1}^{t_2}[ESu_x(b,t)-ESu_x(a,t)]\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2}\int_a^b (ESu_x)_x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

在 t_1 和 t_2 时刻的动量分别为 $\displaystyle\int_a^b \rho Su_t|_{t_1}\,\mathrm{d}x$ 和 $\displaystyle\int_a^b \rho Su_t|_{t_2}\,\mathrm{d}x$. 根据守恒律,

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_a^b (ESu_x)_x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_a^b \rho Su_t|_{t_2}\,\mathrm{d}x - \int_a^b \rho Su_t|_{t_1}\,\mathrm{d}x = \int_a^b\int_{t_1}^{t_2}\rho Su_{tt}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x.$$

由 a,b,t_1,t_2 的任意性得

$$\rho Su_{tt}=(ESu_x)_x.$$

边界条件分别为:

(1) $u(0,t)=u(l,t)=0$;

(2) $u_x(0,t)=u_x(l,t)=0$;

(3) $(\alpha u-\beta u_x)|_{x=0}=(\alpha u+\beta u_x)|_{x=l}=0$.

1.7 有一个半径为 r, 线密度为 ρ 的均匀圆柱体. 假设该圆柱体的同一横截面上的温度是相同的, 圆柱体的侧面与周围介质有热交换, 且满足牛顿热交换定律. 记圆柱体的比热是 c, 热传导系数是 k, 介质的温度是 u_0（常数）, 热交换系数是 k_1. 试导出温度分布 u 满足的微分方程.

解 圆柱体在轴方向 $[a,b]$ 段内的区域记为 V. 研究在区域 V 及时段 $[t_1,t_2]$ 内热量的变化情况. 由能量守恒知,$[t_1,t_2]$ 时段内 V 中增加的热量等于 $[t_1,t_2]$ 时段通过边界 ∂V 流入 V 的热量. 在 $[t_1,t_2]$ 时段内 V 中温度升高增加的热量是

$$Q=\int_a^b Sc\rho\,(u|_{t=t_2}-u|_{t=t_1})\,\mathrm{d}x=\int_a^b\int_{t_1}^{t_2}Sc\rho u_t\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x.$$

通过边界 ∂V 流入 V 的热量 Q^* 包含两部分 — 圆柱内部的热传导以及与外界进行热交换所吸收的热量:

$$\begin{aligned}Q^* &= \int_{t_1}^{t_2}S(ku_x|_{x=b}-ku_x|_{x=a})\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\int_a^b lk_1(u_0-u)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &=\int_{t_1}^{t_2}\int_a^b Sku_{xx}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\int_a^b lk_1(u_0-u)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

其中 $S=\pi r^2$ 是圆柱横截面积,$l=2\pi r$ 是圆柱截面周长. 再由 $Q=Q^*$ 及 a,b,t_1,t_2 的任意性, 可得

$$u_t=\frac{k}{c\rho}u_{xx}+\frac{2k_1}{cr\rho}(u_0-u).$$

1.8 气体（或液体）在多孔介质中扩散, 浓度为 $u(x,y,z,t)$, 满足 Nernst 定律, 即分子运动速度与浓度的梯度成正比、方向相反：$\vec{v}=-D\nabla u$, 其中 D 为扩散系数. 设介质的空隙系数为 c. 试导出 u 所满足的微分方程.

解 溶质扩散的守恒律为：$[t_1,t_2]$ 时段内 V 中增加的溶质的质量 m_1 等于 $[t_1,t_2]$ 时段通过边界 ∂V 流入 V 的溶质的质量 m_2. 易知

$$\begin{aligned}m_1 &= \int_V(cu|_{t=t_2}-cu|_{t=t_1})\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_V\int_{t_1}^{t_2}(cu)_t\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\\ m_2 &= -\int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial V}\vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial V}D\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t\\ &=\int_{t_1}^{t_2}\int_V\nabla\cdot(D\nabla u)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

根据 $m_1=m_2$ 及 t_1,t_2,V 的任意性得

$$(cu)_t=\nabla\cdot(D\nabla u).$$

1.9 一均匀圆盘的整个表面都是绝热的. 设在 $t=0$ 时其温度只是 r 的函数,r 为圆盘上的点至圆盘中心的距离. 试证明圆盘上的温度 $u(r,t)$ 满足的微分方程是

$$u_t=a^2\left(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r\right).$$

证明 考察圆盘上对应于 $r_1 \le r \le r_2$ 的区域 Ω (见图 1.4).

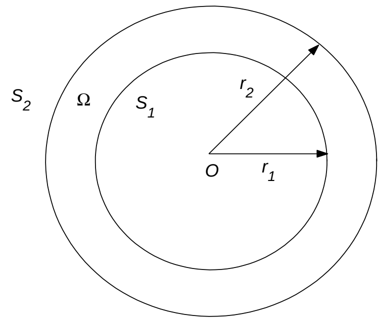

图 1.4

由能量守恒知, 在 $[t_1, t_2]$ 时段 Ω 中增加的热量 Q 等于通过边界 $\partial\Omega = S_1 \bigcup S_2$ 流入 Ω 的热量 Q^*. 记圆盘的比热和面密度分别为 c 和 ρ (它们都是常数). 因为 $t = 0$ 时温度只是 r 的函数, 所以 $u = u(r, t)$ 只是 r, t 的函数. 于是

$$\begin{aligned} Q &= \int_\Omega (c\rho u|_{t=t_2} - c\rho u|_{t=t_1}) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= c\rho \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} (u|_{t=t_2} - u|_{t=t_1}) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi c\rho \int_{t_1}^{t_2} \int_{r_1}^{r_2} r u_t\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

记热传导系数为 k, 则热流密度为

$$\vec{q} = -k(u_x, u_y) = -k(u_r r_x, u_r r_y) = -k u_r(\cos\theta, \sin\theta) \triangleq -k u_r \vec{n}_0,$$

在边界 S_1 上, 外法向 $\vec{n} = -(\cos\theta, \sin\theta) = -\vec{n}_0$. 在边界 S_2 上, 外法向 $\vec{n} = (\cos\theta, \sin\theta) = \vec{n}_0$. 由此得 $[t_1, t_2]$ 时段内通过边界 $\partial\Omega$ 流入 Ω 的热量是

$$\begin{aligned} Q^* &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega} (-\vec{q}\cdot\vec{n}) \mathrm{d}S\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega} k u_r \vec{n}_0 \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{2\pi} (k r u_r|_{r=r_2} - k r u_r|_{r=r_1}) \mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t \\ &= 2\pi \int_{t_1}^{t_2} \int_{r_1}^{r_2} k (r u_r)_r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

利用 $Q = Q^*$ 及 t_1, t_2, r_1, r_2 的任意性, 便得

$$c\rho r u_t = k(r u_r)_r.$$

若记 $a^2 = \dfrac{k}{c\rho}$, 上式可以写成

$$u_t = a^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right).$$

1.10 均匀细导线, 每单位长的电阻为 R, 通以恒定的电流 I, 导线表面与周围温度为零度的介质进行热交换. 试导出导线上的温度 u 满足的定解问题 (设初始温度和两端温度都是零度).

解 先导出温度 u 所满足的微分方程. 用 l 表示导线的长度,S 表示导线的横截面积, ρ 表示导线密度,L 表示导线横截面周长,c 表示导线比热, R 表示导线单位长度的电阻,I 表示流过导线的电流强度,k 表示导线内部的热传导系数, k_1 表示导线与周围介质的热交换系数,γ 表示导线对电流产生热量的吸收率.

考察导线在 $[a,b]$ 段及时段 $[t_1,t_2]$ 内热量变化情况. 在 $[t_1,t_2]$ 时段内导线增加的热量是

$$Q=\int_a^b c\rho S\left(u|_{t=t_2}-u|_{t=t_1}\right)\mathrm{d}x.$$

在 $[t_1,t_2]$ 时段内流入 $[a,b]$ 段的热量包含两部分 — 导线内部的热传导以及与外界热交换所产生的热量:

$$Q_1=\int_{t_1}^{t_2} S(ku_x|_{x=b}-ku_x|_{x=a})\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\int_a^b k_1L(0-u)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

在 $[t_1,t_2]$ 时段内电流产生的热量被导线吸收的部分为

$$Q_2=\int_{t_1}^{t_2}\int_a^b \gamma I^2R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

由能量守恒 $Q=Q_1+Q_2$, 及 t_1,t_2,a,b 的任意性得

$$c\rho Su_t=kSu_{xx}-k_1Lu+\gamma I^2R.$$

若记 $a^2=\dfrac{k}{c\rho}$, $b=\dfrac{k_1L}{c\rho S}$, $u_0=\dfrac{\gamma I^2R}{c\rho S}$, 上式可以写成

$$u_t-a^2u_{xx}+bu=u_0.$$

再利用初值条件及边界条件, 可得如下定解问题

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}+bu=u_0, & 0<x<l,\ t>0,\\ u(0,t)=u(l,t)=0, & t\ge 0,\\ u(x,0)=0, & 0\le x\le l.\end{cases}$$

1.11 证明两个自变量的二阶线性偏微分方程经过可逆变换后, 它的类型不会改变. 也就是说, 经可逆变换后,$\triangle=a_{12}^2-a_{11}a_{12}$ 的符号不变.

证明 设原二阶线性偏微分方程为

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=f. \tag{1.4}$$

在可逆自变量变换

$$x=x(\xi,\eta),\quad y=y(\xi,\eta),\quad \text{或}\quad \xi=\xi(x,y),\quad \eta=\eta(x,y)$$

之下,(1.4) 式变成

$$a_{11}^*u_{\xi\xi}+2a_{12}^*u_{\xi\eta}+a_{22}^*u_{\eta\eta}+b_1^*u_\xi+b_2^*u_\eta+c^*u=f^*,$$

并且系数有如下关系

$$a_{11}^*=(\nabla\xi)^TA\nabla\xi,\quad a_{22}^*=(\nabla\eta)^TA\nabla\eta,\quad a_{12}^*=(\nabla\xi)^TA\nabla\eta=(\nabla\eta)^TA\nabla\xi,$$

其中

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \nabla\xi=(\xi_x,\xi_y)^T, \quad \nabla\eta=(\eta_x,\eta_y)^T.$$

于是

$$A^*\triangleq\begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (\nabla\xi)^T A\nabla\xi & (\nabla\xi)^T A\nabla\eta \\ (\nabla\eta)^T A\nabla\xi & (\nabla\eta)^T A\nabla\eta \end{pmatrix}=JAJ^T.$$

这里,$J=(\nabla\xi,\nabla\eta)^T$ 是 Jacobi 矩阵. 上式两边取行列式得

$$-\Delta^*=|A^*|=|A|\times|J|^2=-\Delta\times|J|^2.$$

因为 $|J|^2\neq 0$, 故 Δ^* 与 Δ 同号.

1.12 判断下述方程的类型：

(1) $x^2u_{xx}-y^2u_{yy}=0$;

(2) $u_{xx}+(x+y)^2u_{yy}=0$;

(3) $u_{xx}+xyu_{yy}=0$;

(4) $xu_{xx}+4u_{yy}=f(x,y)$.

解 (1) $\Delta=x^2y^2$. 当 $xy=0$ 时 $\Delta=0$, 方程为抛物型方程；当 $xy\neq 0$ 时 $\Delta>0$, 方程为双曲型方程.

(2) $\Delta=-(x+y)^2$. 当 $x+y=0$ 时 $\Delta=0$, 方程为抛物型方程；当 $x+y\neq 0$ 时 $\Delta<0$, 方程为椭圆型方程.

(3) $\Delta=-xy$. 当 $xy=0$ 时 $\Delta=0$, 方程为抛物型方程；当 $xy>0$ 时 $\Delta<0$, 方程为椭圆型方程；当 $xy<0$ 时 $\Delta>0$, 方程为双曲型方程.

(4) $\Delta=-4x$. 当 $x=0$ 时 $\Delta=0$, 方程为抛物型方程；当 $x>0$ 时 $\Delta<0$, 方程为椭圆型方程；当 $x<0$ 时 $\Delta>0$, 为方程双曲型方程.

1.13 化简下列方程为标准形式：

(1) $u_{xx}+4u_{xy}+5u_{yy}+u_x+2u_y=0$;

(2) $u_{xx}+yu_{yy}=0$;

(3) $u_{xx}-4u_{xy}+4u_{yy}=\mathrm{e}^y$;

(4) $u_{xx}+u_{xy}+u_{yy}+u_x=0$.

解 (1) $\Delta=-1$, 方程为椭圆型方程, 对应的特征方程是

$$\mathrm{d}y^2-4\mathrm{d}x\mathrm{d}y+5\mathrm{d}x^2=0.$$

把它分解为两个方程:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\pm\mathrm{i},$$

解得两簇特征线 (积分曲线):

$$y-2x\pm\mathrm{i}x=C_\pm.$$

选取变换

$$\xi = y - 2x, \quad \eta = x,$$

可把原方程化简为

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_{\eta} = 0.$$

(2) $\Delta = -y$. 当 $y = 0$ 时 $\Delta = 0$, 方程为抛物型方程, 标准形式为 $u_{xx} = 0$; 当 $y > 0$ 时 $\Delta < 0$, 方程为椭圆型方程, 对应的特征方程是

$$\mathrm{d}y^2 + y\mathrm{d}x^2 = 0.$$

解得两簇特征线:

$$2\sqrt{y} \pm \mathrm{i}x = C_{\pm}.$$

选取变换

$$\xi = 2\sqrt{y}, \quad \eta = x,$$

可把原方程化简为

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - \frac{1}{\xi}u_{\xi} = 0.$$

当 $y < 0$ 时 $\Delta > 0$, 方程为双曲型方程, 对应的特征方程是

$$\mathrm{d}y^2 + y\mathrm{d}x^2 = 0.$$

解得两簇特征线:

$$-2\sqrt{-y} \pm x = C_{\pm}.$$

选取变换

$$\xi = x - 2\sqrt{-y}, \quad \eta = x + 2\sqrt{-y},$$

可把原方程化简为

$$u_{\xi\eta} = -\frac{1}{2(\xi - \eta)}(u_{\xi} - u_{\eta}).$$

(3) $\Delta = 0$, 方程为抛物型方程, 对应的特征方程是

$$\mathrm{d}y^2 + 4\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 4\mathrm{d}x^2 = 0.$$

解得一簇积分曲线：

$$y + 2x = C.$$

选取变换

$$\xi = y + 2x, \quad \eta = y,$$

可把原方程化简为

$$4u_{\eta\eta} = \mathrm{e}^{\eta}.$$

(4) $\Delta = -\frac{3}{4}$, 方程为椭圆型方程, 对应的特征方程是

$$\mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \mathrm{d}x^2 = 0.$$

解得两簇积分曲线:

$$y - \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}\right) x = C_{\pm}.$$

选取变换

$$\xi = x - 2y, \quad \eta = x,$$

可把原方程化简为

$$3u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_{\xi} + u_{\eta} = 0.$$

1.14 确定下列方程的通解：

(1) $u_{xx} - 3u_{xy} + 2u_{yy} = 0$;

(2) $u_{xx} - u_{xy} = 0$;

(3) $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} + xyu_x + y^2u_y = 0$.

解 (1) $\Delta = \frac{1}{4} > 0$, 方程为双曲型方程, 对应的特征方程是

$$\mathrm{d}y^2 + 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2\mathrm{d}x^2 = 0.$$

解得两簇积分曲线:

$$y + x = C_1, \quad y + 2x = C_2.$$

选取变换 $\xi = y + x$, $\eta = y + 2x$, 可把原方程化简成

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

此方程的通解是

$$u = f(\xi) + g(\eta).$$

还原得原方程通解为

$$u = f(x + y) + g(2x + y).$$

(2) $\Delta = \frac{1}{4} > 0$, 方程为双曲型方程, 对应的特征方程是

$$\mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

解得两簇积分曲线:

$$y + x = C_1, \quad y = C_2.$$

选取变换 $\xi=y+x$, $\eta=y$, 可把原方程化简为

$$u_{\xi\eta}=0.$$

由此得原方程的通解为

$$u=f(\xi)+g(\eta)=f(x+y)+g(y).$$

(3) $\Delta=(xy)^2-x^2y^2=0$, 方程为抛物型方程, 对应的特征方程是

$$x^2\mathrm{d}y^2-2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+y^2\mathrm{d}x^2=0.$$

解得一簇积分曲线

$$\frac{y}{x}=C.$$

选取变换 $\xi=y/x$, $\eta=y$, 可把原方程化简为

$$u_{\eta\eta}+u_\eta=0,\quad 即\quad (\mathrm{e}^\eta u_\eta)_\eta=0.$$

此方程的通解是

$$u=f(\xi)\mathrm{e}^{-\eta}+g(\xi),$$

故原方程的通解为

$$u=f\left(\frac{y}{x}\right)\mathrm{e}^{-y}+g\left(\frac{y}{x}\right).$$

1.15 证明两个自变量的二阶线性常系数双曲型方程或椭圆型方程一定可以经过自变量的变换及函数变换 $u=\mathrm{e}^{\lambda\xi+\mu\eta}v$, 将它化简成 $v_{\xi\xi}\pm v_{\eta\eta}+hv=f$ 的形式.

证明 我们已经知道二阶线性常系数双曲型方程或椭圆型方程可以经过自变量的变换化为如下形式

$$u_{\xi\xi}\pm u_{\eta\eta}=Au_\xi+Bu_\eta+Cu+f_0,$$

其中 A,B,C 为常数, 下面证明它在函数变换 $u=\mathrm{e}^{\lambda\xi+\mu\eta}v$ 下, 可以化简成 $v_{\xi\xi}\pm v_{\eta\eta}+hv=f$ 的形式. 为此只需确定系数 λ,μ 即可. 考虑到证明的相似性, 以下仅讨论椭圆型方程.

记 $s=\lambda\xi+\mu\eta$, 则有

$$\begin{aligned}u_\xi&=\mathrm{e}^s(\lambda v+v_\xi),\quad u_\eta=\mathrm{e}^s(\mu v+v_\eta),\\u_{\xi\xi}&=\mathrm{e}^s(\lambda^2v+2\lambda v_\xi+v_{\xi\xi}),\\u_{\eta\eta}&=\mathrm{e}^s(\mu^2v+2\mu v_\eta+v_{\eta\eta}).\end{aligned}$$

代入椭圆型方程可得

$$\mathrm{e}^s(v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta})=\mathrm{e}^s(A-2\lambda)v_\xi+\mathrm{e}^s(B-2\mu)v_\eta+\mathrm{e}^s(C+A\lambda+B\mu-\lambda^2-\mu^2)v+f_0.$$

只要令

$$\lambda=\frac{A}{2},\quad \mu=\frac{B}{2},\quad h=-C-\frac{1}{4}(A^2+B^2),\quad f=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(A\xi+B\eta)}f_0,$$

便可将方程化简为 $v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}+hv=f$.

注 1. 对于双曲型方程

$$u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}=Au_\xi+Bu_\eta+Cu+f_0,$$

在函数变换 $u=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(A\xi-B\eta)}v$ 下, 可以化简成

$$v_{\xi\xi}-v_{\eta\eta}-hv=f$$

的形式, 其中 $h=C+\frac{1}{4}(A^2-B^2)$, $f=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(A\xi-B\eta)}f_0$.

2. 对于抛物型方程

$$u_{\eta\eta}=Au_\xi+Bu_\eta+Cu+f_0,$$

要求 $A\neq 0$, 否则成为常微分方程. 在函数变换 $u=\exp\left(-\dfrac{B^2+4C}{4A}\xi+\dfrac{B}{2}\eta\right)v$ 下, 可以化简成

$$v_{\eta\eta}=Av_\xi+f$$

的形式, 其中 $f=\exp\left(\dfrac{B^2+4C}{4A}\xi-\dfrac{B}{2}\eta\right)f_0$.

1.16 设 h,a 为正常数, 证明方程

$$\left(1-\frac{x}{h}\right)^2u_{tt}=a^2\left[\left(1-\frac{x}{h}\right)^2u_x\right]_x,\quad x\neq h$$

的通解可以表示成

$$u(x,t)=\frac{F(x-at)+G(x+at)}{h-x},$$

其中 F,G 为任意的二次连续可微函数. 并导出该方程带有初值 $u(x,0)=\varphi(x)$, $u_t(x,0)=\psi(x)$ 的解的表达式, 其中 φ,ψ 为充分光滑的已知函数.

证明 作函数变换 $v(x,t)=(h-x)u(x,t)$, 容易验证 v 满足方程

$$v_{tt}-a^2v_{xx}=0.$$

在变换 $\xi=x-at$, $\eta=x+at$ 之下, 上述方程可化简为

$$v_{\xi\eta}=0.$$

此方程的通解为

$$v=F(\xi)+G(\eta)=F(x-at)+G(x+at),$$

其中 F,G 为任意的二次连续可微函数. 故原方程的通解可以表示成

$$u(x,t)=\frac{F(x-at)+G(x+at)}{h-x}.$$

利用初值条件可以定出

$$F(x)+G(x)=(h-x)\varphi(x),\quad F(x)-G(x)=-\frac{1}{a}\int_0^x(h-\xi)\psi(\xi)\mathrm{d}\xi+C.$$

由此解出

$$\begin{aligned}F(x)&=\frac{1}{2}(h-x)\varphi(x)-\frac{1}{2a}\int_0^x(h-\xi)\psi(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{C}{2},\\ G(x)&=\frac{1}{2}(h-x)\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x(h-\xi)\psi(\xi)\mathrm{d}\xi-\frac{C}{2}.\end{aligned}$$

故初值问题的解为

$$\begin{aligned}u(x,t)\;=\;&\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{at}{2(h-x)}[\varphi(x-at)-\varphi(x+at)]\\ &+\frac{1}{2a(h-x)}\int_{x-at}^{x+at}(h-\xi)\psi(\xi)\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

第二章　分离变量法

§2.1　内容提要

用分离变量法求解定解问题, 就是把所要找的解按照某个确定的完备正交函数系展开, 而这个完备正交函数系实际上就是某个特征值问题的特征函数系. 因此, 利用分离变量法求解线性偏微分方程定解问题的首要任务, 是确定该定解问题对应的特征值问题的特征值和特征函数. 下面列出二阶方程的特征值问题:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \quad 0 < x < l, \\ x = 0 \text{ 及 } x = l \text{ 处的边界条件}, \end{cases}$$

在不同边界条件下的特征值和特征函数：

1. 边界条件是 $X(0) = X(l) = 0$ 时, 特征值 $\lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2$, 特征函数 $X_n(x) = \sin\dfrac{n\pi x}{l}$;
2. 边界条件是 $X(0) = X'(l) = 0$ 时, 特征值 $\lambda_n = \left(\dfrac{(2n-1)\pi}{2l}\right)^2$, 特征函数 $X_n(x) = \sin\dfrac{(2n-1)\pi}{2l}x$;
3. 边界条件是 $X'(0) = X(l) = 0$ 时, 特征值 $\lambda_n = \left(\dfrac{(2n-1)\pi}{2l}\right)^2$, 特征函数 $X_n(x) = \cos\dfrac{(2n-1)\pi}{2l}x$;
4. 边界条件是 $X'(0) = X'(l) = 0$ 时, 特征值 $\lambda_n = \left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2$, 特征函数 $X_n(x) = \cos\dfrac{n\pi x}{l}$;
5. 边界条件是 $X(0) = X'(l) + \sigma X(l) = 0$ 时, 特征值 $\lambda_n = \left(\dfrac{\gamma_n}{l}\right)^2$, 特征函数 $X_n(x) = \sin\dfrac{\gamma_n x}{l}$, 其中 γ_n 是方程 $\tan\gamma = -\dfrac{\gamma}{\sigma l}$ 的第 n 个正根;
6. 边界条件是 $X'(0) = X'(l) + \sigma X(l) = 0$ 时, 特征值 $\lambda_n = \left(\dfrac{\gamma_n}{l}\right)^2$, 特征函数 $X_n(x) = \cos\dfrac{\gamma_n x}{l}$, 其中 γ_n 是方程 $\cot\gamma = \dfrac{\gamma}{\sigma l}$ 的第 n 个正根;
7. 边界条件是 $X'(0) - \sigma X(0) = X(l) = 0$ 时, 特征值 $\lambda_n = \left(\dfrac{\gamma_n}{l}\right)^2$, 特征函数 $X_n(x) = \dfrac{\gamma_n}{\sigma l}\cos\dfrac{\gamma_n x}{l} + \sin\dfrac{\gamma_n x}{l}$, 其中 γ_n 是方程 $\tan\gamma = -\dfrac{\gamma}{\sigma l}$ 的第 n 个正根;
8. 边界条件是 $X'(0) - \sigma X(0) = X'(l) = 0$ 时, 特征值 $\lambda_n = \left(\dfrac{\gamma_n}{l}\right)^2$, 特征函数 $X_n(x) = \dfrac{\gamma_n}{\sigma l}\cos\dfrac{\gamma_n x}{l} + \sin\dfrac{\gamma_n x}{l}$, 其中 γ_n 是方程 $\cot\gamma = \dfrac{\gamma}{\sigma l}$ 的第 n 个正根;
9. 边界条件是 $X'(0) - \sigma_1 X(0) = X'(l) + \sigma_2 X(l) = 0$ 时, 特征值 $\lambda_n = \left(\dfrac{\gamma_n}{l}\right)^2$, 特征函数 $X_n(x) = \dfrac{\gamma_n}{\sigma_1 l}\cos\dfrac{\gamma_n x}{l} + \sin\dfrac{\gamma_n x}{l}$, 其中 γ_n 是方程 $\cot\gamma = \dfrac{1}{(\sigma_1+\sigma_2)l}\left(\gamma - \dfrac{\sigma_1\sigma_2 l^2}{\gamma}\right)$ 的第 n 个正根.

注意, 只有第四种情况,$\lambda_0 = 0$ 才是特征值,n 从 0 开始计数, 其它情况 n 都是从 1 开始计数.

非齐次边界条件的处理. 对于定解问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), & 0 < x < l,\ t > 0, \\ x = 0 \text{ 及 } x = l \text{ 处的边界条件}, \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \le x \le l, \end{cases}$$

适当选取函数 $w(x,t)$, 使之在变换 $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$ 下, 函数 $v(x,t)$ 满足如下齐次边界条件的定解问题:

$$\begin{cases} v_{tt}-a^2v_{xx}=f(x,t)-(w_{tt}-a^2w_{xx}), & 0<x<l,\ t>0, \\ x=0 \text{ 及 } x=l \text{ 处的齐次边界条件}, & \\ v(x,0)=\varphi(x)-w(x,0),\ v_t(x,0)=\psi(x)-w_t(x,0), & 0\le x\le l. \end{cases}$$

不同边界条件对应的函数 $w(x,t)$ 的取法为:

1. 边界条件为 $u(0,t)=u_1(t),\ u(l,t)=u_2(t)$ 时, 可取

$$w(x,t)=u_1(t)+\frac{x}{l}(u_2(t)-u_1(t));$$

2. 边界条件为 $u(0,t)=u_1(t)$, $u_x(l,t)=u_2(t)$ 时, 可取

$$w(x,t)=u_2(t)x+u_1(t);$$

3. 边界条件为 $u_x(0,t)=u_1(t)$, $u(l,t)=u_2(t)$ 时, 可取

$$w(x,t)=u_1(t)(x-l)+u_2(t);$$

4. 边界条件为 $u_x(0,t)=u_1(t)$, $u_x(l,t)=u_2(t)$ 时, 可取

$$w(x,t)=\frac{u_2(t)-u_1(t)}{2l}x^2+u_1(t)x;$$

5. 边界条件为 $u(0,t)=u_1(t)$, $(u_x+\sigma u)(l,t)=u_2(t)$ 时, 可取

$$w(x,t)=\frac{u_2(t)-\sigma u_1(t)}{1+\sigma l}x+u_1(t);$$

6. 边界条件为 $u_x(0,t)=u_1(t)$, $(u_x+\sigma u)(l,t)=u_2(t)$ 时, 可取

$$w(x,t)=u_1(t)x+\frac{1}{\sigma}[u_2(t)-(1+\sigma l)u_1(t)];$$

7. 边界条件为 $(u_x-\sigma u)(0,t)=u_1(t)$, $u(l,t)=u_2(t)$ 时, 可取

$$w(x,t)=\frac{u_1(t)+\sigma u_2(t)}{1+\sigma l}x+\frac{u_2(t)-lu_1(t)}{1+\sigma l};$$

8. 边界条件为 $(u_x-\sigma u)(0,t)=u_1(t)$, $u_x(l,t)=u_2(t)$ 时, 可取

$$w(x,t)=u_2(t)x+\frac{1}{\sigma}[u_2(t)-u_1(t)];$$

9. 边界条件为 $(u_x-\sigma_1 u)(0,t)=u_1(t)$, $(u_x+\sigma_2 u)(l,t)=u_2(t)$ 时, 可取

$$w(x,t)=\frac{\sigma_1u_2(t)+\sigma_2u_1(t)}{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_1\sigma_2 l}x+\frac{u_2(t)-(1+\sigma_2 l)u_1(t)}{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_1\sigma_2 l}.$$

分离变量法是求解数学物理方程的基本方法．利用分离变量法求解数学物理方程的一般步骤是：

1. 对于给定的非齐次方程的初边值问题，先把边界条件齐次化；

2. 考察相应的齐次方程的初边值问题（已经是齐次边界条件），分离变量（设 $u(x,t)=X(x)T(t)$），导出两个常微分方程；

3. 根据齐次边界条件（定解条件）以及关于 X 的常微分方程，确定出特征值问题．然后求出特征值 λ_n 以及对应的特征函数 $X_n(x)$;

4. 把求出的特征值 λ_n 代入关于 T 的常微分方程，解出 $T_n(t)$（含有一个或两个待定系数．如果是热传导方程就含有一个待定系数，如果是弦振动方程就含有两个待定系数）；

5. 取和 $\sum\limits_n X_n(x)T_n(t)$, 再利用初值条件确定叠加系数，就得到齐次方程带有齐次边界条件的初边值问题的形式解．从而得到齐次方程的初边值问题（可以是非齐次边界条件）的形式解；

6. 利用齐次化原理求解非齐次方程的初边值问题.

注 对于一般形式的两个自变量的二阶线性偏微分方程

$$au_{xx}+bu_{xy}+cu_{yy}+du_x+eu_y+fu=0, \tag{2.1}$$

其中 a,b,c,d,e 和 f 都是实数, 一定存在形如

$$u(x,y)=\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{e}^{\beta y}$$

的变量分离形式的解, 其中 α 和 β 可以是复数.

事实上, 利用

$$u_x=\alpha u,\quad u_{xx}=\alpha^2u,\quad u_y=\beta u,\quad u_{yy}=\beta^2u,\quad u_{xy}=\alpha\beta u,$$

将其带入 (2.1) 知,$u(x,y)=\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{e}^{\beta y}$ 是 (2.1) 的解当且仅当

$$a\alpha^2+b\alpha\beta+c\beta^2+d\alpha+e\beta+f=0.$$

当 $a\neq0$ 时, 任意给定 β, 可以从上式中解出两个根 α_1 和 α_2 (可能是复根). 当 $c\neq0$ 时, 任意给定 α, 可以从上式中解出两个根 β_1 和 β_2 (可能是复根).

读者可以利用该结论, 确定下列方程的变量分离形式的解:

椭圆型方程: $u_{xx}+u_{yy}=0$;

抛物型方程: $u_t=u_{xx}$;

双曲型方程: $u_{tt}=u_{xx}$.

§2.2 习题解答

2.1 求解下列特征值问题：

(1) $\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, \quad 0 < x < l, \\ u'(0) = u(l) = 0; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, \quad 0 < x < 2\pi, \\ u(0) = u(2\pi),\ u'(0) = u'(2\pi); \end{cases}$

(3) $\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, \quad 0 < x < l, \\ u'(0) = u'(l) = 0. \end{cases}$

解 (1) 当 $\lambda \le 0$ 时, 用 u 乘方程两边并积分得

$$-\int_0^l (u'(x))^2 \, \mathrm{d}x + \lambda \int_0^l u^2(x)\mathrm{d}x = 0.$$

由此推出, 当 $\lambda < 0$ 时,$u(x) \equiv 0$；当 $\lambda = 0$ 时,$u'(x) \equiv 0$. 再由 $u(l) = 0$ 知,$u(x) \equiv 0$. 因此, 当 $\lambda \le 0$ 时, 问题无非零解, 所以 $\lambda \le 0$ 不是特征值.

当 $\lambda > 0$ 时, 记 $\lambda = \beta^2$, $\beta > 0$. 方程的通解是

$$u(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x.$$

由 $u'(0) = 0$ 推知 $C_2 = 0$. 再由 $u(l) = 0$ 推知

$$C_1 \cos \beta l = 0.$$

要使 $u(x)$ 是非零解, 当且仅当 $\cos \beta l = 0$, 即 $\beta = \dfrac{(2n-1)\pi}{2l}$. 于是

$$\lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right)^2, \quad n = 1, 2, \cdots$$

是其特征值,$u_n(x) = \cos \dfrac{(2n-1)\pi}{2l} x$ 是对应的特征函数.

(2) 与问题 (1) 类似的分析知, 当 $\lambda < 0$ 时,$u(x) \equiv 0$, 所以 $\lambda < 0$ 不是特征值.

当 $\lambda = 0$ 时,$u'(x) \equiv 0$. 此时问题有非零解 $u(x) = u_0$ (常数). 因此 $\lambda_0 = 0$ 是特征值, 可取特征函数 $u_0 = 1$.

当 $\lambda > 0$ 时, 记 $\lambda = \beta^2$, $\beta > 0$. 方程的通解是

$$u(x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x.$$

根据边界条件知

$$\begin{cases} C_1 = C_1 \cos 2\pi\beta + C_2 \sin 2\pi\beta, \\ C_2 = C_2 \cos 2\pi\beta - C_1 \sin 2\pi\beta. \end{cases}$$

由此推知 $\cos 2\pi\beta = 1$, 因此 $\beta = n, n = 1, 2, \cdots$. 所以特征值为 $\lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, \cdots$, 对应特征函数为 $u_n(x) = C_1 \cos nx + C_2 \sin nx$. 综上可知,$\lambda_n = n^2$, $u_{n,1}(x) = \sin nx$, $u_{n,2}(x) = \cos nx$, $\ n = 0, 1, \cdots$.

(3) 同于问题 (1) 的分析知,$\lambda < 0$ 不是特征值.

当 $\lambda=0$ 时,$u'(x)\equiv 0$. 此时有非零解 $u(x)=u_0$ (常数). 因此 $\lambda_0=0$ 是特征值, 对应的特征函数可取为 $u_0=1$.

当 $\lambda>0$ 时, 记 $\lambda=\beta^2$, $\beta>0$. 方程的通解是

$$u(x)=C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x.$$

利用边界条件得出 $C_2=0$, $-C_1\beta\sin\beta l=0$. 要使 u 有非零解, 必有 $C_1\neq 0, \sin\beta l=0$. 由此得到 $\beta=\dfrac{n\pi}{l}$, $n=1,2,\cdots$. 此时,$\lambda_n=\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2$, $u_n(x)=\cos\dfrac{n\pi x}{l}$. 综上可知, 特征值和特征函数分别是

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\ u_n(x)=\cos\frac{n\pi x}{l}, n=0,\ 1,\cdots.$$

2.2 证明下列函数系在给定的区间上是正交的:

(1) $1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \cdots,\quad 0\le x\le\pi$;

(2) $\sin\pi x, \sin 2\pi x, \sin 3\pi x, \cdots,\quad -1\le x\le 1$;

(3) $1,\ 1-x,\ 1-2x+\dfrac{1}{2}x^2$ 带有权函数 $r(x)=\mathrm{e}^{-x},\ x\ge 0$.

证明 (1) 对 $m,n\ge 0$, 有

$$\int_0^\pi\cos mx\cos nx\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & n=m\neq 0,\\ \pi, & n=m=0,\\ 0, & n\neq m.\end{cases}$$

因此函数系在区间 $[0,\pi]$ 上正交.

(2) 对 $m,n\ge 1$, 有

$$\int_{-1}^1\sin m\pi x\sin n\pi x\,\mathrm{d}x=\begin{cases}1, & n=m,\\ 0, & n\neq m.\end{cases}$$

这说明函数系在给定的区间上正交.

(3) 记 $u_1=1$, $u_2=1-x$, $u_3=1-2x+\dfrac{1}{2}x^2$, 显然

$$\begin{aligned}\int_0^\infty u_i^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x&>0,\quad i=1,2,3,\\ \int_0^\infty u_1u_2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x&=\Gamma(1)-\Gamma(2)=0,\\ \int_0^\infty u_1u_3\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x&=\Gamma(1)-2\Gamma(2)+\frac{1}{2}\Gamma(3)=0,\\ \int_0^\infty u_2u_3\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x&=\Gamma(1)-3\Gamma(2)+\frac{5}{2}\Gamma(3)-\frac{1}{2}\Gamma(4)=0.\end{aligned}$$

因此, 函数系在给定的区间上带权函数 $r(x)=\mathrm{e}^{-x}$ 正交.

2.3 在区间 $[0,l]$ 上给定特征值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k(x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)-q(x)y(x)+\lambda\rho(x)y(x)=0,\\ y(0)=y(l)=0,\end{cases}$$

其中 $k(x)>k_0\geq 0$, $q(x)>q_0\geq 0$, $\rho(x)>\rho_0\geq 0$. 试证其特征值 $\lambda>0$, 并且对应于不同特征值的特征函数带权函数 $\rho(x)$ 正交.

证明 先证特征值为正. 在方程两边同乘以 y, 并从 0 到 l 积分得

$$ky\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_0^l-\int_0^l k\Big(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big)^2\,\mathrm{d}x-\int_0^l qy^2\,\mathrm{d}x+\lambda\int_0^l \rho y^2\,\mathrm{d}x=0.$$

由边界条件知, $ky\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_0^l=0$. 因此

$$\lambda\int_0^l \rho y^2\,\mathrm{d}x=\int_0^l k\Big(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big)^2\,\mathrm{d}x+\int_0^l qy^2\,\mathrm{d}x>0.$$

由此得特征值 $\lambda>0$.

再证对应于不同特征值的特征函数带权函数 $\rho(x)$ 正交. 假设两个不同的特征值 λ_1 和 λ_2 对应的特征函数分别为 y_1 和 y_2. 那么

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(k(x)\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}\Big)-qy_1+\lambda_1\rho y_1=0, \tag{2.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(k(x)\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}\Big)-qy_2+\lambda_2\rho y_2=0. \tag{2.3}$$

在 (2.2) 式两边同乘以 y_2, 在 (2.3) 式两边同乘以 y_1, 并从 0 到 l 积分得

$$\begin{aligned}k\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}y_2\Big|_0^l-\int_0^l k\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x-\int_0^l qy_1y_2\mathrm{d}x+\lambda_1\int_0^l \rho y_1y_2\,\mathrm{d}x=0,\\ k\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}y_1\Big|_0^l-\int_0^l k\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x-\int_0^l qy_1y_2\,\mathrm{d}x+\lambda_2\int_0^l \rho y_1y_2\,\mathrm{d}x=0.\end{aligned}$$

利用边界条件推知,$k\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}y_2\Big|_0^l=k\dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}y_1\Big|_0^l=0$. 上面的两式相减得

$$\int_0^l \rho y_1y_2\mathrm{d}x=0.$$

2.4 解下列弦振动方程的定解问题：

$$(1)\begin{cases}u_{tt}=u_{xx}, & 0<x<2,\ t>0,\\ u(0,t)=u(2,t)=0, & t\geq 0,\\ u(x,0)=\dfrac{1}{2}\sin\pi x,\ u_t(x,0)=0, & 0\leq x\leq 2;\end{cases}$$

$$(2)\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0, & 0<x<l,\ t>0,\\ u_x(0,t)=u(l,t)=0, & t\geq 0,\\ u(x,0)=\cos\dfrac{\pi}{2l}x, & 0\leq x\leq l,\\ u_t(x,0)=\cos\dfrac{3\pi}{2l}x+\cos\dfrac{5\pi}{2l}x, & 0\leq x\leq l;\end{cases}$$

$$(3)\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}, & 0<x<1,\ t>0,\\ u(0,t)=u(1,t)=0, & t\geq 0,\\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x), & 0\leq x\leq 1,\end{cases}$$

其中 $\psi(x)=x(1-x),\ \varphi(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1/2,\\ 1-x, & 1/2<x\le 1,\end{cases}$;

$$(4)\ \begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}, & 0<x<\pi,\ t>0,\\ u(0,t)=u_x(\pi,t)=0, & t\ge 0,\\ u(x,0)=x^3,\ u_t(x,0)=0, & 0\le x\le \pi.\end{cases}$$

解 (1) 分离变量, 令 $u(x,t)=X(x)T(t)$. 代入方程得

$$\frac{T''(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda,$$

即

$$X''+\lambda X=0,\quad T''+\lambda T=0.$$

利用边界条件 $u(0,t)=u(2,t)=0$ 推知，$X(0)=X(2)=0$. 所以，对应的特征值问题为

$$\begin{cases}X''+\lambda X=0, & 0<x<2,\\ X(0)=X(2)=0.\end{cases}$$

它的特征值是 $\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2$, 对应的特征函数是 $X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{2}$. 将 $\lambda=\lambda_n$ 代入 T 的方程解出

$$T_n(t)=C_n\cos\frac{n\pi t}{2}+D_n\sin\frac{n\pi t}{2},\quad n=1,\,2,\,\cdots.$$

故所求问题的形式解是

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{2}\left(C_n\cos\frac{n\pi t}{2}+D_n\sin\frac{n\pi t}{2}\right).$$

根据初值条件得

$$\begin{aligned}u(x,0)&=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{2}=\frac{1}{2}\sin\pi x,\\ u_t(x,0)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{2}D_n\sin\frac{n\pi x}{2}=0.\end{aligned}$$

由此确定出系数

$$D_n=0,\quad C_n=\begin{cases}\frac{1}{2}, & n=2,\\ 0, & n\ne 2.\end{cases}$$

原问题的解就是

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\cos\pi t\sin\pi x.$$

(2) 分离变量, 令 $u(x,t)=X(x)T(t)$. 代入方程得

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda,$$

即

$$X''+\lambda X=0,\quad T''+\lambda a^2T=0.$$

利用边界条件 $u_x(0,t)=u(l,t)=0$ 推知，$X'(0)=X(l)=0$. 所以，对应的特征值问题是

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0, \quad 0<x<l, \\ X'(0)=X(l)=0, \end{cases}$$

其特征值和对应的特征函数是

$$\lambda_n=\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right)^2, \quad X_n(x)=\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}, \quad n=1,2,\cdots.$$

将 $\lambda=\lambda_n$ 代入 T 的方程解出

$$T_n(t)=C_n\cos\frac{(2n-1)\pi at}{2l}+D_n\sin\frac{(2n-1)\pi at}{2l}, \quad n=1,2,\cdots.$$

叠加得形式解

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\left(C_n\cos\frac{(2n-1)\pi at}{2l}+D_n\sin\frac{(2n-1)\pi at}{2l}\right).$$

利用初值条件确定出系数

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{l}\int_0^l \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\cos\frac{\pi x}{2l}\,\mathrm{d}x=\begin{cases} 1, & n=1, \\ 0, & n\neq 1, \end{cases} \\ D_n &= \frac{4}{(2n-1)\pi a}\int_0^l \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\left(\cos\frac{3\pi}{2l}x+\cos\frac{5\pi}{2l}x\right)\mathrm{d}x \\ &= \begin{cases} \dfrac{2l}{3\pi a}, & n=2, \\ \dfrac{2l}{5\pi a}, & n=3, \\ 0, & n=1,4,5\cdots \end{cases} \end{aligned}$$

从而

$$u(x,t)=\cos\frac{\pi at}{2l}\cos\frac{\pi x}{2l}+\frac{2l}{3\pi a}\sin\frac{3\pi at}{2l}\cos\frac{3\pi x}{2l}+\frac{2l}{5\pi a}\sin\frac{5\pi at}{2l}\cos\frac{5\pi x}{2l}.$$

(3) 同于问题 (1) 的分析知, 它的形式解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin n\pi x\left(C_n\cos n\pi at+D_n\sin n\pi at\right).$$

利用初值条件得

$$C_n=2\left(\int_0^{1/2}x\sin n\pi x\,\mathrm{d}x+\int_{1/2}^1(1-x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x\right)=\frac{4}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{2},$$

$$D_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^1 x(1-x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x=\frac{4}{a(n\pi)^4}[1-(-1)^n].$$

故原问题的解是

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{2}\cos n\pi at+\frac{4}{a(n\pi)^4}[1-(-1)^n]\sin n\pi at\right)\sin n\pi x.$$

(4) 同于问题 (2) 的分析知, 其形式解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{(2n-1)x}{2}\left(C_n\cos\frac{(2n-1)at}{2}+D_n\sin\frac{(2n-1)at}{2}\right).$$

根据初值条件确定出系数

$$C_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^3\sin\frac{(2n-1)x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{24(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2\pi}\left(\pi^2-\frac{8}{(2n-1)^2}\right),\quad D_n=0.$$

最后得问题的解

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{24(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2\pi}\left(\pi^2-\frac{8}{(2n-1)^2}\right)\cos\frac{(2n-1)at}{2}\sin\frac{(2n-1)x}{2}.$$

2.5 有一段长为 l 的细棒, 它的表面和两端都绝热, 一端在原点, 初始温度是 x. 求棒内的温度分布.

解 棒内的温度分布满足下面的定解问题

$$\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}, & 0<x<l,\ t>0,\\ u_x(0,t)=u_x(l,t)=0, & t\geq 0,\\ u(x,0)=x, & 0\leq x\leq l.\end{cases}$$

分离变量, 设 $u(x,t)=X(x)T(t)$. 代入方程得

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda.$$

利用边界条件 $u_x(0,t)=u_x(l,t)=0$ 推知，$X'(0)=X'(l)=0$. 所以，对应的特征值问题为

$$\begin{cases}X''+\lambda X=0, & 0<x<l,\\ X'(0)=X'(l)=0.\end{cases}$$

它的特征值是 $\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, 对应的特征函数是 $X_n(x)=\cos\frac{n\pi x}{l}$, $n=0,1,\cdots$. 将 $\lambda=\lambda_n$ 代入 T 的方程解出

$$T_n(t)=C_n\exp\left(-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2t\right),\quad n=0,\,1,\,2,\,\cdots.$$

叠加得形式解:

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\exp\left(-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2t\right)\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

由初值条件确定出系数

$$C_n=\begin{cases}\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l x\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=\frac{2l}{n^2\pi^2}((-1)^n-1), & n=1,2,\cdots,\\ \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_0^l x\,\mathrm{d}x=\frac{l}{2}, & n=0.\end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{l}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2l}{n^2\pi^2}((-1)^n-1)\exp\left(-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2t\right)\cos\frac{n\pi x}{l}\\&=\frac{l}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4l}{(2n-1)^2\pi^2}\exp\left(-\left(\frac{(2n-1)\pi a}{l}\right)^2t\right)\cos\frac{(2n-1)\pi x}{l}.\end{aligned}$$

2.6 解下列热传导方程的定解问题：

$$(1)\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = x(l-x), & 0 \leq x \leq l; \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \sin x, & 0 \leq x \leq \pi; \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l,\ t > 0, \\ u_x(0,t) - \sigma u(0,t) = 0, & t \geq 0, \\ u_x(l,t) + \sigma u(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l, \end{cases}$$

其中常数 $\sigma > 0$.

解 (1) 同于 2.5 题, 由边界条件知形式解为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp\left(-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t\right) \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

由初值条件确定出系数

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l x(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x = \frac{4l^2}{(n\pi)^3}[1-(-1)^n].$$

故, 定解问题的解为

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4l^2}{n^3\pi^3}[1-(-1)^n]\exp\left(-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8l^2}{(2n-1)^3\pi^3}\exp\left(-\left(\frac{(2n-1)\pi a}{l}\right)^2 t\right)\sin\frac{(2n-1)\pi x}{l}. \end{aligned}$$

(2) 同于 2.5 题, 由边界条件知形式解为

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \mathrm{e}^{-n^2a^2t}\cos nx.$$

由初值条件确定出系数

$$C_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi},$$

$$C_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\sin x\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & n = 1, \\ \dfrac{2[(-1)^{n+1}-1]}{(n^2-1)\pi}, & n \geq 2. \end{cases}$$

最后得问题的解为

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n^2-1}\mathrm{e}^{-n^2a^2t}\cos nx.$$

(3) 令 $u(x,t) = X(x)T(t)$, 可得关于 T 的方程 $T' + a^2\lambda T = 0$, 和关于 X 的特征值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X = 0, \quad 0 < x < l, \\ X'(0) - \sigma X(0) = 0, \quad X'(l) + \sigma X(l) = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

易知,(2.4) 的方程的通解为

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x.$$

由边界条件知

$$\sqrt{\lambda}B - \sigma A = 0,\quad \tan\sqrt{\lambda}l = \frac{\sqrt{\lambda}B + \sigma A}{\sqrt{\lambda}A - \sigma B} = \frac{2\sigma\sqrt{\lambda}}{\lambda - \sigma^2}.$$

记超越方程 $\tan\sqrt{\lambda}l + \dfrac{2\sigma\sqrt{\lambda}}{\sigma^2 - \lambda} = 0$ 的第 n 个正根为 λ_n, 它就是问题 (2.4) 的特征值, 对应的特征函数为

$$\begin{aligned} X_n(x) &= A_n\cos\sqrt{\lambda_n}x + B_n\sin\sqrt{\lambda_n}x \\ &= B_n\Big(\sin\sqrt{\lambda_n}x + \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\sigma}\cos\sqrt{\lambda_n}x\Big) \\ &= K_n\sin(\sqrt{\lambda_n}x + \theta_n), \end{aligned}$$

其中 $\theta_n = \arctan\dfrac{\sqrt{\lambda_n}}{\sigma}$, $K_n = \dfrac{B_n}{\sigma}\sqrt{\sigma^2 + \lambda_n}$. 将 λ_n 代入 T 的方程, 可得通解 $T_n(t) = C_n\mathrm{e}^{-a^2\lambda_n t}$.

叠加得问题的形式解

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n\mathrm{e}^{-a^2\lambda_n t}\sin(\sqrt{\lambda_n}x + \theta_n).$$

根据初值条件可以确定出系数

$$D_n = \frac{\displaystyle\int_0^l \sin(\sqrt{\lambda_n}\,x + \theta_n)\varphi(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^l \sin^2(\sqrt{\lambda_n}\,x + \theta_n)\mathrm{d}x}.$$

2.7 长度为 l 的均匀细杆的初始温度为零度, 在端点 $x = 0$ 处保持常温 u_0, 而在端点 $x = l$ 及侧面上皆与周围介质有热交换, 介质的温度为零度. 此时杆上的温度分布函数 $u(x,t)$ 满足

$$\begin{cases} u_t = a^2u_{xx} - b^2u, & 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(0,t) = u_0,\ (u_x + \sigma u)|_{x=l} = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

试求解 $u(x,t)$.

解 令 $u(x,t) = \mathrm{e}^{-b^2t}v(x,t) + w(x)$, 可以将原问题转化为关于 $v(x,t)$ 的定解问题

$$\begin{cases} v_t - a^2v_{xx} = 0, & 0 < x < l,\ t > 0, \\ v(0,t) = (v_x + \sigma v)|_{x=l} = 0, & t \geq 0, \\ v(x,0) = -w(x), & 0 \leq x \leq l \end{cases} \tag{2.5}$$

和关于 $w(x)$ 的常微分方程边值问题

$$\begin{cases} a^2w''(x) - b^2w(x) = 0, & 0 < x < l, \\ w(0) = u_0, \quad w'(l) + \sigma w(l) = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

先解常微分方程边值问题 (2.6), 得通解 $w(x) = A\mathrm{e}^{\eta x} + B\mathrm{e}^{-\eta x}$, 其中 $\eta = b/a$. 由边界条件得

$$A + B = u_0,\quad \eta(A\mathrm{e}^{\eta l} - B\mathrm{e}^{-\eta l}) + \sigma(A\mathrm{e}^{\eta l} + B\mathrm{e}^{-\eta l}) = 0.$$

由此解出

$$A=\frac{u_0(\eta-\sigma)\mathrm{e}^{-\eta l}}{2(\eta\cosh\eta l+\sigma\sinh\eta l)},\quad B=\frac{u_0(\eta+\sigma)\mathrm{e}^{\eta l}}{2(\eta\cosh\eta l+\sigma\sinh\eta l)}.$$

于是

$$w(x)=\frac{\eta\cosh\eta(x-l)-\sigma\sinh\eta(x-l)}{\eta\cosh\eta l+\sigma\sinh\eta l}u_0.$$

再解关于 $v(x,t)$ 的定解问题 (2.5). 令 $v(x,t)=X(x)T(t)$, 得关于 T 的方程 $T'+a^2\lambda T=0$ 以及关于 X 的特征值问题

$$\begin{cases}X''(x)+\lambda X=0,\quad 0<x<l,\\ X(0)=X'(l)+\sigma X(l)=0.\end{cases}$$

同于上题, 其特征值是超越方程 $\tan\sqrt{\lambda}l+\dfrac{\sqrt{\lambda}}{\sigma}=0$ 的第 n 个正根, 记为 λ_n, 对应的特征函数为 $X_n(x)=\sin\sqrt{\lambda_n}x$. 将 λ_n 代入 T 的方程, 可得通解 $T_n(t)=C_n\mathrm{e}^{-a^2\lambda_n t}$. 于是定解问题的形式解是

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\mathrm{e}^{-a^2\lambda_n t}\sin\sqrt{\lambda_n}x.$$

根据初值条件确定出系数

$$C_n=-\frac{\displaystyle\int_0^l w(x)\sin\sqrt{\lambda_n}\,x\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^l\sin^2\sqrt{\lambda_n}x\,\mathrm{d}x}.$$

2.8 利用圆域内 Dirichlet 问题解的表达式, 求解边值问题

$$\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}=0,\quad x^2+y^2<a^2,\\ u|_{x^2+y^2=a^2}=f,\end{cases}$$

其中 f 分别为:

(1) $f=A$ (常数);

(2) $f=A\cos\theta$;

(3) $f=A\sin^2\theta+B\cos^2\theta$.

解 圆域上 Dirichlet 问题解的级数表达式为

$$u(\rho,\theta)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta),$$

其中系数为

$$A_n=\frac{1}{\pi a^n}\int_0^{2\pi}f(\theta)\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta,\ n=0,1,2,\cdots,$$
$$B_n=\frac{1}{\pi a^n}\int_0^{2\pi}f(\theta)\sin n\theta\,\mathrm{d}\theta,\ n=1,2,\cdots.$$

把 (1), (2), (3) 中的函数 f 分别代入公式得

(1) $A_0=2A,\quad A_n=B_n=0,n\geq 1$. 所以 $u(\rho,\theta)=A$.

(2) 系数为

$$B_n = 0, \quad A_n = \frac{1}{\pi a^n}\int_0^{2\pi} A\cos\theta\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta = \begin{cases} A/a, & n = 1 \\ 0, & n = 0, 2, 3, \cdots. \end{cases}$$

从而

$$u(\rho,\theta) = \frac{A\rho}{a}\cos\theta.$$

(3) 将 f 改写成

$$f = A + (B-A)\cos^2\theta = \frac{A+B}{2} + \frac{B-A}{2}\cos 2\theta,$$

可以确定出 $B_n = 0,\ n = 1, 2, \cdots,$

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi a^n}\int_0^{2\pi}\left(\frac{A+B}{2} + \frac{B-A}{2}\cos 2\theta\right)\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \begin{cases} A+B, & n = 0, \\ (B-A)/2a^2, & n = 2, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases} \end{aligned}$$

由此得

$$u(\rho,\theta) = \frac{A+B}{2} + \frac{B-A}{2a^2}\rho^2\cos 2\theta.$$

2.9 半径为 a 的半圆形薄圆板, 其表面绝热, 在板的圆周边界上保持常温 u_0, 而在其直径边界上保持常温 u_1. 求圆板稳定状态的温度分布.

解 引入极坐标, 原问题可写成

$$\begin{cases} u_{rr} + \dfrac{1}{r}u_r + \dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, & 0 < r < a,\ 0 < \theta < \pi, \\ u(r,0) = u(r,\pi) = u_1, & 0 \le r \le a, \\ u(a,\theta) = u_0,\ |u(0,\theta)| < \infty, & 0 \le \theta \le \pi. \end{cases}$$

令 $u(r,\theta) = v(r,\theta) + u_1$, 则 v 满足定解问题

$$\begin{cases} v_{rr} + \dfrac{1}{r}v_r + \dfrac{1}{r^2}v_{\theta\theta} = 0, & 0 < r < a,\ 0 < \theta < \pi, \\ v(r,0) = v(r,\pi) = 0, & 0 \le r \le a, \\ v(a,\theta) = u_0 - u_1,\ |v(0,\theta)| < \infty, & 0 \le \theta \le \pi. \end{cases}$$

令 $v(r,\theta) = R(r)\Phi(\theta)$, 代入方程并分离变量, 得到两个常微分方程的定解问题

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0, \\ \Phi(0) = \Phi(\pi) = 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

和

$$\begin{cases} r^2R'' + rR' - \lambda R = 0, \quad 0 < r < a, \\ |R(0)| < \infty. \end{cases}$$

由边界条件知, 特征值问题 (2.7) 的特征值和特征函数分别为

$$\lambda_n = n^2, \quad \Phi_n(\theta) = \sin n\theta, \quad n = 1, 2, \cdots .$$

将 $\lambda = \lambda_n$ 代入 R 的方程得

$$r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0,\ 0 < r < a; \quad |R(0)| < \infty.$$

这是一个 Euler 方程 (令 $r = \mathrm{e}^s$ 可化简成 $\ddot{R} - n^2 R = 0$), 其满足 $|R(0)| < \infty$ 的有界解是

$$R_n(r) = C_n r^n,\ n = 1, 2, \cdots .$$

叠加, 得

$$v(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r)\Phi_n(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^n \sin n\theta.$$

利用边界条件确定出系数

$$C_n = \frac{2(u_0 - u_1)}{\pi a^n} \int_0^{\pi} \sin n\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{2(u_0 - u_1)}{n\pi a^n}[1 - (-1)^n].$$

于是

$$\begin{aligned} v(r, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(u_0 - u_1)}{n\pi}[1 - (-1)^n] \left(\frac{r}{a}\right)^n \sin n\theta \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(u_0 - u_1)}{(2n-1)\pi} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n-1} \sin(2n-1)\theta. \end{aligned}$$

故原问题的解为

$$u(r, \theta) = u_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(u_0 - u_1)}{(2n-1)\pi} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n-1} \sin(2n-1)\theta.$$

利用恒等式 (证明见附注)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1} r^{2n-1} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2r\sin\theta}{1 - r^2}, \quad |r| < 1,$$

又可以写成

$$u(r, \theta) = u_1 + \frac{2(u_0 - u_1)}{\pi} \arctan \frac{2ar\sin\theta}{a^2 - r^2}, \quad 0 \le r < a.$$

注 证明级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1} r^{2n-1}$ 的和为 $\displaystyle\frac{1}{2} \arctan \frac{2r\sin\theta}{1 - r^2}$.

事实上, 注意到展开式

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{2n-1}, \quad |z| < 1.$$

记 $\varepsilon=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$, 则 $\sin\theta=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}(\varepsilon-\bar{\varepsilon})$. 因此

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1}r^{2n-1} &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(r\varepsilon)^{2n-1}-(r\bar{\varepsilon})^{2n-1}}{2n-1}\\ &= \frac{1}{4\mathrm{i}}\Big(\ln\frac{1+r\varepsilon}{1-r\varepsilon}-\ln\frac{1+r\bar{\varepsilon}}{1-r\bar{\varepsilon}}\Big)\\ &= \frac{1}{4\mathrm{i}}\ln\frac{(1+r\varepsilon)(1-r\bar{\varepsilon})}{(1-r\varepsilon)(1+r\bar{\varepsilon})}\\ &= \frac{1}{4\mathrm{i}}\ln\frac{1-r^2+r(\varepsilon-\bar{\varepsilon})}{1-r^2-r(\varepsilon-\bar{\varepsilon})}\\ &= \frac{1}{4\mathrm{i}}\ln\frac{1-r^2+2\mathrm{i}r\sin\theta}{1-r^2-2\mathrm{i}r\sin\theta}\\ &= \frac{1}{2}\arctan\frac{2r\sin\theta}{1-r^2}\quad(\text{取主值}).\end{aligned}$$

2.10 求解下列矩形域上的定解问题：

$$(1)\ \begin{cases}u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x<\pi,\ 0<y<\pi,\\ u_x(0,y)=y-\dfrac{\pi}{2},\ u_x(\pi,y)=0, & 0\le y\le\pi,\\ u_y(x,0)=u_y(x,\pi)=0, & 0\le x\le\pi;\end{cases}$$

$$(2)\ \begin{cases}u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x<a,\quad 0<y<b,\\ u(0,y)=u(a,y)=0, & 0\le y\le b,\\ u(x,0)=0,\ u(x,b)=f(x), & 0\le x\le a;\end{cases}$$

$$(3)\ \begin{cases}u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x<a,\ 0<y<b,\\ u(0,y)=0,\ u(a,y)=Ay, & 0\le y\le b,\\ u_y(x,0)=u_y(x,b)=0, & 0\le x\le a.\end{cases}$$

解 (1) 令 $u(x,y)=X(x)Y(y)$, 代入方程得

$$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=\lambda,$$

即

$$X''-\lambda X=0,\qquad Y''+\lambda Y=0.$$

利用边界条件知,$Y'(0)=Y'(\pi)=0$. 解特征值问题

$$\begin{cases}Y''+\lambda Y=0, & 0<y<\pi,\\ Y'(0)=Y'(\pi)=0,\end{cases}$$

得特征值和特征函数为

$$\lambda_n=n^2,\quad Y_n(y)=\cos ny,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

方程 $X''-\lambda_nX=0$ 的通解是

$$\begin{aligned}&X_0(x)=a_0+a_1x\,,\quad n=0,\\ &X_n(x)=C_n\mathrm{e}^{nx}+D_n\mathrm{e}^{-nx},\quad n=1,\,2,\,\cdots.\end{aligned}$$

叠加, 得

$$u(x,y)=a_0+a_1x+\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\mathrm{e}^{nx}+D_n\mathrm{e}^{-nx})\cos ny.$$

由边界条件知

$$\begin{cases} u_x(0,y)=y-\dfrac{\pi}{2}=a_1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n(C_n-D_n)\cos ny, \\ u_x(\pi,y)=0=a_1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n(C_n\mathrm{e}^{n\pi}-D_n\mathrm{e}^{-n\pi})\cos ny. \end{cases}$$

由此得出 $a_1=0$, 以及

$$\begin{cases} C_n\mathrm{e}^{n\pi}-D_n\mathrm{e}^{-n\pi}=0, \\ C_n-D_n=\dfrac{2}{n^3\pi}[(-1)^n-1]. \end{cases}$$

确定出系数

$$C_n=\frac{\mathrm{e}^{-n\pi}[1-(-1)^n]}{n^3\pi\sinh n\pi},\quad D_n=\frac{\mathrm{e}^{n\pi}[1-(-1)^n]}{n^3\pi\sinh n\pi}.$$

最终得

$$u(x,y)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2[1-(-1)^n]}{n^3\pi}\cdot\frac{\cosh n(x-\pi)}{\sinh n\pi}\cos ny,$$

其中 a_0 为任意常数.

(2) 令 $u(x,y)=X(x)Y(y)$, 代入方程得

$$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=-\lambda,$$

即

$$X''+\lambda X=0,\qquad Y''-\lambda Y=0.$$

利用边界条件知,$X(0)=X(a)=0$. 解特征值问题

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0,\quad 0<x<a, \\ X(0)=X(a)=0, \end{cases}$$

得特征值和特征函数为

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2,\quad X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{a},\quad n=1,2,\cdots.$$

方程 $Y''-\lambda_nY=0$ 的通解是

$$Y_n(y)=C_n\mathrm{e}^{n\pi y/a}+D_n\mathrm{e}^{-n\pi y/a}.$$

叠加, 得

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\mathrm{e}^{n\pi y/a}+D_n\mathrm{e}^{-n\pi y/a}\right)\sin\frac{n\pi x}{a}.$$

由边界条件知

$$\begin{cases} C_n + D_n = 0, \\ C_n e^{n\pi b/a} + D_n e^{-n\pi b/a} = \dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{a}\,d\xi. \end{cases}$$

由此解出

$$C_n = \frac{\displaystyle\int_0^a f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{a}\,d\xi}{a\sinh\dfrac{n\pi b}{a}}, \quad D_n = -\frac{\displaystyle\int_0^a f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{a}\,d\xi}{a\sinh\dfrac{n\pi b}{a}}.$$

因此

$$u(x,y) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^a f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{a}\,d\xi\right)\frac{\sinh\dfrac{n\pi y}{a}}{\sinh\dfrac{n\pi b}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}.$$

(3) 令 $u(x,y) = X(x)Y(y)$, 代入方程得

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda,$$

即

$$X'' - \lambda X = 0, \quad Y'' + \lambda Y = 0.$$

利用边界条件知,$Y'(0) = Y'(b) = 0$. 解特征值问题

$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0, & 0 < y < b, \\ Y'(0) = Y'(b) = 0, \end{cases}$$

得特征值和特征函数为

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \quad Y_n(y) = \cos\frac{n\pi y}{b}, \quad n = 0, 1, \cdots.$$

方程 $X'' - \lambda_n X = 0$ 的通解是

$$X_0(x) = C_0 x + D_0, \quad n = 0,$$
$$X_n(x) = C_n e^{n\pi x/b} + D_n e^{-n\pi x/b}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

叠加, 得

$$u(x,y) = C_0 x + D_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n e^{n\pi x/b} + D_n e^{-n\pi x/b}\right)\cos\frac{n\pi y}{b}.$$

由边界条件知

$$\begin{cases} u(0,y) = 0 = D_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(C_n + D_n)\cos\frac{n\pi y}{b}, \\ u(a,y) = Ay = C_0 a + D_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n e^{n\pi a/b} + D_n e^{-n\pi a/b}\right)\cos\frac{n\pi y}{b}. \end{cases}$$

由此解出,$D_0 = 0$, $C_0 = \dfrac{1}{ab}\displaystyle\int_0^b Ay\,dy = \dfrac{Ab}{2a}$, 以及

$$\begin{cases} C_n + D_n = 0, \\ C_n e^{n\pi a/b} + D_n e^{-n\pi a/b} = \dfrac{2Ab}{(n\pi)^2}[(-1)^n - 1]. \end{cases}$$

于是

$$C_n=\frac{Ab[(-1)^n-1]}{(n\pi)^2\sinh\dfrac{n\pi a}{b}},\quad D_n=\frac{Ab[1-(-1)^n]}{(n\pi)^2\sinh\dfrac{n\pi a}{b}}.$$

最终得

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{Abx}{2a}+\frac{2Ab}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(-1)^n-1]}{n^2}\times\frac{\sinh\dfrac{n\pi x}{b}}{\sinh\dfrac{n\pi a}{b}}\cos\frac{n\pi y}{b}\\&=\frac{Abx}{2a}-\frac{4Ab}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh\dfrac{(2n-1)\pi x}{b}}{\sinh\dfrac{(2n-1)\pi a}{b}}\times\frac{\cos\dfrac{(2n-1)\pi y}{b}}{(2n-1)^2}.\end{aligned}$$

2.11 求圆环上的第一边值问题

$$\begin{cases}\Delta u=u_{rr}+\dfrac{1}{r}u_r+\dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=f(r), & r_1<r<r_2,\\ u(r_1,\theta)=u(r_2,\theta)=0, & 0\le\theta<2\pi\end{cases}$$

的解, 其中 $f(r)$ 为已知函数.

解 由于边界条件及非齐次项 $f(r)$ 都与 θ 无关, 所以定解问题有轴对称解

$$u(r,\theta)=u(r).$$

这样, 原方程就等价于

$$(ru_r)_r=rf(r).$$

积分得

$$ru_r=\int_{r_1}^{r}\rho f(\rho)\mathrm{d}\rho+C.$$

两边除以 r, 再次积分并交换积分次序得

$$\begin{aligned}u(r)&=\int_{r_1}^{r}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\int_{r_1}^{t}\rho f(\rho)\mathrm{d}\rho+C\ln r+D\\&=\int_{r_1}^{r}\rho f(\rho)\mathrm{d}\rho\int_{\rho}^{r}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t+C\ln r+D\\&=\int_{r_1}^{r}\rho f(\rho)\ln\frac{r}{\rho}\,\mathrm{d}\rho+C\ln r+D.\end{aligned}$$

由边界条件知

$$\begin{cases}C\ln r_1+D=0,\\ C\ln r_2+D=-\displaystyle\int_{r_1}^{r_2}\rho f(\rho)\ln\frac{r_2}{\rho}\,\mathrm{d}\rho.\end{cases}$$

由此得

$$\begin{aligned}C&=-\frac{1}{\ln r_2-\ln r_1}\int_{r_1}^{r_2}\rho f(\rho)\ln\frac{r_2}{\rho}\,\mathrm{d}\rho,\\D&=\frac{\ln r_1}{\ln r_2-\ln r_1}\int_{r_1}^{r_2}\rho f(\rho)\ln\frac{r_2}{\rho}\,\mathrm{d}\rho.\end{aligned}$$

最终得问题的解

$$u(r)=\int_{r_1}^{r}\rho f(\rho)\ln\frac{r}{\rho}\,\mathrm{d}\rho+\frac{\ln r_1-\ln r}{\ln r_2-\ln r_1}\int_{r_1}^{r_2}\rho f(\rho)\ln\frac{r_2}{\rho}\,\mathrm{d}\rho,\quad r_1\le r\le r_2.$$

本题也可用特征展开法求解, 但较为繁琐. 有兴趣的读者可以试一试.

2.12 求解定解问题

$$\begin{cases}u_{xx}+u_{yy}=f(x,y), & 0<x<a,\ 0<y<b,\\ u(0,y)=\varphi_1(y),\ u(a,y)=\varphi_2(y), & 0\le y\le b,\\ u(x,0)=\psi_1(x),\ u(x,b)=\psi_2(x), & 0\le x\le a.\end{cases}$$

解 令 $u(x,y)=v(x,y)+\varphi_1(y)+\dfrac{x}{a}[\varphi_2(y)-\varphi_1(y)]$, 原问题可转化为关于 v 的定解问题:

$$\begin{cases}v_{xx}+v_{yy}=f(x,y)-\varphi_1''(y)-\dfrac{x}{a}[\varphi_2''(y)-\varphi_1''(y)], & 0<x<a,\ 0<y<b,\\ v(0,y)=v(a,y)=0, & 0\le y\le b,\\ v(x,0)=\psi_1(x)-\varphi_1(0)-\dfrac{x}{a}[\varphi_2(0)-\varphi_1(0)], & 0\le x\le a,\\ v(x,b)=\psi_2(x)-\varphi_1(b)-\dfrac{x}{a}[\varphi_2(b)-\varphi_1(b)], & 0\le x\le a.\end{cases}$$

由于边界条件关于 x 是齐次的, 因而具有形式解

$$v(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(y)\sin\frac{n\pi x}{a}.$$

为确定 $f_n(y)$, 将其代入方程得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(f_n''(y)-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2f_n(y)\right)\sin\frac{n\pi x}{a}=f(x,y)-\varphi_1''(y)-\frac{x}{a}[\varphi_2''(y)-\varphi_1''(y)].$$

由此知,$f_n(y)$ 满足二阶非齐次常微分方程

$$f_n''(y)-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2f_n(y)=\frac{2}{a}\int_0^a\left(f(x,y)-\varphi_1''(y)-\frac{x}{a}[\varphi_2''(y)-\varphi_1''(y)]\right)\sin\frac{n\pi x}{a}\,\mathrm{d}x,\quad 0<y<b.\tag{2.8}$$

根据边界条件知

$$\begin{cases}v(x,0)=\psi_1(x)-\varphi_1(0)-\dfrac{x}{a}[\varphi_2(0)-\varphi_1(0)]=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f_n(0)\sin\frac{n\pi x}{a},\\ v(x,b)=\psi_2(x)-\varphi_1(b)-\dfrac{x}{a}[\varphi_2(b)-\varphi_1(b)]=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f_n(b)\sin\frac{n\pi x}{a},\end{cases}$$

由此定出

$$\begin{cases}f_n(0)=\dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a\left(\psi_1(x)-\varphi_1(0)-\frac{x}{a}[\varphi_2(0)-\varphi_1(0)]\right)\sin\frac{n\pi x}{a}\,\mathrm{d}x,\\ f_n(b)=\dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a\left(\psi_2(x)-\varphi_1(b)-\frac{x}{a}[\varphi_2(b)-\varphi_1(b)]\right)\sin\frac{n\pi x}{a}\,\mathrm{d}x.\end{cases}\tag{2.9}$$

因此, 求解关于 $f_n(y)$ 的二阶常微分方程的边值问题 (2.8), (2.9), 就可得原定解问题的形式解. 当然, 亦可作变换

$$u(x,y)=w(x,y)+\psi_1(x)+\frac{y}{b}[\psi_2(x)-\psi_1(x)],$$

得出关于 w 的定解问题. 因为边界条件关于 y 是齐次的, 方法雷同. 此不赘述.

2.13 对于 a 和 b 不可通约的情况, 把例 2.3.2 的求解过程补充完整.

解 我们已经得到

$$\lambda_{mn}=\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\pi^2,\quad m,\,n=1,2\cdots,$$

将其代入关于 T 的方程 $T''(t)+\lambda_{mn}T(t)=0$, 可得通解

$$T_{mn}(t)=C_{mn}\sin\sqrt{\lambda_{mn}}t+D_{mn}\cos\sqrt{\lambda_{mn}}t,\quad m,\,n=1,2\cdots.$$

于是原问题的形式解为

$$u(x,y,t)=\sum_{m,n=1}^{\infty}\left(C_{mn}\sin\sqrt{\lambda_{mn}}\,t+D_{mn}\cos\sqrt{\lambda_{mn}}\,t\right)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{2.10}$$

根据初值条件

$$\begin{cases}u(x,y,0)=\varphi(x,y)=\displaystyle\sum_{m,n=1}^{\infty}D_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},\\ u_t(x,y,0)=\psi(x,y)=\displaystyle\sum_{m,n=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_{mn}}C_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},\end{cases}$$

确定出系数

$$\begin{cases}C_{mn}=\dfrac{4}{ab\sqrt{\lambda_{mn}}}\displaystyle\int_0^b\int_0^a\psi(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\\ D_{mn}=\dfrac{4}{ab}\displaystyle\int_0^b\int_0^a\varphi(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.\end{cases}$$

将 C_{mn},D_{mn} 的表达式代入 (2.10) 式可得原问题的解.

2.14 求解下列定解问题：

$$(1)\ \begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=\sin\dfrac{2\pi x}{l}\sin\dfrac{2\pi at}{l}, & 0<x<l,\ t>0,\\ u(0,t)=u(l,t)=0, & t\ge 0,\\ u(x,0)=u_t(x,0)=0, & 0\le x\le l;\end{cases}$$

$$(2)\ \begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx}, & 0<x<l,\ t>0,\\ u(0,t)=t^2,\ u_x(l,t)=0, & t\ge 0,\\ u(x,0)=u_t(x,0)=0, & 0\le x\le l;\end{cases}$$

$$(3)\ \begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=A\sinh x, & 0<x<l,\ t>0\\ u(0,t)=k_0,\ u(l,t)=k, & t\ge 0,\\ u(x,0)=u_t(x,0)=0, & 0\le x\le l,\end{cases}$$

其中 $A,\,k_0,\,k$ 为常数;

$$(4)\ \begin{cases}u_t=a^2u_{xx}, & 0<x<l,\ t>0,\\ u(0,t)=0,\ u(l,t)=At, & t\ge 0,\\ u(x,0)=0, & 0\le x\le l,\end{cases}$$

其中 A 为常数.

解 (1) 利用齐次化原理知

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi a}\sin\frac{n\pi x}{l}\int_0^t\int_0^l \sin\frac{2\pi\xi}{l}\sin\frac{2\pi a\tau}{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau. \\
&= \frac{1}{\pi a}\sin\frac{2\pi x}{l}\int_0^l\left(\sin\frac{2\pi\xi}{l}\right)^2\mathrm{d}\xi\int_0^t\sin\frac{2\pi a\tau}{l}\sin\frac{2\pi a}{l}(t-\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{l}{4\pi a}\left(\frac{l}{2\pi a}\sin\frac{2\pi at}{l}-t\cos\frac{2\pi at}{l}\right)\sin\frac{2\pi x}{l}.
\end{aligned}$$

(2) 令 $u(x,t)=v(x,t)+t^2+w(x)$, 代入方程得

$$\begin{cases}
v_{tt}-a^2v_{xx}=a^2w''(x)-2, & 0<x<l,\ t>0, \\
v(0,t)=-w(0),\ v_x(l,t)=-w'(l), & t\geq 0, \\
v(x,0)=-w(x),\ v_t(x,0)=0, & 0\leq x\leq l.
\end{cases}$$

为使 v 的方程和边界条件都是齐次的, 取 w 是边值问题

$$\begin{cases}
a^2w''(x)-2=0, & 0<x<l, \\
w(0)=w'(l)=0
\end{cases}$$

的解, 求出

$$w(x)=\frac{x^2}{a^2}-\frac{2lx}{a^2}.$$

对于这个 $w(x)$, 函数 $v(x,t)$ 满足定解问题

$$\begin{cases}
v_{tt}-a^2v_{xx}=0, & 0<x<l,\ t>0, \\
v(0,t)=v_x(l,t)=0, & t\geq 0, \\
v(x,0)=-w(x),\ v_t(x,0)=0, & 0\leq x\leq l.
\end{cases}$$

由边界条件知, 其形式解为

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{(2n-1)\pi at}{2l}+D_n\sin\frac{(2n-1)\pi at}{2l}\right)\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}.$$

再利用初值条件得

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\left(\frac{2lx}{a^2}-\frac{x^2}{a^2}\right)\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\,\mathrm{d}x=\frac{32l^2}{(2n-1)^3\pi^3a^2},\quad D_n=0,\quad n=1,2,\cdots,$$

所以

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{32l^2}{(2n-1)^3\pi^3a^2}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2n-1)\pi at}{2l}.$$

于是原定解问题的解为

$$u(x,t)=t^2+\frac{x^2}{a^2}-\frac{2lx}{a^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{32l^2}{(2n-1)^3\pi^3a^2}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2n-1)\pi at}{2l}.$$

(3) 令 $u(x,t)=v(x,t)+w(x)$, 代入方程得

$$\begin{cases}
v_{tt}-a^2v_{xx}=a^2w''(x)+A\sinh x, & 0<x<l,\ t>0, \\
v(0,t)=k_0-w(0),\ v(l,t)=k-w(l), & t\geq 0, \\
v(x,0)=-w(x),\ v_t(x,0)=0, & 0\leq x\leq l.
\end{cases}$$

为使 v 的方程和边界条件都是齐次的, 取 w 是边值问题

$$\begin{cases} a^2 w''(x) + A\sinh x = 0, \quad 0 < x < l, \\ w(0) = k_0, \quad w(l) = k \end{cases}$$

的解, 得出

$$w(x) = k_0 - \frac{A}{a^2}\sinh x + \left(\frac{A}{a^2}\sinh l + k - k_0\right)\frac{x}{l}.$$

对于这样确定的 $w(x)$, 函数 $v(x,t)$ 满足定解问题

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, & 0 < x < l,\ t > 0, \\ v(0,t) = v(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ v(x,0) = -w(x),\ v_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

由边界条件知, 其形式解为

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n \cos\frac{n\pi at}{l} + D_n \sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

根据初值条件确定出系数

$$C_n = -\frac{2}{l}\int_0^l w(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,\mathrm{d}\xi, \quad D_n = 0, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

于是

$$v(x,t) = -\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^l w(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,\mathrm{d}\xi\right)\cos\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

最终求得原定解问题的解为

$$\begin{aligned} u(x,t) &= w(x) - \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^l w(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,\mathrm{d}\xi\right)\cos\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l} \\ &= k_0 - \frac{A}{a^2}\sinh x + \left(\frac{A}{a^2}\sinh l + k - k_0\right)\frac{x}{l} - \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^l w(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,\mathrm{d}\xi\right)\cos\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}. \end{aligned}$$

(4) 令 $u(x,t) = v(x,t) + \dfrac{A}{l}xt + w(x)$, 代入方程得

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = a^2 w''(x) - \dfrac{A}{l}x, & 0 < x < l,\ t > 0, \\ v(0,t) = -w(0),\ v(l,t) = -w(l), & t \geq 0, \\ v(x,0) = -w(x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

为使 v 的方程和边界条件都是齐次的, 取 w 是边值问题

$$\begin{cases} a^2 w''(x) - \dfrac{A}{l}x = 0, \quad 0 < x < l, \\ w(0) = w(l) = 0 \end{cases}$$

的解, 得出

$$w(x) = \frac{A}{6a^2 l}x(x^2 - l^2).$$

对于这样确定的 $w(x)$, 函数 $v(x,t)$ 满足定解问题

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = 0, & 0 < x < l,\ t > 0, \\ v(0,t) = v(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ v(x,0) = -\dfrac{A}{6a^2 l} x(x^2 - l^2), & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

由边界条件知, 其形式解为

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp\left(-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t\right) \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

根据初值条件确定出系数

$$C_n = -\frac{2}{l}\int_0^l \frac{A}{6a^2 l} x(x^2 - l^2) \sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^{n+1} 2Al^2}{n^3\pi^3 a^2}.$$

于是

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2Al^2}{n^3\pi^3 a^2} \exp\left(-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t\right) \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

最后得出原定解问题的解为

$$u(x,t) = \frac{A}{6a^2 l} x(x^2 - l^2) + \frac{A}{l} xt + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2Al^2}{n^3\pi^3 a^2} \exp\left(-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t\right) \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

2.15 有一块沿四周无限扩展的平板, 板的密度均匀, 厚度是 l. 已知初始时刻平板的含湿量是 A (常数), 水分在平板的上、下两面以等速度 β 向外部扩散. 求平板的含湿量 (假设板内水分的扩散系数是 1).

解 这是一个扩散问题, 含湿量 $u(x,t)$ 满足下面的定解问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = \beta,\ u_x(l,t) = -\beta, & t \geq 0, \\ u(x,0) = A, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

先将边界条件齐次化. 令 $u(x,t) = v(x,t) - \dfrac{\beta}{l}x^2 + \beta x$, 代入方程得

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = -\dfrac{2a^2\beta}{l}, & 0 < x < l,\ t > 0, \\ v_x(0,t) = v_x(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ v(x,0) = A + \dfrac{\beta}{l}x^2 - \beta x, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

然后将方程齐次化. 令 $v(x,t) = w(x,t) + A - \dfrac{2a^2\beta}{l}t$, 得关于 w 的定解问题

$$\begin{cases} w_t - a^2 w_{xx} = 0, & 0 < x < l,\ t > 0, \\ w_x(0,t) = w_x(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ w(x,0) = \dfrac{\beta}{l}x^2 - \beta x, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

利用边界条件知, 其形式解为

$$w(x,t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp\left(-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t\right) \cos\frac{n\pi x}{l}.$$

根据初值条件确定出系数

$$C_0 = \frac{1}{l}\int_0^l \left(\frac{\beta}{l}x^2 - \beta x\right)\mathrm{d}x = -\frac{\beta l}{6}, \quad n = 0,$$

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \left(\frac{\beta}{l}x^2 - \beta x\right)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x = \frac{2\beta l}{n^2\pi^2}[1+(-1)^n], \quad n = 1,\,2,\,\cdots.$$

由此得

$$\begin{aligned} w(x,t) &= -\frac{\beta l}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\beta l}{n^2\pi^2}[1+(-1)^n]\exp\left(-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t\right)\cos\frac{n\pi x}{l}. \\ &= -\frac{\beta l}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta l}{n^2\pi^2}\exp\left(-\left(\frac{2n\pi a}{l}\right)^2 t\right)\cos\frac{2n\pi x}{l}. \end{aligned}$$

故得原问题的解

$$u(x,t) = -\frac{\beta}{l}x^2 + \beta x + A - \frac{2a^2\beta}{l}t - \frac{\beta l}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta l}{n^2\pi^2}\exp\left(-\left(\frac{2n\pi a}{l}\right)^2 t\right)\cos\frac{2n\pi x}{l}.$$

2.16 求解下列混合问题：

$$(1)\ \begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = -\dfrac{\omega^2 x}{l}\sin\omega t, & 0<x<l,\ t>0, \\ u(0,t) = \omega t,\ u(l,t) = \sin\omega t, & t\ge 0, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = \omega, & 0\le x\le l; \end{cases}$$

$$(2)\ \begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = bu_x, & 0<x<l,\ t>0, \\ u(0,t) = 0,\ u(l,t) = Bt, & t\ge 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & 0\le x\le l; \end{cases}$$

$$(3)\ \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \mathrm{e}^x, & 0<x<l,\ t>0, \\ u_x(0,t) = -1,\ u(l,t) = t, & t\ge 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & 0\le x\le l; \end{cases}$$

$$(4)\ \begin{cases} u_t = a^2u_{xx} - b^2u, & 0<x<l,\ t>0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t\ge 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0\le x\le l. \end{cases}$$

这里的 ω, b, B 为已知常数,$\varphi(x)$ 为已知的连续函数.

解 (1) 先将边界条件齐次化. 令 $u(x,t) = v(x,t) + \omega t + \dfrac{x}{l}(\sin\omega t - \omega t)$, 得关于 v 的定解问题

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2v_{xx} = 0, & 0<x<l,\ t>0, \\ v(0,t) = v(l,t) = 0, & t\ge 0, \\ v(x,0) = v_t(x,0) = 0, & 0\le x\le l. \end{cases}$$

该定解问题只有零解 $v(x,t) = 0$. 因此原问题的解为

$$u(x,t) = \omega t + \frac{x}{l}(\sin\omega t - \omega t).$$

(2) 作变换 $u=\mathrm{e}^{-bx/(2a^2)}v$, 则原问题转化为 v 的定解问题

$$\begin{cases} v_{tt}-a^2v_{xx}=-\dfrac{b^2}{4a^2}v, & 0<x<l,\ t>0, \\ v(0,t)=0,\ v(l,t)=\mathrm{e}^{bl/(2a^2)}Bt, & t\geq 0, \\ v(x,0)=v_t(x,0)=0, & 0\leq x\leq l. \end{cases}$$

将边界条件齐次化. 令 $v(x,t)=w(x,t)+\dfrac{B}{l}\mathrm{e}^{bl/(2a^2)}xt$, 得关于 w 的定解问题

$$\begin{cases} w_{tt}-a^2w_{xx}=-\dfrac{b^2}{4a^2}w-\dfrac{b^2B}{4a^2l}\mathrm{e}^{bl/(2a^2)}xt, & 0<x<l,\ t>0, \\ w(0,t)=w(l,t)=0, & t\geq 0, \\ w(x,0)=0,\ w_t(x,0)=-\dfrac{B}{l}\mathrm{e}^{bl/(2a^2)}x, & 0\leq x\leq l. \end{cases}$$

再令 $w(x,t)=p(x,t)+q(x,t)$, 其中 p,q 分别是定解问题

$$\begin{cases} p_{tt}-a^2p_{xx}=-\dfrac{b^2}{4a^2}p, & 0<x<l,\ t>0, \\ p(0,t)=p(l,t)=0, & t\geq 0, \\ p(x,0)=0,\ p_t(x,0)=-\dfrac{B}{l}\mathrm{e}^{bl/(2a^2)}x, & 0\leq x\leq l \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} q_{tt}-a^2q_{xx}=-\dfrac{b^2}{4a^2}q-\dfrac{b^2B}{4a^2l}\mathrm{e}^{bl/(2a^2)}xt, & 0<x<l,\ t>0, \\ q(0,t)=q(l,t)=0, & t\geq 0, \\ q(x,0)=q_t(x,0)=0, & 0\leq x\leq l \end{cases}$$

的解. 先解第一个定解问题. 令 $p(x,t)=X(x)T(t)$, 代入方程并分离变量得

$$\frac{T''+\eta^2T}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda\triangleq-\beta^2,$$

其中 $\eta^2=b^2/(4a^2)$. 这样, 就得到两个常微分方程定解问题

$$\begin{cases} X''+\beta^2X=0, \quad 0<x<l, \\ X(0)=X(l)=0 \end{cases}$$

和

$$T''+(\eta^2+a^2\beta^2)T=0.$$

解 X 的特征值问题, 得到特征值和特征函数为

$$\lambda_n=\beta_n^2=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l}, \quad n=1,2,\cdots.$$

将 λ_n 代入 T 的方程, 得通解

$$T_n(t)=C_n\cos\gamma_nt+D_n\sin\gamma_nt,$$

其中

$$\gamma_n=\sqrt{\eta^2+a^2\beta_n^2}=\sqrt{\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2+\frac{b^2}{4a^2}}.$$

叠加得

$$p(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\cos\gamma_n t+D_n\sin\gamma_n t)\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

由初值条件得

$$C_n=0,\quad D_n=-\frac{2}{\gamma_n l}\int_0^l\frac{B}{l}\mathrm{e}^{bl/(2a^2)}x\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=\frac{2(-1)^n}{n\pi\gamma_n}B\mathrm{e}^{bl/(2a^2)}.$$

所以

$$p(x,t)=\frac{2B}{\pi}\mathrm{e}^{bl/(2a^2)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\gamma_n}\sin\gamma_n t\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

对第二个定解问题采用齐次化原理得

$$\begin{aligned}q(x,t)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\gamma_n l}\sin\frac{n\pi x}{l}\int_0^t\int_0^l\left(-\frac{b^2B}{4a^2l}\mathrm{e}^{bl/(2a^2)}\xi\tau\right)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\sin\gamma_n(t-\tau)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau.\\&=\frac{b^2B}{2a^2\pi}\mathrm{e}^{bl/(2a^2)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\gamma_n^2}\sin\frac{n\pi x}{l}\left(t-\frac{\sin\gamma_n t}{\gamma_n}\right).\end{aligned}$$

至此得原问题的解为

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\mathrm{e}^{-bx/(2a^2)}\left(p(x,t)+q(x,t)+\frac{B}{l}\mathrm{e}^{bl/(2a^2)}xt\right)\\&=\exp\left(\frac{b(l-x)}{2a^2}\right)\left\{\frac{B}{l}xt+\frac{B}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\gamma_n}\left[\left(2-\frac{b^2}{2a^2\gamma_n^2}\right)\sin\gamma_n t+\frac{b^2}{2a^2\gamma_n}t\right]\sin\frac{n\pi x}{l}\right\}.\end{aligned}$$

(3) 令 $u(x,t)=v(x,t)+t+w(x)$, 代入方程得

$$\begin{cases}v_{tt}-v_{xx}=w''(x)+\mathrm{e}^x, & 0<x<l,\ t>0,\\ v_x(0,t)=-1-w'(0),\ v(l,t)=-w(l), & t\geq 0,\\ v(x,0)=-w(x),\ v_t(x,0)=-1, & 0\leq x\leq l.\end{cases}$$

为使 v 的方程和边界条件都是齐次的, 取 w 是边值问题

$$\begin{cases}w''(x)+\mathrm{e}^x=0, \quad 0<x<l,\\ w'(0)=-1,\ w(l)=0\end{cases}$$

的解, 求出

$$w(x)=-\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^l.$$

于是, 函数 $v(x,t)$ 满足定解问题

$$\begin{cases}v_{tt}-v_{xx}=0, & 0<x<l,\ t>0,\\ v_x(0,t)=v(l,t)=0, & t\geq 0,\\ v(x,0)=-w(x),\ v_t(x,0)=-1, & 0\leq x\leq l.\end{cases}$$

利用边界条件知, 其形式解为

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\cos\beta_n t+D_n\sin\beta_n t)\cos\beta_n x,\quad \text{其中 }\beta_n=\frac{(2n-1)\pi}{2l}.$$

由初值条件确定出系数

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^l)\cos\beta_n x\,\mathrm{d}x = -\frac{2(\beta_n + (-1)^{n+1}\mathrm{e}^l)}{\beta_n(1+\beta_n^2)l},$$
$$D_n = -\frac{2}{\beta_n l}\int_0^l \cos\beta_n x\,\mathrm{d}x = -\frac{2(-1)^{n+1}}{l\beta_n^2}.$$

所以

$$v(x,t) = -\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\beta_n + (-1)^{n+1}\mathrm{e}^l}{\beta_n(1+\beta_n^2)}\cos\beta_n t + \frac{(-1)^{n+1}}{\beta_n^2}\sin\beta_n t\right)\cos\beta_n x.$$

原定解问题的解为

$$u(x,t) = \mathrm{e}^l + t - \mathrm{e}^x - \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\beta_n + (-1)^{n+1}\mathrm{e}^l}{\beta_n(1+\beta_n^2)}\cos\beta_n t - \frac{(-1)^n}{\beta_n^2}\sin\beta_n t\right)\cos\beta_n x.$$

(4) 令 $u(x,t) = \mathrm{e}^{-b^2 t}v(x,t)$, 原问题可转化为 v 的定解问题

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = 0, & 0 < x < l,\ t > 0, \\ v(0,t) = v(l,t) = 0, & t \ge 0, \\ v(x,0) = \varphi(x), & 0 \le x \le l. \end{cases}$$

由边界条件知, 它的形式解为

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp\left(-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t\right)\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

由初值条件确定出系数

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,\mathrm{d}\xi, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

于是得原问题的解

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{-b^2 t}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,\mathrm{d}\xi\right)\exp\left(-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t\right)\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

2.17 给定定解问题

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = \beta(u_0 - u), & 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(0,t) = u_1,\ u(l,t) = u_2, & t \ge 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 \le x \le l, \end{cases}$$

其中 β, u_0, u_1, u_2 都是常数. 试证明在变换 $u(x,t) = u_0 + v(x,t)\mathrm{e}^{-\beta t}$ 之下, 此定解问题转化为

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0, \quad 0 < x < l,\ t > 0, \\ v(0,t) = (u_1 - u_0)\mathrm{e}^{\beta t},\ v(l,t) = (u_2 - u_0)\mathrm{e}^{\beta t}, \quad t \ge 0, \\ v(x,0) = f(x) - u_0, \quad 0 \le x \le l, \end{cases} \tag{2.11}$$

并由此求出当 $u_1 = u_2 = u_0$ 时 $u(x,t)$ 的表达式.

解 先证明 v 满足上述定解问题 (2.11). 显然有

$$u_t = (v_t - \beta v)\mathrm{e}^{-\beta t}, \quad u_{xx} = v_{xx}\mathrm{e}^{-\beta t}.$$

代入原方程得

$$(v_t-\beta v)\mathrm{e}^{-\beta t}-v_{xx}\mathrm{e}^{-\beta t}=-\beta v\mathrm{e}^{-\beta t},$$

即

$$v_t-v_{xx}=0.$$

相应的边界条件变成

$$\begin{aligned}v(0,t)&=(u(0,t)-u_0)\mathrm{e}^{\beta t}=(u_1-u_0)\mathrm{e}^{\beta t},\\ v(l,t)&=(u(l,t)-u_0)\mathrm{e}^{\beta t}=(u_2-u_0)\mathrm{e}^{\beta t},\end{aligned}$$

初值条件变成

$$v(x,0)=u(x,0)-u_0=f(x)-u_0.$$

因而结论成立.

当 $u_1=u_2=u_0$ 时, 定解问题 (2.11) 成为

$$\begin{cases}v_t-v_{xx}=0, & 0<x<l,\ t>0,\\ v(0,t)=v(l,t)=0, & t\geq 0,\\ v(x,0)=f(x)-u_0, & 0\leq x\leq l.\end{cases}$$

由边界条件知, 它的形式解为

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\exp\left(-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2t\right)\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

由初值条件定出系数

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l(f(\xi)-u_0)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,\mathrm{d}\xi,\quad n=1,2,\cdots.$$

于是得原问题的解

$$u(x,t)=u_0+\mathrm{e}^{-\beta t}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{l}\int_0^l(f(\xi)-u_0)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,\mathrm{d}\xi\right)\exp\left(-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2t\right)\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

2.18 用特征展开法求解问题

$$\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=\frac{1}{2}xt, & 0<x<\pi,\ t>0,\\ u(0,t)=u(\pi,\,t)=0, & t\geq 0,\\ u(x,0)=\sin x,\ u_t(x,0)=0, & 0\leq x\leq \pi.\end{cases}$$

解 根据定解问题的边界条件可知, 作为 x 的函数,$u(x,t)$ 和 $\frac{1}{2}xt$ 都可以按特征函数系 $\left\{\sin nx\right\}_{n=1}^{\infty}$ 展开:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx,\quad \frac{1}{2}xt=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin nx,$$

其中

$$f_n(t)=\frac{(-1)^{n+1}}{n}t,\quad n=1,2,\cdots.$$

把这两个展开式代入方程得

$$\sum_{n=1}^{\infty}[u_n''(t)+n^2u_n(t)-f_n(t)]\sin nx=0.$$

由特征函数系的完备性可知

$$u_n''(t)+n^2u_n(t)=f_n(t).$$

根据初值条件 $u(x,0)=\sin x,\ u_t(x,0)=0$, 定出

$$u_1(0)=1,\quad u_n(0)=0,\quad n=2,3,\cdots,$$

$$u_n'(0)=0,\quad n=1,2,\cdots.$$

利用常微分方程的常数变易法解出

$$\begin{aligned}u_n(t)\ &=\ \frac{1}{n}\int_0^t f_n(\tau)\sin n(t-\tau)\mathrm{d}\tau+u_n(0)\cos nt\\ &=\ \begin{cases}t-\sin t+\cos t, & n=1,\\ \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^3}\left(t-\dfrac{\sin nt}{n}\right), & n\ge 2.\end{cases}\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}u(x,t)\ &=\ (t-\sin t+\cos t)\sin x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\left(t-\frac{\sin nt}{n}\right)\sin nx\\ &=\ \cos t\sin x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\left(t-\frac{\sin nt}{n}\right)\sin nx.\end{aligned}$$

2.19 对于例 2.7.2, 写出用第二种方法求解的详细过程.

解 例 2.7.2 中的定解问题为

$$\begin{cases}u_t-a^2u_{xx}=-b^2u, & 0<x<l,\ t>0,\\ u_x(0,t)=0,\ u(l,t)=u_1, & t\ge 0,\\ u(x,0)=\dfrac{u_1}{l^2}x^2, & 0\le x\le l,\end{cases}$$

其中 b, u_1 都是常数. 直接作变换, 令 $v(x,t)=u(x,t)\mathrm{e}^{b^2t}$, 则有

$$\begin{cases}v_t-a^2v_{xx}=0, & 0<x<l,\ t>0,\\ v_x(0,t)=0,\quad v(l,t)=u_1\mathrm{e}^{b^2t}, & t\ge 0,\\ v(x,0)=\dfrac{u_1}{l^2}x^2, & 0\le x\le l.\end{cases}$$

再将边界条件齐次化, 令 $v(x,t)=w(x,t)+u_1\mathrm{e}^{b^2t}$, 我们有

$$\begin{cases}w_t-a^2w_{xx}=-u_1b^2\mathrm{e}^{b^2t}, & 0<x<l,\ t>0,\\ w_x(0,t)=w(l,t)=0, & t\ge 0,\\ w(x,0)=\dfrac{u_1}{l^2}x^2-u_1, & 0\le x\le l.\end{cases}$$

此定解问题的解可分解成 $w(x,t)=p(x,t)+q(x,t)$, 其中 p,q 分别满足

$$\begin{cases} p_t-a^2p_{xx}=0, & 0<x<l,\ t>0, \\ p_x(0,t)=p(l,t)=0, & t\geq 0, \\ p(x,0)=\dfrac{u_1}{l^2}x^2-u_1, & 0\leq x\leq l \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} q_t-a^2q_{xx}=-u_1b^2\mathrm{e}^{b^2t}, & 0<x<l,\ t>0, \\ q_x(0,t)=q(l,t)=0, & t\geq 0, \\ q(x,0)=0, & 0\leq x\leq l. \end{cases}$$

解第一个定解问题, 得

$$\begin{aligned} p(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{l}\int_0^l\left(\frac{u_1}{l^2}\xi^2-u_1\right)\cos\beta_n\xi\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{e}^{-a^2\beta_n^2t}\cos\beta_nx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n32u_1}{(2n-1)^3\pi^3}\mathrm{e}^{-a^2\beta_n^2t}\cos\beta_nx, \quad \text{其中 } \beta_n=\frac{(2n-1)\pi}{2l}. \end{aligned}$$

对第二个定解问题采用齐次化原理, 得

$$\begin{aligned} q(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\cos\beta_nx\int_0^t\int_0^l(-u_1b^2\mathrm{e}^{b^2\tau})\mathrm{e}^{-a^2\beta_n^2(t-\tau)}\cos\beta_n\xi\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\cos\beta_nx\int_0^t\frac{(-1)^n2u_1b^2}{\beta_nl}\mathrm{e}^{-a^2\beta_n^2(t-\tau)+b^2\tau}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4u_1b^2}{(2n-1)\pi}\cdot\frac{\mathrm{e}^{b^2t}-\mathrm{e}^{-a^2\beta_n^2t}}{b^2+a^2\beta_n^2}\cos\beta_nx. \end{aligned}$$

因此, 原问题的解为

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathrm{e}^{-b^2t}\left(p(x,t)+q(x,t)+u_1\mathrm{e}^{b^2t}\right) \\ &= u_1+\frac{32u_1}{\pi^3}\mathrm{e}^{-b^2t}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n-1)^3}\mathrm{e}^{-a^2\beta_n^2t}\cos\beta_n \\ &\quad +\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4b^2u_1}{(2n-1)\pi}\cdot\frac{1-\mathrm{e}^{-(b^2+a^2\beta_n^2)t}}{b^2+a^2\beta_n^2}\cos\beta_n, \end{aligned}$$

其中 $\beta_n=(2n-1)\pi/(2l)$.

2.20 写出定解问题

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=f(x), & 0<x<l,\ t>0, \\ u(0,t)=A,\ u(l,t)=B, & t\geq 0, \\ u(x,0)=g(x), & 0\leq x\leq l \end{cases}$$

解的一般形式.

解 令 $u(x,t)=v(x,t)+w(x)$, 代入方程得

$$\begin{cases} v_t-a^2v_{xx}=a^2w''(x)+f(x), & 0<x<l,\ t>0, \\ v(0,t)=A-w(0),\ v(l,t)=B-w(l), & t\geq 0, \\ v(x,0)=g(x)-w(x), & 0\leq x\leq l. \end{cases}$$

为使 v 的方程和边界条件都是齐次的, 取 w 是边值问题

$$\begin{cases} a^2 w''(x) + f(x) = 0, \quad 0 < x < l, \\ w(0) = A, \; w(l) = B \end{cases}$$

的解, 得出

$$w(x) = F(x) + \frac{B - A - F(l)}{l} x + A,$$

其中 $F(x)$ 是 $-\dfrac{1}{a^2} f(x)$ 的二次积分, 满足 $F(0) = 0$. 对于这个确定的 $w(x)$, v 满足定解问题

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = 0, & 0 < x < l, \; t > 0, \\ v(0,t) = v(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ v(x,0) = g(x) - w(x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

利用边界条件知, 其形式解为

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp\left(-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t\right) \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

由初值条件确定出系数

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l G(s) \sin\frac{n\pi s}{l} \, \mathrm{d}s,$$

其中

$$G(s) = g(s) - F(s) + \frac{F(l) + A - B}{l} s - A.$$

从而得原定解问题解的一般形式为

$$\begin{aligned} u(x,t) \; = \; & A + F(x) + \frac{B - A - F(l)}{l} x \\ & + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^l G(s) \sin\frac{n\pi s}{l} \, \mathrm{d}s \right) \exp\left(-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t\right) \sin\frac{n\pi x}{l}. \end{aligned}$$

2.21 解初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(x,0) = x(x-l), \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \\ u(0,t) = u(l,t) = u_{xx}(0,t) = u_{xx}(l,t) = 0, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

解 令 $u(x,t) = X(x)T(t)$, 代入方程并分离变量, 得

$$-\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X^{(4)}}{X} = \lambda,$$

即

$$X^{(4)} - \lambda X = 0,$$
$$T'' + a^2 \lambda T = 0.$$

利用边界条件知,$X(0) = X(l) = X''(0) = X''(l) = 0$. 解特征值问题

$$\begin{cases} X^{(4)} - \lambda X = 0, \quad 0 < x < l, \\ X(0) = X(l) = X''(0) = X''(l) = 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

设 $X(x)$ 是问题 (2.12) 的解. 用 X 乘以 (2.12) 的方程并在 $[0,l]$ 积分, 再分部积分得

$$\lambda\int_0^l X^2(x)\mathrm{d}x=\int_0^l (X''(x))^2\mathrm{d}x. \tag{2.13}$$

如果 $\lambda=0$, 则 X 满足

$$\begin{cases} X''(x)=0, \quad 0<x<l,\\ X(0)=X(l)=0. \end{cases}$$

于是 $X(x)\equiv 0$. 如果 $\lambda<0$. 由 (2.13) 式得 $X(x)\equiv 0$. 总之, 对于 $\lambda\le 0$, 问题 (2.12) 没有非零解. 所以问题 (2.12) 的特征值 λ 一定大于零.

记 $\lambda=\beta^4$, $\beta>0$. 此时, 问题 (2.12) 的通解为

$$X(x)=A\cosh\beta x+B\sinh\beta x+C\cos\beta x+D\sin\beta x.$$

利用边界条件得

$$\begin{cases} A+C=0,\\ A-C=0,\\ A\cosh\beta l+B\sinh\beta l+C\cos\beta l+D\sin\beta l=0,\\ A\cosh\beta l+B\sinh\beta l-C\cos\beta l-D\sin\beta l=0. \end{cases}$$

根据前两个方程可得 $A=C=0$. 分析后两个方程可知 $B=0$, $D\sin\beta l=0$. 因此, 问题 (2.12) 有非零解当且仅当 $\sin\beta l=0$. 这样就求出了特征值和特征函数:

$$\lambda_n=\beta_n^4=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4, \quad X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l},\ n=1,2,\cdots.$$

将 $\beta_n^4=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4$ 代入 T 的方程, 解出通解

$$T_n(t)=A_n\cos\left(a\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2t\right)+B_n\sin\left(a\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2t\right).$$

叠加得形式解

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_n\cos\left(a\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2t\right)+B_n\sin\left(a\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2t\right)\right\}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

根据初值条件确定出系数

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l x(x-l)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=\frac{4l^2}{(n\pi)^3}[(-1)^n-1], \quad B_n=0,\ n=1,2,\cdots,$$

从而

$$\begin{aligned} u(x,t)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4l^2}{(n\pi)^3}[(-1)^n-1]\cos\left(a\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2t\right)\sin\frac{n\pi x}{l}\\ &=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8l^2}{(2n-1)^3\pi^3}\cos\left(a\Big(\frac{(2n-1)\pi}{l}\Big)^2t\right)\sin\frac{(2n-1)\pi x}{l}. \end{aligned}$$

第三章　积分变换法

§3.1　内容提要

Fourier 变换

定义 3.1 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 且 f 连续、分片光滑. 如果令

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\cdot x}\,\mathrm{d}x.$$

利用多元函数的Fourier积分定理知, 对所有的 $x \in \mathbb{R}^n$, 成立

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\lambda}\,\mathrm{d}\lambda,$$

其中

$$\begin{aligned}&\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \quad x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\\ &\lambda\cdot x = x\cdot\lambda = x_1\lambda_1 + \cdots + x_n\lambda_n, \quad \int_{\mathbb{R}^n} = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^1}\cdots\int_{\mathbb{R}^1}}_{n},\\ &\mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n, \quad \mathrm{d}\lambda = \mathrm{d}\lambda_1\cdots\mathrm{d}\lambda_n.\end{aligned}$$

函数 $\widehat{f}(\lambda)$ 称为 f 的 n 维Fourier**变换**. $f(x)$ 称为 $\widehat{f}(\lambda)$ 的Fourier**逆变换**, 记为 $\mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}\,](x)$, 或 $\mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}\,]$. 有时也称 f 为 $\widehat{f}$ 的像原函数或原函数.

下面给出 Fourier 变换及其逆变换的基本性质 (一维情形). 总假设所讨论的函数的 Fourier 变换 (逆变换) 存在.

性质 1 (线性性质) Fourier 变换及其逆变换都是线性变换, 即对于任意的函数 f, g 与常数 α, β, 成立

$$\mathcal{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha\mathcal{F}[f] + \beta\mathcal{F}[g] = \alpha\widehat{f}(\lambda) + \beta\widehat{g}(\lambda),$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\alpha\widehat{f} + \beta\widehat{g}] = \alpha\mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}\,] + \beta\mathcal{F}^{-1}[\widehat{g}] = \alpha f + \beta g.$$

性质 2 (位移性质) 对于任意的函数 f 及常数 b, 成立

$$\mathcal{F}[f(x-b)] = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}b\lambda}\mathcal{F}[f(x)], \quad \mathcal{F}[f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}bx}] = \widehat{f}(\lambda - b).$$

性质 3 (相似性质) 对于任意的函数 f 及常数 $a \neq 0$, 成立 $\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{|a|}\widehat{f}(\frac{\lambda}{a})$.

性质 4 (微分性质) 设 $f, f' \in L^1(\mathbb{R}^1) \cap C(\mathbb{R}^1)$, 则

$$\mathcal{F}[f'(x)] = \mathrm{i}\lambda\widehat{f}(\lambda).$$

一般地, 若 $f, f', \cdots, f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R}^1) \cap C(\mathbb{R}^1)$, 则有

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)] = (\mathrm{i}\lambda)^n\widehat{f}(\lambda).$$

利用Fourier变换的微分性质, 可以把一个常微分方程转化成代数方程, 把一个偏微分方程转化成常微分方程.

性质 5（乘多项式性质）设 $f(x)$, $xf(x) \in L^1(\mathbb{R}^1)$, 则有

$$\mathcal{F}[xf(x)] = \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\widehat{f}(\lambda).$$

一般地, 如果 $f(x)$, $xf(x), \cdots, x^k f(x) \in L^1(\mathbb{R}^1)$, 那么

$$\mathcal{F}[x^k f(x)] = \mathrm{i}^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\lambda^k}\widehat{f}(\lambda).$$

性质 6（对称性质）若 $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^1)$, 则

$$\mathcal{F}^{-1}[f(x)] = \frac{1}{2\pi}\widehat{f}(-\lambda).$$

性质 7（积分性质）$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right] = -\frac{\mathrm{i}}{\lambda}\widehat{f}(\lambda)$.

性质 8（乘积定理）

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^1} f_1(x)f_2(x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^1} \widehat{f}_1(\lambda)\widehat{f}_2(-\lambda)\mathrm{d}\lambda, \\
\int_{\mathbb{R}^1} \widehat{f}_1(x)f_2(x)\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^1} f_1(\lambda)\widehat{f}_2(\lambda)\mathrm{d}\lambda.
\end{aligned}$$

性质 9（能量积分定理,Parseval 等式）

$$\int_{\mathbb{R}^1} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^1} |\widehat{f}(\lambda)|^2\,\mathrm{d}\lambda.$$

定义 3.2 （卷积）设函数 f, g 在 $\mathbb{R}^1$ 上有定义. 如果积分 $\int_{\mathbb{R}^1} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t$ 对所有的 $x \in \mathbb{R}^1$ 都收敛, 就称该积分为 f 与 g 的卷积, 记为

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^1} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t.$$

同理可以定义多元函数的卷积：设函数 f, g 在 $\mathbb{R}^n$ 上有定义. 若积分 $\int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t$ 对所有的 $x \in \mathbb{R}^n$ 都收敛, 则称该积分为 f 与 g 的卷积, 记为

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t.$$

卷积有如下性质：

(1) 交换律：$f * g = g * f$;

(2) 结合律：$f * (g * h) = (f * g) * h$;

(3) 分配律：$f * (g + h) = f * g + f * h$.

性质 10（卷积定理）设 $f(x), g(x) \in L^1(\mathbb{R}^1) \cap C(\mathbb{R}^1)$, 则

$$\mathcal{F}[f * g] = \widehat{f} \cdot \widehat{g}, \quad \mathcal{F}[fg] = \frac{1}{2\pi}\widehat{f} * \widehat{g}, \quad \mathcal{F}^{-1}[\widehat{f} \cdot \widehat{g}] = f * g.$$

利用 Fourier 变换, 可以得到如下定解问题解的表达式.

1. 热传导方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t - a^2\Delta u = f(x,t), & x\in\mathbb{R}^n,\ t>0, \\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in\mathbb{R}^n \end{cases}$$

解的表达式:

$$u(x,t)=\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\xi)G(x-\xi,t)\mathrm{d}\xi+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}f(\xi,\tau)G(x-\xi,t-\tau)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau,$$

其中函数

$$G(x,t)=\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^n\exp\left(\frac{-|x|^2}{4a^2t}\right)$$

称为热传导方程的 Green **函数**, 也称为热传导方程初值问题的**基本解**.

2. 弦振动方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t), & x\in\mathbb{R}^1,\ t>0, \\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x), & x\in\mathbb{R}^1 \end{cases}$$

解的表达式:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau.$$

3. 非齐次传输方程初值问题

$$\begin{cases} u_t+\nu\cdot\nabla u+cu=f(x,t), & x\in\mathbb{R}^n,\ t>0, \\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in\mathbb{R}^n \end{cases}$$

解的表达式:

$$u(x,t)=\mathrm{e}^{-ct}\varphi(x-\nu t)+\int_0^t\mathrm{e}^{-c(t-\tau)}f(x-\nu(t-\tau),\tau)\mathrm{d}\tau,$$

其中 $\nu\in\mathbb{R}^n$, 为常向量,c 为常数.

4. 无界梁的振动问题

$$\begin{cases} u_{tt}+a^2u_{xxxx}=f(x,t), & x\in\mathbb{R}^1,\ t>0, \\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x), & x\in\mathbb{R}^1 \end{cases}$$

解的表达式:

$$\begin{aligned} u(x,t) \ = \ & \frac{1}{2\sqrt{\pi at}}\int_{\mathbb{R}^1}\varphi(\xi)\cos\left(\frac{(\xi-x)^2}{4at}-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}\xi-\frac{1}{2a\sqrt{\pi at}}\int_{\mathbb{R}^1}\Psi(\xi)\cos\left(\frac{(\xi-x)^2}{4at}+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}\xi \\ & -\int_0^t\int_{\mathbb{R}^1}\frac{F(\xi,\tau)}{2a\sqrt{\pi a(t-\tau)}}\cos\left(\frac{(\xi-x)^2}{4a(t-\tau)}+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau, \end{aligned}$$

其中

$$\Psi(x)=\int_0^x\int_0^y\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}y,\quad F(x,t)=\int_0^x\int_0^y f(\xi,t)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}y.$$

5. 上半空间调和方程 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^n_+, \\ u(x',0) = \varphi(x'), & x_n = 0, \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) = 0 \end{cases}$$

解的表达式:

$$u(x) = \frac{2x_n}{\omega_n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\varphi(\xi)}{(|x'-\xi|^2 + x_n^2)^{n/2}}\,\mathrm{d}\xi, \quad x' = (x_1, \cdots, x_{n-1}).$$

Laplace 变换

定义 3.3 设 $f(t)$ 在 $t \geq 0$ 上有定义. 对于复数 p, 定义 f 的Laplace变换为

$$\mathcal{L}[f] = \widetilde{f}(p) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-pt} f(t)\mathrm{d}t.$$

有时也称 $\widetilde{f}$ 是 f 的**像函数**.

如果 $\mathcal{L}[f(t)] = \widetilde{f}(p)$ 成立, 则称 $f(t)$ 是 $\widetilde{f}(p)$ 的Laplace逆变换, 有时也称 f 是 $\widetilde{f}(p)$ 的**像原函数**或**原函数**. 它的形式是

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\widetilde{f}\,] = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty} \widetilde{f}(p)\mathrm{e}^{tp}\,\mathrm{d}p, \; t > 0, \tag{3.1}$$

其中 $\widetilde{f}(p)$ 定义在半平面$\mathrm{Re}\,p > \sigma$ 上.

式 (3.1) 的右端是一个复积分, 实际计算非常复杂. 在某些情况下, 可以利用 Laplace 变换的性质来求逆变换. 但是, 在大多数情况下, 都需借助于 Laplace 积分变换表.

定理 3.1 若 $f(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上分段连续且不超过指数型增长, 即存在常数 $M, \alpha > 0$ 使得 $|f(t)| \leq M\mathrm{e}^{\alpha t}$, 则 $f(t)$ 的Laplace变换对满足 $\mathrm{Re}\,p > \alpha$ 的所有 p 都存在.

性质 1 (线性性质) $\mathcal{L}[\alpha f + \beta g] = \alpha\mathcal{L}[f] + \beta\mathcal{L}[g]$, $\mathcal{L}^{-1}[\alpha\widetilde{f} + \beta\widetilde{g}] = \alpha\mathcal{L}^{-1}[\widetilde{f}\,] + \beta\mathcal{L}^{-1}[\widetilde{g}]$.

性质 2 (位移性质) $\mathcal{L}[\mathrm{e}^{at}f(t)] = \widetilde{f}(p-a)$, $\mathrm{Re}\,p > a$. 由此推知 $\mathcal{L}[t^n\mathrm{e}^{at}] = \dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$, $\mathrm{Re}\,p > a$.

性质 3 (相似性质) $\mathcal{L}[f(ct)] = \dfrac{1}{c}\widetilde{f}\left(\dfrac{p}{c}\right)$, $c > 0$.

性质 4 (微分性质) 若在 $[0,\infty)$ 上,$f'(t)$ 分段连续,$f(t)$ 连续且不超过指数型增长, 即存在常数 $M, \alpha > 0$ 使得 $|f(t)| \leq M\mathrm{e}^{\alpha t}$. 则当 $\mathrm{Re}\,p > \alpha$ 时, $f'(t)$ 的 Laplace 变换存在, 且成立 $\mathcal{L}[f'(t)] = p\widetilde{f}(p) - f(0)$. 对于高阶导数, 也有类似的结论: 如果在 $[0,\infty)$ 上,$f^{(n)}(t)$ 分段连续,$f(t)$, $f'(t), \cdots, f^{(n-1)}(t)$ 连续, 且不超过指数型增长. 那么 $f^{(n)}(t)$ 的 Laplace 变换存在, 且成立

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = p^n\widetilde{f}(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0), \quad \mathrm{Re}\,p > \alpha.$$

性质 5 (积分性质) $\mathcal{L}\left[\displaystyle\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right] = \dfrac{1}{p}\widetilde{f}(p)$.

性质 6 (乘多项式性质)

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n}\widetilde{f}(p) = (-1)^n\widetilde{f}^{(n)}(p),$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\widetilde{f}^{(n)}(p)] = (-1)^n t^n f(t), \qquad n = 1, 2, 3, \cdots.$$

性质 7（延迟性质） $\mathcal{L}[f(t-\tau)]=\mathrm{e}^{-\tau p}\widetilde{f}(p)$, 或者 $\mathcal{L}^{-1}[\mathrm{e}^{-\tau p}\widetilde{f}(p)]=f(t-\tau)$.

性质 8（初值定理） $f(0)=\lim\limits_{t\to 0}f(t)=\lim\limits_{p\to\infty}p\widetilde{f}(p)$.

性质 9（终值定理） $f(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=\lim\limits_{p\to 0}p\widetilde{f}(p)$.

性质 10（像函数的积分性质）

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_p^{\infty}\widetilde{f}(s)\mathrm{d}s.$$

定义 3.4 称

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau$$

为函数 f 与 g 的卷积.

卷积有下面的性质：

$$f*g=g*f,\quad (f*g)*h=f*(g*h),\quad f*(g+h)=f*g+f*h.$$

性质 11 （卷积定理）$\mathcal{L}[f*g]=\widetilde{f}(p)\widetilde{g}(p)$, 或者 $\mathcal{L}^{-1}[\widetilde{f}(p)\widetilde{g}(p)]=f*g$.

§3.2　习题解答

3.1 求下列函数的 Fourier 变换：

(1) $f(x)=\begin{cases}|x|, & |x|\le a,\\ 0, & |x|>a>0;\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}\sin\lambda_0 x, & |x|\le a,\\ 0, & |x|>a;\end{cases}$

(3) $f(x)=\cos\eta x^2,\ \sin\eta x^2,\quad \eta>0.$

解 (1) 直接利用定义得

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(x)] &= \int_{-a}^{a}|x|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a}|x|\cos\lambda x\,\mathrm{d}x=2\int_0^a x\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{2a}{\lambda}\sin\lambda a+\frac{2}{\lambda^2}\cos\lambda a-\frac{2}{\lambda^2}.\end{aligned}$$

(2) 按定义, 有

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(x)] &= \int_{-a}^{a}\sin\lambda_0 x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}x=-2\mathrm{i}\int_0^a\sin\lambda_0 x\sin\lambda x\,\mathrm{d}x\\ &= -\mathrm{i}\left(\frac{\sin(\lambda_0-\lambda)a}{\lambda_0-\lambda}-\frac{\sin(\lambda_0+\lambda)a}{\lambda_0+\lambda}\right).\end{aligned}$$

(3) 根据定义得

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\cos\eta x^2] &= \int_{\mathbb{R}^1}\cos\eta x^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^1}\cos\eta x^2\cos\lambda x\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^1}\cos(\eta x^2-\lambda x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^1}\cos\left\{\eta\Big(x-\frac{\lambda}{2\eta}\Big)^2-\frac{\lambda^2}{4\eta}\right\}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{\eta}}\Big(\cos\frac{\lambda^2}{4\eta}\int_{\mathbb{R}^1}\cos t^2\,\mathrm{d}t+\sin\frac{\lambda^2}{4\eta}\int_{\mathbb{R}^1}\sin t^2\,\mathrm{d}t\Big) \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{\eta}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\lambda^2}{4\eta}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\lambda^2}{4\eta}\right) \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{\eta}}\cos\left(\frac{\lambda^2}{4\eta}-\frac{\pi}{4}\right),
\end{aligned}$$

这里利用了 Fresnel 积分 $\int_{\mathbb{R}^1}\cos t^2\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^1}\sin t^2\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. 类似可得

$$\mathcal{F}[\sin\eta x^2] = \int_{\mathbb{R}^1}\sin(\eta x^2-\lambda x)\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\eta}}\cos\left(\frac{\lambda^2}{4\eta}+\frac{\pi}{4}\right).$$

3.2 求 $f(x)*g(x)$, 其中 $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \mathrm{e}^{-x}, & x\ge 0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x\le\frac{\pi}{2}\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

解 按定义, 有

$$f(x)*g(x) = \int_{\mathbb{R}^1} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t.$$

当 $x\le 0$ 时,$f(x)*g(x)=0$; 当 $0<x\le\pi/2$ 时,

$$f(x)*g(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-(x-t)}\sin t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\sin x-\cos x+\mathrm{e}^{-x});$$

当 $x>\pi/2$ 时,

$$f(x)*g(x) = \int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-(x-t)}\sin t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(1+\mathrm{e}^{\pi/2}).$$

3.3 证明 Fourier 变换的卷积定理 (性质 10) 的第二个等式:$\mathcal{F}[fg]=\frac{1}{2\pi}\widehat{f}*\widehat{g}$.

证明 方法一. 直接利用 Fourier 变换及逆变换的定义, 并利用 Fubini 定理, 我们有

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[fg] &= \int_{\mathbb{R}^1} f(x)g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^1} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^1}\widehat{g}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}\omega\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^1}\widehat{g}(\omega)\left(\int_{\mathbb{R}^1} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\lambda-\omega)x}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^1}\widehat{g}(\omega)\widehat{f}(\lambda-\omega)\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\widehat{f}*\widehat{g}.
\end{aligned}$$

方法二. 要证明 $\mathcal{F}[fg]=\frac{1}{2\pi}\widehat{f}*\widehat{g}$, 只要证明 $\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{2\pi}\widehat{f}*\widehat{g}\right]=fg$ 即可. 利用 Fubini 定理得

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\left[\tfrac{1}{2\pi}\widehat{f}*\widehat{g}\right] &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^1}\left(\int_{\mathbb{R}^1}\widehat{f}(\tau)\widehat{g}(\lambda-\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^1}\widehat{f}(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau x}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^1}\widehat{g}(\lambda-\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda-\tau)x}\,\mathrm{d}\lambda\right)\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^1}\widehat{f}(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau x}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^1}\widehat{g}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}\omega\right)\mathrm{d}\tau = fg.
\end{aligned}$$

3.4 利用 Fourier 变换的性质, 求下列函数的 Fourier 变换：

(1) $f(x)=x\mathrm{e}^{-a|x|},\ \ a>0$;

(2) $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{ax}, & |x|\le a,\\ 0, & |x|>a,\end{cases}$ 常数 $a>0$；

(3) $f(x)=\mathrm{e}^{-a|x|}\sin\lambda_0 x$, 常数 $a>0$.

解 (1) 利用 $\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-|x|}]=\dfrac{2}{1+\lambda^2}$ 及相似性质知

$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-a|x|}]=\frac{1}{a}\times\frac{2}{1+(\lambda/a)^2}=\frac{2a}{a^2+\lambda^2},$$

再由乘多项式性质得

$$\mathcal{F}[x\mathrm{e}^{-a|x|}]=\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left[\frac{2a}{a^2+\lambda^2}\right]=-\frac{4a\lambda\mathrm{i}}{(a^2+\lambda^2)^2}.$$

(2) 直接计算得

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(x)] &= \int_{-a}^{a}\mathrm{e}^{ax-\mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a-\mathrm{i}\lambda}\mathrm{e}^{(a-\mathrm{i}\lambda)x}\Big|_{-a}^{a}\\ &= \frac{1}{a-\mathrm{i}\lambda}\big(\mathrm{e}^{a^2-\mathrm{i}\lambda a}-\mathrm{e}^{-a^2+\mathrm{i}\lambda a}\big).\end{aligned}$$

(3) 利用 (1) 知 $\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-a|x|}]=\dfrac{2a}{a^2+\lambda^2}$, 再由 Fourier 变换的线性性质和位移性质得

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-a|x|}\sin\lambda_0 x] &= \mathcal{F}\left[\tfrac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-a|x|}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_0 x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda_0 x})\right]\\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-a|x|+\mathrm{i}\lambda_0 x}]-\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-a|x|-\mathrm{i}\lambda_0 x}]\right)\\ &= \mathrm{i}a\left(\frac{1}{a^2+(\lambda+\lambda_0)^2}-\frac{1}{a^2+(\lambda-\lambda_0)^2}\right).\end{aligned}$$

3.5 求函数 $\mathcal{F}(\lambda)=\mathrm{e}^{-t|\lambda|}$ 的 Fourier 逆变换, 其中 $t>0$ 为参数.

解 利用 $\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-a|x|}]=\dfrac{2a}{a^2+\lambda^2}$ 和对称性质 $\mathcal{F}^{-1}[f(x)]=\dfrac{1}{2\pi}\widehat{f}(-\lambda)$, 得

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-t|\lambda|}]=\frac{1}{2\pi}\,\frac{2t}{t^2+(-x)^2}=\frac{t}{\pi(t^2+x^2)}.$$

3.6 求下列初值问题的解：

(1) $\begin{cases}u_t=a^2u_{xx}, & x\in\mathbb{R}^1,\ t>0,\\ u(x,0)=1+x^2, & x\in\mathbb{R}^1;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=t\sin x, & x\in\mathbb{R}^1,\ t>0,\\ u|_{t=0}=0,\ u_t|_{t=0}=\sin x, & x\in\mathbb{R}^1;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=\dfrac{tx}{(1+x^2)^2}, & x\in\mathbb{R}^1,\ t>0,\\ u|_{t=0}=0,\ u_t|_{t=0}=\dfrac{1}{1+x^2}, & x\in\mathbb{R}^1.\end{cases}$

解 (1) 方法一: 直接利用公式得

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{\mathbb{R}^1}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right)(1+\xi^2)\mathrm{d}\xi=1+x^2+2a^2t,$$

这里, 用到了概率积分

$$\int_{\mathbb{R}^1} \phi(x)\mathrm{d}x = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^1} x^2\phi(x)\mathrm{d}x = \sigma^2 + u^2,$$

其中 $\phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\dfrac{(x-u)^2}{2\sigma^2}\right)$.

方法二: 直接利用幂级数求解公式 (**??**) 得

$$u(x,t) = 1 + x^2 + 2a^2t.$$

(2) 直接利用公式可得

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\sin\xi\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}\tau\sin\xi\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau \\
&= \sin x\sin t + \int_0^t \tau\sin x\sin(t-\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= \sin x\sin t + \sin x(t-\sin t) = t\sin x.
\end{aligned}$$

(3) 直接利用公式可得

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\frac{1}{1+\xi^2}\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\frac{\tau\xi}{(1+\xi^2)^2}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2a}[\arctan(x+at) - \arctan(x-at)] \\
&\quad + \frac{1}{4a}\int_0^t\left(\frac{1}{1+(x-a(t-\tau))^2} - \frac{1}{1+(x+a(t-\tau))^2}\right)\tau\,\mathrm{d}\tau \\
&\triangleq \frac{1}{2a}[\arctan(x+at) - \arctan(x-at)] + \frac{1}{4a}(\mathbf{I} - \mathbf{II}).
\end{aligned}$$

下面计算积分 **I** 和 **II**. 令 $x - a(t-\tau) = s$, 则 $\tau = t - x/a + s/a$. 从而

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} &= \int_0^t \frac{\tau}{1+(x-a(t-\tau))^2}\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{a}\int_{x-at}^{x}\frac{t-x/a+s/a}{1+s^2}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{a^2}(at-x)[\arctan x - \arctan(x-at)] + \frac{1}{2a^2}\ln\frac{1+x^2}{1+(x-at)^2}.
\end{aligned}$$

类似地, 可以求出

$$\mathbf{II} = \frac{1}{a^2}(at+x)[\arctan(x+at) - \arctan x] - \frac{1}{2a^2}\ln\frac{1+(x+at)^2}{1+x^2}.$$

最终得问题的解为

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{4a^3}\big[(x-at-2a^2)\arctan(x-at) - (x+at-2a^2)\arctan(x+at) \\
&\quad + 2at\arctan x\big] + \frac{1}{8a^3}\ln\frac{1+(x+at)^2}{1+(x-at)^2}.
\end{aligned}$$

3.7 利用 Fourier 变换求解以下定解问题:

$$(1)\ \begin{cases} u_t - a^2u_{xx} - bu_x - cu = f(x,t), & x\in\mathbb{R}^1,\ t>0, \\ u(x,0) = 0, & x\in\mathbb{R}^1, \end{cases}$$

其中 a, b, c 是常数;

$$(2)\ \begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & x\in\mathbb{R}^1,\quad y>0,\\ u|_{y=0}=\varphi(x), & x\in\mathbb{R}^1,\\ \lim\limits_{x^2+y^2\to\infty}u(x,y)=0, & \end{cases}$$

其中 $\varphi(x)$ 是连续函数.

解 (1) 对方程和定解条件关于 x 施行 Fourier 变换, 得

$$\widehat{u}_t+(a^2\lambda^2-\mathrm{i}b\lambda-c)\widehat{u}=\widehat{f}(\lambda,t),\quad \widehat{u}(\lambda,0)=0.$$

这是一个一阶常微分方程的初值问题, 利用常数变易公式知

$$\widehat{u}(\lambda,t)=C(\lambda)\mathrm{e}^{-(a^2\lambda^2-\mathrm{i}b\lambda-c)t}+\int_0^t\widehat{f}(\lambda,\tau)\mathrm{e}^{-(a^2\lambda^2-\mathrm{i}b\lambda-c)(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau.$$

由 $\widehat{u}(\lambda,0)=0$ 知 $C(\lambda)=0$, 于是

$$\widehat{u}(\lambda,t)=\int_0^t\widehat{f}(\lambda,\tau)\mathrm{e}^{-(a^2\lambda^2-\mathrm{i}b\lambda-c)(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau.$$

因此

$$\begin{aligned} u(x,t)\ &=\mathcal{F}^{-1}\left[\int_0^t\widehat{f}(\lambda,\tau)\mathrm{e}^{-(a^2\lambda^2-\mathrm{i}b\lambda-c)(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau\right]\\ &=\int_0^t\mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}(\lambda,\tau)]*\mathcal{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2(t-\tau)+\mathrm{i}b\lambda(t-\tau)}]\mathrm{e}^{c(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau\\ &=\int_0^t f(x,\tau)*\mathcal{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2(t-\tau)+\mathrm{i}b\lambda(t-\tau)}]\mathrm{e}^{c(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

利用 Fourier 变换的位移性质以及下式

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2t}]=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right),$$

可得

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2(t-\tau)+\mathrm{i}b\lambda(t-\tau)}]=\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left(-\frac{(x+b(t-\tau))^2}{4a^2(t-\tau)}\right).$$

于是

$$u(x,t)=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^1}\frac{f(\xi,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left(-\frac{(x-\xi+bt-b\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}+c(t-\tau)\right)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau.$$

(2) 对方程和定解条件关于 x 施行 Fourier 变换, 便得

$$\widehat{u}_{yy}-\lambda^2\widehat{u}=0,\quad \widehat{u}(\lambda,0)=\widehat{\varphi}(\lambda).$$

其通解为

$$\widehat{u}(\lambda,y)=C(\lambda)\mathrm{e}^{-|\lambda|y}+D(\lambda)\mathrm{e}^{|\lambda|y}.$$

根据已知条件得 $\lim\limits_{y\to\infty}\widehat{u}(\lambda,y)=0$, 因此 $D(\lambda)=0$. 又由 $\widehat{u}(\lambda,0)=\widehat{\varphi}(\lambda)$, 得 $C(\lambda)=\widehat{\varphi}(\lambda)$. 从而

$$\widehat{u}(\lambda,y)=\widehat{\varphi}(\lambda)\mathrm{e}^{-|\lambda|y}.$$

利用习题 3.5, 得

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}\left[\widehat{\varphi}(\lambda)\mathrm{e}^{-|\lambda|y}\right] \\
&= \mathcal{F}^{-1}\left[\widehat{\varphi}(\lambda)\right] * \mathcal{F}^{-1}\left[\mathrm{e}^{-|\lambda|y}\right] \\
&= \varphi(x) * \frac{y}{\pi(x^2+y^2)} \\
&= \frac{y}{\pi}\int_{\mathbb{R}^1} \frac{\varphi(\xi)}{y^2+(x-\xi)^2}\,\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

3.8 设 $u(x,t)$ 是初值问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x\in\mathbb{R}^1,\ t>0; \\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in\mathbb{R}^1 \end{cases}$$

的解, 其中 $\varphi(x)$ 连续且在某个区间 $(-b,b)$ 的外部恒为零,b 是正常数. 证明 $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)=0$ 关于 x 一致成立.

证明 直接利用热传导方程解的表达式, 得

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{\mathbb{R}^1} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-b}^{b} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

因 $\varphi(x)\in C(\mathbb{R}^1)$ 且在区间 $(-b,b)$ 外部恒为零, 故 $\varphi(-b)=\varphi(b)=0$, 并且在闭区间 $[-b,b]$ 上有界, 不妨假设 $|\varphi(x)|\le M$. 从而

$$|u(x,t)| \le \frac{M}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-b}^{b} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right)\mathrm{d}\xi \le \frac{Mb}{a\sqrt{\pi t}}.$$

因此 $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)=0$ 关于 x 一致成立.

3.9 有一个两端无界的枢轴, 其初始温度为 $u(x,0)=\begin{cases}1, & |x|<1, \\ 0, & |x|\ge 1.\end{cases}$ 试证枢轴上的温度分布为

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin\mu}{\mu}\cos\mu x\mathrm{e}^{-a^2\mu^2 t}\,\mathrm{d}\mu.$$

证明 定解问题为

$$\begin{cases} u_t - a^2u_{xx}=0, & x\in\mathbb{R}^1,\ t>0, \\ u(x,0)=\begin{cases}1, & |x|<1, \\ 0, & |x|\ge 1.\end{cases} \end{cases}$$

由热传导方程的求解公式知

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{\mathbb{R}^1} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right)u(\xi,0)\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right)\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

利用 Fubini 定理以及下式

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t}] = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\,\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right),$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_{-1}^{1} \mathcal{F}^{-1}[\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t - \mathrm{i}\lambda\xi}]\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \mathrm{d}\xi \int_{\mathbb{R}^1} \mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t + \mathrm{i}\lambda(x-\xi)}\,\mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^1} \mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t + \mathrm{i}\lambda x}\,\mathrm{d}\lambda \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\xi}\,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda x \mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t}\,\mathrm{d}\lambda.
\end{aligned}
$$

3.10 利用偶延拓方法导出下列定解问题的求解公式：

$$
(1)\ \begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), & x>0,\ t>0, \\ u(x,0)=\varphi(x), & x\ge 0, \\ u_x(0,t)=0, & t\ge 0, \end{cases}
$$

这里的函数 φ 满足 $\varphi'(0)=0$, $f_x(0,t)=0$;

$$
(2)\ \begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), & x>0,\ t>0, \\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x), & x\ge 0, \\ u_x(0,t)=0, & t\ge 0, \end{cases}
$$

这里的函数 φ 和 ψ 满足 $\varphi'(0)=\psi'(0)=0$, $f_x(0,t)=0$.

解 (1) 把 $\varphi(x)$ 偶延拓成 $\Phi(x)$: 当 $x\ge 0$ 时 $\Phi(x)=\varphi(x)$, 当 $x<0$ 时 $\Phi(x)=\varphi(-x)$. 把 $f(x,t)$ 偶延拓成 $F(x,t)$: 当 $x\ge 0$ 时 $F(x,t)=f(x,t)$, 当 $x<0$ 时 $F(x,t)=f(-x,t)$. 考察初值问题

$$
\begin{cases} U_t - a^2 U_{xx} = F(x,t), & x\in\mathbb{R}^1,\ t>0, \\ U(x,0)=\Phi(x), & x\in\mathbb{R}^1. \end{cases}
$$

由热传导方程的求解公式得

$$
\begin{aligned}
U(x,t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{\mathbb{R}^1} \exp\left(\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right)\Phi(\xi)\mathrm{d}\xi + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^1} \frac{F(\xi,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left(\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau \\
&= \mathbf{I}+\mathbf{II}.
\end{aligned}
$$

这个 $U(x,t)$ 限制在 $x\ge 0$ 上就是原问题的解. 下面计算 $\mathbf{I}$ 和 $\mathbf{II}$.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I} &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{0} \varphi(-\xi)\exp\left(\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty \varphi(\xi)\exp\left(\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right)\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty \varphi(\xi)\left[\exp\left(\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right) + \exp\left(\frac{-(x+\xi)^2}{4a^2 t}\right)\right]\mathrm{d}\xi,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{II} &= \int_0^t\int_{-\infty}^{0} \frac{f(-\xi,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left(\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau + \int_0^t\int_0^\infty \frac{f(\xi,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left(\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^t\int_0^\infty \frac{f(\xi,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left[\exp\left(\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) + \exp\left(\frac{-(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\right]\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}
$$

于是, 当 $x \geq 0, t > 0$ 时

$$\begin{aligned} u(x,t) \ =& \ \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \varphi(\xi) \left[\exp\left(\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right) + \exp\left(\frac{-(x+\xi)^2}{4a^2 t}\right)\right] \mathrm{d}\xi \\ &+ \int_0^t \int_0^\infty \frac{f(\xi,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \left[\exp\left(\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) + \exp\left(\frac{-(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\right] \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

(2) 对 f, φ 和 ψ 作偶延拓:

$$F(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & x \geq 0,\ t \geq 0, \\ f(-x,t), & x < 0,\ t \geq 0, \end{cases}$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ \varphi(-x), & x < 0, \end{cases} \qquad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0, \\ \psi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

与 $F(x,t), \Phi(x)$ 和 $\Psi(x)$ 对应的初值问题的解是

$$U(x,t) \ = \ \frac{1}{2}[\Phi(x+at) + \Phi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\tau.$$

这个 $U(x,t)$ 限制在 $x \geq 0$ 上就是原问题的解. 下面确定 $u(x,t)$ 的表达式. 当 $x \geq at$ 时,$x-at,\ x+at \geq 0$, 于是

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\tau.$$

当 $0 \leq x < at$ 时,

$$\begin{aligned} u(x,t) \ =& \ \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(at-x)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{0} \psi(-\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a}\int_0^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi \\ &+ \frac{1}{2a}\int_0^{t-x/a} \left(\int_{x-a(t-\tau)}^0 f(-\xi,\tau)\mathrm{d}\xi + \int_0^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\tau \\ &+ \frac{1}{2a}\int_{t-x/a}^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\tau \\ =& \ \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(at-x)] + \frac{1}{2a}\int_0^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a}\int_0^{at-x} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi \\ &+ \frac{1}{2a}\int_0^{t-x/a} \left(\int_0^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi + \int_0^{a(t-\tau)-x} f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\tau \\ &+ \frac{1}{2a}\int_{t-x/a}^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

3.11 求解半无界问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0,\ t > 0, \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, & x \geq 0, \\ u|_{x=0} = A\sin\omega t, & t \geq 0, \end{cases}$$

并给出物理解释.

解 对方程及定解条件关于 t 施行 Laplace 变换, 得

$$\begin{cases} \widetilde{u}_{xx}(x,p) = \dfrac{p^2}{a^2}\widetilde{u}(x,p), & x > 0, \\ \widetilde{u}(0,p) = \dfrac{A\omega}{p^2+\omega^2}. \end{cases}$$

先把 p 看作参数, 求出它的通解

$$\widetilde{u}(x,p)=C_1(p)\mathrm{e}^{-px/a}+C_2(p)\mathrm{e}^{px/a}.$$

考虑到 $\lim\limits_{x\to\infty}|u(x,t)|<\infty$, 从而 $\widetilde{u}$ 有界, 故 $C_2(p)=0$. 利用 $\widetilde{u}(0,p)=\dfrac{A\omega}{p^2+\omega^2}$ 又推知 $C_1(p)=\dfrac{A\omega}{p^2+\omega^2}$. 因而

$$\widetilde{u}(x,p)=\frac{A\omega}{p^2+\omega^2}\mathrm{e}^{-px/a}.$$

利用 Laplace 变换的延迟性质得

$$u(x,t)=A\sin\omega\Big(t-\frac{x}{a}\Big)H\Big(t-\frac{x}{a}\Big)=\begin{cases}A\sin\omega\Big(t-\dfrac{x}{a}\Big), & t\geq\dfrac{x}{a},\\ 0, & 0\leq t<\dfrac{x}{a}.\end{cases}$$

物理意义: 方程和初值条件表示半无界弦没有外力作用, 并且初始位移和初始速度都是零, 左边界位移是 t 的周期函数. 特征线是 $t-x/a=c$. 对于给定的点 x $(x>0)$, 在时刻 $t_0=x/a$ 之前, 即 $c<0$, 左边界的位移还没有传播到该点 $(u(x,t)=0)$; 在时刻 $t_0=x/a$ 之后, 即 $c>0$, 左边界的位移已经传播到该点, 波按左边界位移函数的方式沿特征线传播: $u(x,t)=A\sin\omega(t-\frac{x}{a})$.

3.12 求下列函数的 Laplace 变换 (常数 $\omega\neq0$):

(1) $f(t)=\cos\omega t$;

(2) $f(t)=\dfrac{1}{t}\sin\omega t$;

(3) $f(t)=\mathrm{e}^{\omega t}\cos\omega t$;

(4) $f(t)=\sinh\omega t$.

解 (1) 利用 Laplace 变换的线性性质得

$$\mathcal{L}[\cos\omega t]+\mathrm{i}\mathcal{L}[\sin\omega t]=\mathcal{L}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}]=\frac{p+\mathrm{i}\omega}{p^2+\omega^2}.$$

所以

$$\mathcal{L}[\cos\omega t]=\frac{p}{p^2+\omega^2},\quad \mathcal{L}[\sin\omega t]=\frac{\omega}{p^2+\omega^2},\quad \mathrm{Re}p>0.$$

(2) 记 $\mathcal{L}[f(t)]=\widetilde{f}(p)$, 则有

$$\mathcal{L}[tf(t)]=\mathcal{L}[\sin\omega t]=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}=-\widetilde{f}'(p).$$

于是

$$\widetilde{f}(p)=\widetilde{f}(0)+\int_0^p\widetilde{f}'(\tau)\mathrm{d}\tau=\widetilde{f}(0)-\int_0^p\frac{\omega}{\tau^2+\omega^2}\,\mathrm{d}\tau=\widetilde{f}(0)-\arctan\frac{p}{\omega}.$$

由 Dirichlet 积分知

$$\widetilde{f}(0)=\int_0^\infty\frac{\sin\omega t}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}\,\omega.$$

所以

$$\widetilde{f}(p)=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\omega-\arctan\frac{p}{\omega},\quad \mathrm{Re}p>0.$$

(3) 利用 $\mathcal{L}[\cos\omega t]=\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$ 及 Laplace 变换的位移性质, 我们有

$$\mathcal{L}[\mathrm{e}^{\omega t}\cos\omega t]=\frac{p-\omega}{\omega^2+(p-\omega)^2},\quad \mathrm{Re}p>|\omega|.$$

(4) 利用 Laplace 变换的线性性质及位移性质便得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\sinh\omega t]&=\frac{1}{2}(\mathcal{L}[\mathrm{e}^{\omega t}]-\mathcal{L}[\mathrm{e}^{-\omega t}])\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\omega}-\frac{1}{p+\omega}\right)=\frac{\omega}{p^2-\omega^2},\quad \mathrm{Re}p>|\omega|.\end{aligned}$$

3.13 用 Laplace 变换求下列问题的解：

$$(1)\ \begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0, & x>0,\ t>0,\\ u(0,t)=f(t),\ \lim\limits_{x\to\infty}u(x,t)=0, & t\geq 0,\\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0, & x\geq 0;\end{cases}$$

$$(2)\ \begin{cases}u_t-a^2u_{xx}=0, & x>0,\ t>0,\\ u(0,t)=f_1,\ \lim\limits_{x\to\infty}u(x,t)=f_0, & t\geq 0,\\ u(x,0)=f_0, & x\geq 0,\end{cases}$$

其中 f_0,f_1 都是常数.

解 (1) 对方程及定解条件关于 t 施行 Laplace 变换, 得

$$\begin{cases}\widetilde{u}_{xx}(x,p)=\dfrac{p^2}{a^2}\widetilde{u}(x,p), & x>0,\\ \widetilde{u}(0,p)=\widetilde{f}(p).\end{cases}$$

先把 p 看作参数, 求出它的通解是

$$\widetilde{u}(x,p)=C_1(p)\mathrm{e}^{-px/a}+C_2(p)\mathrm{e}^{px/a}.$$

由 $\lim\limits_{x\to\infty}|u(x,t)|<\infty$ 知 u 有界, 从而 $\widetilde{u}$ 也有界, 故 $C_2(p)=0$. 利用 $\widetilde{u}(0,p)=\widetilde{f}(p)$ 又推知 $C_1(p)=\widetilde{f}(p)$. 所以

$$\widetilde{u}(x,p)=\widetilde{f}(p)\mathrm{e}^{-px/a}.$$

利用 Laplace 变换的延迟性质得

$$u(x,t)=f\Big(t-\frac{x}{a}\Big)H\Big(t-\frac{x}{a}\Big)=\begin{cases}f\Big(t-\dfrac{x}{a}\Big), & t\geq\dfrac{x}{a},\\ 0, & 0\leq t<\dfrac{x}{a}.\end{cases}$$

这里 H 是 Heaviside 单位阶梯函数 $H(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$

(2) 对方程及定解条件关于 t 施行 Laplace 变换, 得

$$\begin{cases}a^2\widetilde{u}_{xx}(x,p)-p\widetilde{u}(x,p)=-f_0, & x>0,\\ \widetilde{u}(0,p)=\dfrac{f_1}{p}, \quad \lim\limits_{x\to\infty}\widetilde{u}(x,p)=\dfrac{f_0}{p}.\end{cases}$$

先把 p 看作参数, 求出它的通解是

$$\widetilde{u}(x,p)=C_1(p)\exp\left(-\frac{\sqrt{p}}{a}x\right)+C_2(p)\exp\left(\frac{\sqrt{p}}{a}x\right)+\frac{f_0}{p}.$$

利用 $\widetilde{u}(0,p)=\dfrac{f_1}{p},\ \lim\limits_{x\to\infty}\widetilde{u}(x,p)=\dfrac{f_0}{p}$, 便推出

$$C_1(p)=\frac{f_1-f_0}{p},\quad C_2(p)=0.$$

从而

$$\widetilde{u}(x,p)=\frac{f_1-f_0}{p}\exp\left(-\frac{\sqrt{p}}{a}x\right)+\frac{f_0}{p}.$$

查表知

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\exp\left(-\frac{\sqrt{p}}{a}x\right)\right]=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty}\mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s,$$

因此

$$u(x,t)=f_0+\frac{2(f_1-f_0)}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty}\mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s.$$

3.14 求解一阶偏微分方程的定解问题

$$\begin{cases} xu_t+u_x=x, & x>0,\ t>0,\\ u(0,t)=0, & t\ge 0,\\ u(x,0)=0, & x\ge 0.\end{cases}$$

解 对方程及定解条件关于 t 施行 Laplace 变换, 得

$$px\widetilde{u}(x,p)+\widetilde{u}_x(x,p)=\frac{x}{p}.$$

把 p 看作参数, 上式可以写成

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{u}}{\widetilde{u}-p^{-2}}=-px\,\mathrm{d}x.$$

于是

$$\ln|\widetilde{u}-p^{-2}|=-\frac{p}{2}x^2+C(p),$$

即

$$\widetilde{u}(x,p)=\frac{1}{p^2}+D\mathrm{e}^{-px^2/2}.$$

由 $u(0,t)=0$ 知 $\widetilde{u}(0,p)=0$. 所以 $D=-p^{-2}$. 因此

$$\widetilde{u}(x,p)=\frac{1}{p^2}(1-\mathrm{e}^{-px^2/2}).$$

从而

$$u(x,t)=t-\left(t-\frac{1}{2}x^2\right)H\left(t-\frac{1}{2}x^2\right)=\begin{cases} t, & 0\le t<\dfrac{1}{2}x^2,\\ \dfrac{1}{2}x^2, & t\ge\dfrac{1}{2}x^2.\end{cases}$$

3.15 证明函数

$$v(x,y,t,\xi,\eta,\tau)=\frac{1}{4\pi(t-\tau)}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4(t-\tau)}\right)$$

关于变量 (x,y,t) 满足方程 $v_t-(v_{xx}+v_{yy})=0$, 关于变量 (ξ,η,τ) 满足方程 $v_\tau+(v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta})=0$.

证明 直接计算知

$$\begin{aligned}
v_t&=\frac{1}{4\pi(t-\tau)^2}\left(\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4(t-\tau)}-1\right)\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4(t-\tau)}\right),\\
v_x&=-\frac{(x-\xi)}{8\pi(t-\tau)^2}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4(t-\tau)}\right),\\
v_{xx}&=\left(\frac{(x-\xi)^2}{16\pi(t-\tau)^3}-\frac{1}{8\pi(t-\tau)^2}\right)\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4(t-\tau)}\right),\\
v_{yy}&=\left(\frac{(y-\eta)^2}{16\pi(t-\tau)^3}-\frac{1}{8\pi(t-\tau)^2}\right)\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4(t-\tau)}\right).
\end{aligned}$$

由以上表达式, 不难验证

$$v_t-(v_{xx}+v_{yy})=0.$$

记 $T=t-\tau, X=x-\xi, Y=y-\eta$. 由 v 的表达式知, 它可以表示为 T,X,Y 的函数

$$v=\frac{1}{4\pi T}\exp\left(-\frac{X^2+Y^2}{4T}\right).$$

利用求导的链式法则, 我们有

$$v_t=v_TT_t=v_T,\quad v_\tau=v_TT_\tau=-v_T,\quad v_{xx}=v_{XX}=v_{\xi\xi},\quad v_{yy}=v_{YY}=v_{\eta\eta}.$$

因此 v 关于变量 (ξ,η,τ) 满足方程

$$v_\tau+(v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta})=0.$$

3.16 若 $u_1(x,t)$, $u_2(y,t)$ 分别是定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_1}{\partial t}-\dfrac{\partial^2u_1}{\partial x^2}=0, & x\in\mathbb{R}^1,\ t>0,\\ u_1(x,0)=\varphi_1(x), & x\in\mathbb{R}^1\end{cases}$$

和

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_2}{\partial t}-\dfrac{\partial^2u_2}{\partial y^2}=0, & y\in\mathbb{R}^1,\ t>0,\\ u_2(y,0)=\varphi_2(y), & y\in\mathbb{R}^1\end{cases}$$

的解, 证明函数 $u(x,y,t)=u_1(x,t)u_2(y,t)$ 是定解问题

$$\begin{cases}u_t-(u_{xx}+u_{yy})=0, & (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ t>0,\\ u(x,y,0)=\varphi_1(x)\varphi_2(y), & (x,y)\in\mathbb{R}^2\end{cases}$$

的解.

证明 显然有 $u(x,y,0)=u_1(x,0)u_2(y,0)=\varphi_1(x)\varphi_2(y)$, 并且

$$u_t=\frac{\partial u_1}{\partial t}u_2+u_1\frac{\partial u_2}{\partial t},\quad u_{xx}=\frac{\partial^2u_1}{\partial x^2}u_2,\quad u_{yy}=u_1\frac{\partial^2u_2}{\partial y^2}.$$

故

$$u_t - (u_{xx} + u_{yy}) = u_1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) + u_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right) = 0.$$

3.17 导出热传导方程初值问题

$$\begin{cases} u_t - (u_{xx} + u_{yy}) = 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ t > 0, \\ u(x, y, 0) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\beta_i(y), & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

解的表达式.

解 我们已经知道, 齐次初值问题

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}^1,\ t > 0, \\ v(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^1 \end{cases}$$

解的表达式为

$$v(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}^1} \exp\left(-\frac{(x - \xi)^2}{4t} \right) \varphi(\xi) \mathrm{d}\xi.$$

利用 3.16 题的结论知, 初值问题

$$\begin{cases} w_t - (w_{xx} + w_{yy}) = 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ t > 0, \\ w(x, y, 0) = \alpha(x)\beta(y), & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

解的表达式为

$$w(x, y, t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{4t} \right) \alpha(\xi)\beta(\eta) \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta.$$

由叠加原理知本题解的表达式为

$$u(x, y, t) = \frac{1}{4\pi t} \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{4t} \right) \alpha_i(\xi)\beta_i(\eta) \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta.$$

第四章　波动方程

§4.1　内容提要

一维弦振动方程

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), & x \in \mathbb{R}^1,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^1 \end{cases}$$

的求解公式是

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau.$$

当 $f \equiv 0$ 时, 该公式就是一维齐次弦振动方程的 D′Alembert 公式.

三维波动方程初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x,t), & x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

的求解公式是

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{S}_0^{at}} \frac{\varphi(x+\xi)}{t}\,\mathrm{d}S_\xi + \int_{\mathbb{S}_0^{at}} \frac{\psi(x+\xi)}{t}\,\mathrm{d}S_\xi\right) + \frac{1}{4\pi a^2}\int_{r \le at} \frac{f(x+\xi, t-r/a)}{r}\,\mathrm{d}V,$$

利用球坐标, 该式又可以写成

$$\begin{aligned} u(x,t) \;=\; & \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} t\varphi(x_1 + at\sin\theta\cos\phi,\, x_2 + at\sin\theta\sin\phi,\, x_3 + at\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \\ & + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} t\psi(x_1 + at\sin\theta\cos\phi,\, x_2 + at\sin\theta\sin\phi,\, x_3 + at\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \\ & + \frac{1}{4\pi a^2}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f\big(x_1 + r\sin\theta\cos\phi,\, x_2 + r\sin\theta\sin\phi,\, x_3 + r\cos\theta,\, t - \frac{r}{a}\big) r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r. \end{aligned}$$

当 $f \equiv 0$ 时, 称该求解公式为齐次方程的 Poisson 公式或 Kirchhoff 公式.

二维波动方程初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x,t), & x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

的求解公式是

$$\begin{aligned} u(x_1,x_2,t) \;=\; & \frac{1}{2\pi a}\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_{\sum_0^{at}} \frac{\varphi(x_1+\xi_1, x_2+\xi_2)}{\sqrt{a^2t^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}}\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2 + \int_{\sum_0^{at}} \frac{\psi(x_1+\xi_1, x_2+\xi_2)}{\sqrt{a^2t^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}}\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2\right) \\ & + \frac{1}{2\pi a^2}\int_0^{at}\int_{\sum_0^r} \frac{f(x_1+\xi_1, x_2+\xi_2, t - r/a)}{\sqrt{r^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}}\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2\,\mathrm{d}r, \end{aligned}$$

这里,$\sum_0^{at}$ 是 ξ_1—ξ_2 平面上以 0 为圆心、以 at 为半径的圆面, $\sum_P^{at}$ 是 ξ_1—ξ_2 平面上以 $P(x_1,x_2)$ 为圆心、

以 at 为半径的圆面. 利用极坐标, 上式又可以写成

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = & \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(x_1+\rho\cos\theta,\ x_2+\rho\sin\theta)}{\sqrt{a^2t^2-\rho^2}}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho \\
& +\frac{1}{2\pi a}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{\psi(x_1+\rho\cos\theta,\ x_2+\rho\sin\theta)}{\sqrt{a^2t^2-\rho^2}}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho \\
& +\frac{1}{2\pi a^2}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\int_0^{r}\frac{f(x_1+\rho\cos\theta,x_2+\rho\sin\theta,t-r/a)}{\sqrt{r^2-\rho^2}}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r.
\end{aligned}
$$

当 $f\equiv 0$ 时, 称该求解公式为齐次方程的 Poisson 公式.

§4.2 习题解答

4.1 利用 D′Alembert 公式解下列初值问题:

(1) $\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}, & x\in\mathbb{R}^1,\ t>0, \\ u(x,0)=\sin x,\ u_t(x,0)=x^2, & x\in\mathbb{R}^1; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}, & x\in\mathbb{R}^1,\ t>0, \\ u(x,0)=x^2,\ u_t(x,0)=x, & x\in\mathbb{R}^1; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, & x\in\mathbb{R}^1,\ t>0, \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=\dfrac{1}{1+x^2}, & x\in\mathbb{R}^1. \end{cases}$

解 直接利用 D′Alembert 公式可得

(1) $u(x,t)=\dfrac{1}{2}[\sin(x+t)+\sin(x-t)]+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-t}^{x+t}\xi^2\,\mathrm{d}\xi=\sin x\cos t+x^2t+\dfrac{1}{3}t^3;$

(2) $u(x,t)=\dfrac{1}{2}[(x+at)^2+(x-at)^2]+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\xi\,\mathrm{d}\xi=x^2+xt+a^2t^2;$

(3) $u(x,t)=\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\dfrac{1}{1+\xi^2}\,\mathrm{d}\xi=\dfrac{1}{2a}[\arctan(x+at)-\arctan(x-at)].$

4.2 求解下列非齐次方程的初值问题:

(1) $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=x+t, & x\in\mathbb{R}^1,\ t>0, \\ u(x,0)=1+x^2,\ u_t(x,0)=\sin x, & x\in\mathbb{R}^1; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=t\sin x, & x\in\mathbb{R}^1,\ t>0, \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=\sin x, & x\in\mathbb{R}^1. \end{cases}$

解 直接利用公式得

$$
\begin{aligned}
(1)\quad u(x,t) &= \frac{1}{2}[1+(x+t)^2+1+(x-t)^2]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\sin\xi\,\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}(\xi+\tau)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau \\
&= 1+x^2+t^2+\tfrac{1}{2}xt^2+\tfrac{1}{6}t^3+\sin x\sin t; \\
(2)\quad u(x,t) &= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\sin\xi\,\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}\tau\sin\xi\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau \\
&= \sin x\sin t+(t-\sin t)\sin x=t\sin x.
\end{aligned}
$$

4.3 当初值 $u(x,0)=\varphi(x)$, $u_t(x,0)=\psi(x)$ 满足什么条件时, 齐次波动方程的初值问题仅由右传播波组成?

解 方法一: 直接从 D′Alembert 公式入手. 记 $\Psi(x)$ 为 $\psi(x)$ 的一次积分, 由公式得

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\\ &= \frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}[\Psi(x+at)-\Psi(x-at)].\end{aligned}$$

要使之仅由右传播波组成, 应成立

$$\frac{1}{2}\varphi(x+at)+\frac{1}{2a}\Psi(x+at)=C,\quad \text{或}\quad a\varphi(x)+\Psi(x)=C.$$

两边对 x 求导得 $\psi(x)=-a\varphi'(x)$. 这就是问题所要满足的条件.

方法二：要使初值问题的解仅由右传播波组成, 可令 $u(x,t)=f(x-at)$. 利用初值条件得

$$\varphi(x)=f(x),\quad \psi(x)=-af'(x).$$

由此推出 $\psi(x)=-a\varphi'(x)$.

4.4 在上半平面 $\{(x,t):x\in\mathbb{R}^1,t>0\}$ 上给出一点 $M=(2,5)$, 对于弦振动方程 $u_{tt}=u_{xx}$ 来说, 点 M 的依赖区间是什么? 点 M 是否落在点 $(1,0)$ 的影响区域内?

解 点 M 的依赖区间是 $[2-5,2+5]=[-3,7]$. 点 $(1,0)$ 的影响区域是: $\{(x,t):\ 1-t\le x\le 1+t,\ t>0\}$, 容易验证点 M 落在点 $(1,0)$ 的影响区域内.

4.5 求解下列初值问题：

(1) $\begin{cases}u_{tt}-a^2(u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+u_{x_3x_3})=0, & (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3,\ t>0,\\ u|_{t=0}=x_1^3+x_2^2x_3,\quad u_t|_{t=0}=0, & (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}u_{tt}-8(u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+u_{x_3x_3})=t^2x_1^2, & (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3,\ t>0,\\ u|_{t=0}=x_2^2,\quad u_t|_{t=0}=x_3^2, & (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}u_{tt}-2(u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2})=0, & (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,\ t>0,\\ u|_{t=0}=2x_1^2-x_2^2,\quad u_t|_{t=0}=2x_1^2+x_2^2, & (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2;\end{cases}$

(4) $\begin{cases}u_{tt}-(u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2})=t\sin x_2, & (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,\ t>0,\\ u|_{t=0}=x_1^2,\quad u_t|_{t=0}=\sin x_2, & (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2.\end{cases}$

解 (1) 方法一: 直接代入三维波动方程 Poisson 公式的球坐标形式得

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}t[(x_1+at\sin\theta\cos\phi)^3+(x_2+at\sin\theta\sin\phi)^2(x_3+at\cos\theta)]\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\\ &= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}[t(4\pi x_1^3+4\pi a^2t^2x_1+4\pi x_2^2x_3+\frac{4}{3}\pi a^2t^2x_3)]\\ &= x_1^3+3a^2t^2x_1+x_2^2x_3+a^2t^2x_3.\end{aligned}$$

方法二: 利用第三章中的幂级数求解公式 (**??**) 得

$$u(x,t)=x_1^3+x_2^2x_3+\frac{a^2t^2}{2}(6x_1+2x_3)=x_1^3+3a^2t^2x_1+x_2^2x_3+a^2t^2x_3.$$

(2) 方法一: 记 $a^2=8$, 由三维非齐次波动方程求解公式的球坐标形式得

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} t(x_2+at\sin\theta\sin\phi)^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi+\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} t(x_3+at\cos\theta)^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \\ &\quad +\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(x_1+at\sin\theta\cos\phi)^2(t-r/a)^2 r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r \\ &= x_2^2+8t^2+tx_3^2+\tfrac{8}{3}t^3+\tfrac{1}{12}t^4x_1^2+\tfrac{2}{45}t^6. \end{aligned}$$

方法二: 利用降维法. 令 $u(x_1,x_2,x_3,t)=u_1(x_1,t)+u_2(x_2,t)+u_3(x_3,t)$, 由叠加原理知, 原问题可分解为下面三个定解问题:

$$\begin{cases} u_{1,tt}-a^2u_{1,x_1x_1}=t^2x_1^2, & x_1\in\mathbb{R}^1,\ t>0, \\ u_1(x_1,0)=0,\ u_{1,t}(x_1,0)=0, & x_1\in\mathbb{R}^1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{2,tt}-a^2u_{2,x_2x_2}=0, & x_2\in\mathbb{R}^1,\ t>0, \\ u_2(x_2,0)=x_2^2,\ u_{2,t}(x_2,0)=0, & x_2\in\mathbb{R}^1, \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} u_{3,tt}-a^2u_{3,x_3x_3}=0, & x_3\in\mathbb{R}^1,\ t>0, \\ u_3(x_3,0)=0,\ u_{3,t}(x_3,0)=x_3^2, & x_3\in\mathbb{R}^1. \end{cases}$$

直接利用 D′Alembert 公式, 得

$$\begin{aligned} u_1(x_1,t) &= \frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x_1-a(t-\tau)}^{x_1+a(t-\tau)}\tau^2\xi^2\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau=\frac{1}{12}t^4x_1^2+\frac{2}{45}t^6, \\ u_2(x_2,t) &= \frac{1}{2}[(x_2+at)^2+(x_2-at)^2]=x_2^2+8t^2, \\ u_3(x_3,t) &= \frac{1}{2a}\int_{x_3-at}^{x_3+at}\xi^2\,\mathrm{d}\xi=tx_3^2+\frac{8}{3}t^3. \end{aligned}$$

最终得到原问题的解

$$u(x_1,x_2,x_3,t)=x_2^2+8t^2+tx_3^2+\frac{8}{3}t^3+\frac{1}{12}t^4x_1^2+\frac{2}{45}t^6.$$

方法三: 直接利用波动方程的级数求解公式 (??), 得

$$\begin{aligned} u(x,t) &= x_2^2+a^2t^2+tx_3^2+a^2t^3/3+x_1^2\int_0^t(t-\tau)\tau^2\,\mathrm{d}\tau+\frac{a^2}{3}\int_0^t(t-\tau)^3\tau^2\,\mathrm{d}\tau \\ &= x_2^2+8t^2+tx_3^2+\frac{8}{3}t^3+\frac{1}{12}t^4x_1^2+\frac{2}{45}t^6. \end{aligned}$$

(3) 方法一: 令 $a^2=2$, 由二维波动方程 Poisson 公式的极坐标形式, 得

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{2(x_1+\rho\cos\theta)^2-(x_2+\rho\sin\theta)^2}{\sqrt{a^2t^2-\rho^2}}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho \\ &\quad +\frac{1}{2\pi a}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{2(x_1+\rho\cos\theta)^2+(x_2+\rho\sin\theta)^2}{\sqrt{a^2t^2-\rho^2}}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho \\ &= \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{at}\frac{4\pi x_1^2-2\pi x_2^2+\pi\rho^2}{\sqrt{a^2t^2-\rho^2}}\rho\,\mathrm{d}\rho+\frac{1}{2\pi a}\int_0^{at}\frac{4\pi x_1^2+2\pi x_2^2+3\pi\rho^2}{\sqrt{a^2t^2-\rho^2}}\rho\,\mathrm{d}\rho \\ &= \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\Big[2\pi at(2x_1^2-x_2^2)+\frac{2\pi}{3}a^3t^3\Big]+\frac{1}{2\pi a}[2\pi at(2x_1^2+x_2^2)+2\pi a^3t^3] \\ &= 2x_1^2-x_2^2+a^2t^2+(2x_1^2+x_2^2)t+a^2t^3 \\ &= 2x_1^2-x_2^2+(2x_1^2+x_2^2)t+2t^2(1+t). \end{aligned}$$

方法二: 直接利用波动方程的级数求解公式 (??), 得

$$u(x,t)=2x_1^2-x_2^2+2t^2+t(2x_1^2+x_2^2)+2t^3.$$

(4) 令 $u(x_1,x_2,t)=u_1(x_1,t)+u_2(x_2,t)$. 由叠加原理知, 原问题可分解为下面的两个定解问题

$$\begin{cases} u_{1,tt}-u_{1,x_1x_1}=0, & x_1\in\mathbb{R}^1,\ t>0,\\ u_1(x_1,0)=x_1^2,\ u_{1,t}(x_1,0)=0, & x_1\in\mathbb{R}^1,\end{cases}$$

和

$$\begin{cases} u_{2,tt}-u_{2,x_2x_2}=t\sin x_2, & x_2\in\mathbb{R}^1,\ t>0,\\ u_2(x_2,0)=x_2^2,\ u_{2,t}(x_2,0)=\sin x_2, & x_2\in\mathbb{R}^1.\end{cases}$$

利用 D′Alembert 公式知

$$\begin{aligned} u_1(x_1,t)&=\frac{1}{2}[(x_1-t)^2+(x_1+t)^2]=x_1^2+t^2,\\ u_2(x_2,t)&=\frac{1}{2}\int_{x_2-t}^{x_2+t}\sin\xi\,\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x_2-(t-\tau)}^{x_2+(t-\tau)}\tau\sin\xi\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau=t\sin x_2.\end{aligned}$$

最后得原问题的解

$$u(x_1,x_2,t)=u_1(x_1,t)+u_2(x_2,t)=x_1^2+t^2+t\sin x_2.$$

4.6 试用降维法导出弦振动方程的 D′Alembert 公式.

解 方法一. 我们知道, 三维波动方程的 Poisson 公式是

$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{S}_x^{at}}\frac{\varphi(\xi)}{t}\,\mathrm{d}S_\xi+\int_{\mathbb{S}_x^{at}}\frac{\psi(\xi)}{t}\,\mathrm{d}S_\xi\right).$$

不妨认为 φ 和 ψ 都只与 x_1 有关, 记为 $\varphi(x_1),\psi(x_1)$. 球面 $\mathbb{S}_x^{at}$ 被平面 $x_1=\xi_1$ 和 $x_1=\xi_1+\mathrm{d}\xi_1$ 所截的球带面积元为

$$\mathrm{d}S_\xi=2\pi at\,\mathrm{d}\xi_1,\quad \text{或}\quad \frac{\mathrm{d}S_\xi}{t}=2\pi a\,\mathrm{d}\xi_1.$$

由此得一维形式的 D′Alembert 公式

$$\begin{aligned} u(x_1,t)&=\frac{1}{2a}\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_{x_1-at}^{x_1+at}\varphi(\xi_1)\mathrm{d}\xi_1+\int_{x_1-at}^{x_1+at}\psi(\xi_1)\mathrm{d}\xi_1\right)\\ &=\frac{1}{2}[\varphi(x_1+at)+\varphi(x_1-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x_1-at}^{x_1+at}\psi(\xi_1)\mathrm{d}\xi_1.\end{aligned}$$

方法二. 直接利用三维波动方程 Poisson 公式的球坐标形式, 得

$$\begin{aligned} u(x_1,t)&=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}t\varphi(x_1+at\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi+\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}t\psi(x_1+at\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\\ &=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\pi}\varphi(x_1+at\cos\theta)t\sin\theta\,\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\psi(x_1+at\cos\theta)t\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\\ &=\frac{1}{2a}\frac{\partial}{\partial t}\int_{x_1-at}^{x_1+at}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2a}\int_{x_1-at}^{x_1+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\\ &=\frac{1}{2}[\varphi(x_1+at)+\varphi(x_1-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x_1-at}^{x_1+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

4.7 求二维波动方程

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2(u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2})=0, & (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,\ t>0, \\ u|_{t=0}=\varphi(r),\ u_t|_{t=0}=\psi(r), & r=\sqrt{x_1^2+x_2^2} \end{cases}$$

的轴对称解 $u=u(r,t)$.

解 二维波动方程 Poisson 公式的极坐标形式为

$$\begin{aligned} u(x_1,x_2,t) &= \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(x_1+\rho\cos\theta,\ x_2+\rho\sin\theta)}{\sqrt{a^2t^2-\rho^2}}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho \\ &\quad+\frac{1}{2\pi a}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{\psi(x_1+\rho\cos\theta,\ x_2+\rho\sin\theta)}{\sqrt{a^2t^2-\rho^2}}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho. \end{aligned}$$

当解为轴对称解时,$u(r,t)=u(x_1,x_2,t)=u(r,0,t)$. 于是

$$\begin{aligned} u(r,t) &= \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(r+\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)}{\sqrt{a^2t^2-\rho^2}}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho+\frac{1}{2\pi a}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{\psi(r+\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)}{\sqrt{a^2t^2-\rho^2}}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho \\ &= \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(\sqrt{r^2+\rho^2+2r\rho\cos\theta})}{\sqrt{a^2t^2-\rho^2}}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho+\frac{1}{2\pi a}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\frac{\psi(\sqrt{r^2+\rho^2+2r\rho\cos\theta})}{\sqrt{a^2t^2-\rho^2}}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho. \end{aligned}$$

4.8 求解初值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2(u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2})=c^2u, & (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2, \quad t>0, \\ u|_{t=0}=\varphi(x_1,x_2),\ u_t|_{t=0}=\psi(x_1,x_2), & (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2, \end{cases}$$

其中 c 为常数.

解 令 $v(x_1,x_2,x_3,t)=\mathrm{e}^{cx_3/a}u(x_1,x_2,t)$, 则 v 满足定解问题

$$\begin{cases} v_{tt}-a^2(v_{x_1x_1}+v_{x_2x_2}+v_{x_3x_3})=0, & (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3, \quad t>0, \\ v|_{t=0}=\mathrm{e}^{cx_3/a}\varphi(x_1,x_2),\ v_t|_{t=0}=\mathrm{e}^{cx_3/a}\psi(x_1,x_2), & (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3. \end{cases}$$

由三维波动方程的 Poisson 公式得

$$\begin{aligned} v(x_1,x_2,x_3,t) &= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} t\mathrm{e}^{c(x_3+at\cos\theta)/a}\varphi(x_1+at\sin\theta\cos\phi,\ x_2+at\sin\theta\sin\phi)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \\ &\quad+\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} t\mathrm{e}^{c(x_3+at\cos\theta)/a}\psi(x_1+at\sin\theta\cos\phi,\ x_2+at\sin\theta\sin\phi)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} u(x_1,x_2,t) &= \mathrm{e}^{-cx_3/a}v(x_1,x_2,x_3,t) \\ &= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} t\mathrm{e}^{ct\cos\theta}\varphi(x_1+at\sin\theta\cos\phi,\ x_2+at\sin\theta\sin\phi)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \\ &\quad+\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} t\mathrm{e}^{ct\cos\theta}\psi(x_1+at\sin\theta\cos\phi,\ x_2+at\sin\theta\sin\phi)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi. \end{aligned}$$

4.9 若 $u=u(x_1,x_2,x_3,t)$ 是波动方程的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2(u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+u_{x_3x_3})=0, & (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3,\ t>0, \\ u|_{t=0}=f(x_1)+g(x_2), & (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3, \\ u_t|_{t=0}=\varphi(x_2)+\psi(x_3), & (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \end{cases}$$

的解, 试求解的表达式.

解 令 $u(x_1,x_2,x_3,t)=u_1(x_1,t)+u_2(x_2,t)+u_3(x_3,t)$, 由叠加原理知, 原问题可分解为下面三个定解问题

$$\begin{cases} u_{1,tt}-a^2u_{1,x_1x_1}=0, & x_1\in\mathbb{R}^1,\ t>0, \\ u_1(x_1,0)=f(x_1),\ u_{1,t}(x_1,0)=0, & x_1\in\mathbb{R}^1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{2,tt}-a^2u_{2,x_2x_2}=0, & x_2\in\mathbb{R}^1,\ t>0, \\ u_2(x_2,0)=g(x_2),\ u_{2,t}(x_2,0)=\varphi(x_2), & x_2\in\mathbb{R}^1, \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} u_{3,tt}-a^2u_{3,x_3x_3}=0, & x_3\in\mathbb{R}^1,\ t>0, \\ u_3(x_3,0)=0,\ u_{3,t}(x_3,0)=\psi(x_3), & x_3\in\mathbb{R}^1. \end{cases}$$

利用 D′Alembert 公式得

$$\begin{aligned} u_1(x_1,t)&=\frac{1}{2}[f(x_1+at)+f(x_1-at)], \\ u_2(x_2,t)&=\frac{1}{2}[g(x_2+at)+g(x_2-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x_2-at}^{x_2+at}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi, \\ u_3(x_3,t)&=\frac{1}{2a}\int_{x_3-at}^{x_3+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

于是得原问题的解

$$\begin{aligned} u(x_1,x_2,x_3,t)\ =\ &\frac{1}{2}[f(x_1+at)+f(x_1-at)+g(x_2+at)+g(x_2-at)] \\ &+\frac{1}{2a}\left(\int_{x_2-at}^{x_2+at}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi+\int_{x_3-at}^{x_3+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\right). \end{aligned}$$

4.10 设 Ω 是正方形 $\{\ |x_1|\le 1,\ |x_2|\le 1\}$, $u(x,t)$ 是初值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-4\Delta u=0, & x\in\mathbb{R}^2,\ t>0, \\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x), & x\in\mathbb{R}^2 \end{cases}$$

的解, 其中 $\varphi(x),\ \psi(x)=\begin{cases} 0, & x\in\Omega, \\ \text{正值}, & x\in\mathbb{R}^2\setminus\Omega. \end{cases}$ 试指出当 $t>0$ 时, $u(x,t)\equiv 0$ 的区域.

解 直接利用二维齐次波动方程初值问题的 Poisson 公式可以看出, 当 $t\le 1/2$ 时, 在正方形区域 $\{|x_1|\le 1-2t,\ |x_2|\le 1-2t\}$ 内 $u(x,t)\equiv 0$; 当 $t>1/2$ 时,$u(x,t)>0$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上成立.

第五章　位势方程

§5.1　内容提要

第一 Green 公式:

$$\int_\Omega v\Delta u\,\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\,\mathrm{d}S-\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x.$$

第二 Green 公式:

$$\int_\Omega(u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\Big(u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}-v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\Big)\mathrm{d}S.$$

如果 $u\in C^1(\bar\Omega)\cap C^2(\Omega)$, 则

$$u(x)=-\int_\Omega\Gamma(x,\xi)\Delta u(\xi)\mathrm{d}\xi+\int_{\partial\Omega}\Gamma(x,\xi)\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\,\mathrm{d}S_\xi-\int_{\partial\Omega}u\frac{\partial\Gamma(x,\xi)}{\partial\vec{n}}\,\mathrm{d}S_\xi,\quad x\in\Omega,$$

上式右端的第一项称为体位势, 第二项称为单层位势, 第三项称为双层位势. 这里 $\Gamma(x,\xi)=\Gamma(|x-\xi|)$,

$$\Gamma(r)=\begin{cases}\dfrac{1}{(n-2)\omega_n}r^{2-n}, & n\ge 3,\\ \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{r}, & n=2,\end{cases}$$

其中 $\omega_n=\dfrac{2}{\Gamma(n/2)}\pi^{n/2}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面的表面积,$\omega_2=2\pi$, $\omega_3=4\pi$.

调和函数的基本积分公式: 如果 $u\in C^1(\bar\Omega)\cap C^2(\Omega)$ 是 Ω 内的调和函数, 则成立

$$u(x)=\int_{\partial\Omega}\Gamma(x,\xi)\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\,\mathrm{d}S_\xi-\int_{\partial\Omega}u\frac{\partial\Gamma(x,\xi)}{\partial\vec{n}}\,\mathrm{d}S_\xi,\quad x\in\Omega.$$

调和函数的基本性质:

1. *Neumann边值问题有解的必要条件* 假设函数 $u\in C^1(\bar\Omega)\cap C^2(\Omega)$ 是非齐次方程的Neumann边值问题

$$\begin{cases}-\Delta u=f(x), & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial u}{\partial\vec{n}}=\varphi, & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

的解, 则

$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}x=-\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\,\mathrm{d}S=-\int_{\partial\Omega}\varphi\,\mathrm{d}S.$$

如果函数 $u\in C^1(\bar\Omega)$ 在 Ω 内调和, 则

$$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\,\mathrm{d}S=0.$$

2. *调和函数的平均值公式* 调和函数在其定义域 Ω 内任一点的值等于它在以该点为心且包含于 Ω 的球（球面）上的平均值:

$$u(x)=\frac{1}{|B_R(x)|}\int_{B_R(x)}u(\xi)\mathrm{d}\xi,\quad B_R(x)\subset\Omega,$$
$$u(x)=\frac{1}{|\partial B_R(x)|}\int_{\partial B_R(x)}u\,\mathrm{d}S_\xi,\quad B_R(x)\subset\Omega$$

3. *强极值原理* 设函数 u 在 Ω 内调和. 如果 u 不是常数, 则 u 在 Ω 内既达不到最大值也达不到最小值.

4. *弱极值原理* 如果函数 u 在 Ω 内调和, 则

$$\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u, \quad \max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u, \quad \max_{\bar{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|.$$

Green 函数 如果 $G(x, \xi)$ 是 Laplace 方程在区域 Ω 上的 Green 函数, 则位势方程的 Dirichlet 边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), & x \in \Omega, \\ u = \varphi(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的解可以表示为

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, \xi) f(\xi) \mathrm{d}\xi - \int_{\partial\Omega} \varphi(\xi) \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} \, \mathrm{d}S_{\xi}, \qquad x \in \Omega.$$

几种特殊区域上的 Green 函数及 Dirichlet 问题的解

1. n $(n \geq 3)$ 维空间中球域上的 Green 函数是

$$G(x,\xi) = \Gamma(|x-\xi|) - \Gamma\left(\frac{|\xi|}{R}|x-\xi^*|\right), \tag{5.1}$$
$$x \in \mathbb{R}^n, \quad \xi \in B_R, \quad x \neq \xi, \quad x \neq \xi^* = \frac{R^2}{|\xi|^2}\xi,$$

n 维球域上的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & x \in B_R, \\ u = \varphi, & x \in \partial B_R \end{cases}$$

的求解公式是

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R} \int_{\partial B_R} \frac{\varphi(\xi)}{|x-\xi|^n} \, \mathrm{d}S_{\xi}, \quad x \in B_R.$$

2. 圆域 (2 维) 上的 Green 函数是

$$G(x,\xi) = \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{|x-\xi|} - \ln\frac{R|\xi|}{||\xi|^2 x - R^2\xi|}\right), \quad x \neq \xi, \quad x \neq \xi^* = \frac{R^2}{|\xi|^2}\xi,$$

圆域上的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & x \in B_R, \\ u = \varphi, & x \in \partial B_R \end{cases}$$

的求解公式是

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)\varphi(\phi)}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\phi-\theta)} \, \mathrm{d}\phi,$$

其中,(r,θ) 是圆域 B_R 内点的极坐标,(R,ϕ) 是圆周 ∂B_R 上动点的极坐标.

3. $\mathbb{R}^n\ (n\geq 3)$ 中上半空间 $\mathbb{R}^n_+=\{x\in\mathbb{R}^n:\ x_n>0\}$ 上的 Green 函数是

$$G(x,\xi)=\Gamma(|x-\xi|)-\Gamma(|x-\xi^*|),\quad x\in\mathbb{R}^n,\ \ \xi\in\mathbb{R}^n_+,\ \ x\neq\xi,\ \ x\neq\xi^*,$$

调和方程的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}-\Delta u=0, & x\in\mathbb{R}^n_+,\\ u(x)=\varphi(x'), & x_n=0,\ \ x'\in\mathbb{R}^{n-1},\\ \lim\limits_{|x|\to\infty}u(x)=0\end{cases}$$

的求解公式是

$$u(x)=\frac{2x_n}{\omega_n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{\varphi(\xi')}{(|x'-\xi'|^2+x_n^2)^{n/2}}\,\mathrm{d}\xi',\quad x\in\mathbb{R}^n_+,$$

其中,$x=(x',x_n)$, $x'=(x_1,x_2,\dots,x_{n-1})$.

4. 上半平面的 Green 函数是

$$G(x,\xi)=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{(x_1-\xi_1)^2+(x_2+\xi_2)^2}{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2},$$

Dirichlet 问题

$$\begin{cases}-\Delta u=f(x), & x_1\in\mathbb{R}^1,\ \ x_2>0,\\ u(x)=\varphi(x_1), & x_1\in\mathbb{R}^1,\ \ x_2=0,\\ \lim\limits_{|x|\to\infty}u(x)=0\end{cases}$$

的求解公式是

$$u(x)=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}^1}\frac{x_2\varphi(\xi_1)}{(\xi_1-x_1)^2+x_2^2}\,\mathrm{d}\xi_1+\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^1}f(\xi)\ln\frac{(\xi_1-x_1)^2+(\xi_2+x_2)^2}{(\xi_1-x_1)^2+(\xi_2-x_2)^2}\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2,\quad x\in\mathbb{R}^2_+.$$

§5.2 习题解答

5.1 证明下列函数都是调和函数:

(1) xy 和 x^2-y^2;

(2) x^3-3xy^2 和 $3x^2y-y^3$;

(3) $\sinh ny\sin nx$ 和 $\sinh ny\cos nx$.

证明 (1) 令 $u_1=xy,\ u_2=x^2-y^2$. 直接计算知

$$\frac{\partial^2u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u_1}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^2u_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u_2}{\partial y^2}=0.$$

因此 u_1 和 u_2 都调和.

(2) 令 $u_1=x^3-3xy^2,\ \ u_2=3x^2y-y^3$, 则

$$\frac{\partial^2u_1}{\partial x^2}=6x,\quad \frac{\partial^2u_1}{\partial y^2}=-6x.$$

故 $\Delta u_1 = 0$, 这说明 u_1 调和. 同理可知 u_2 调和.

(3) 令 $u_1 = \sinh ny \sin nx,\ u_2 = \sinh ny \cos nx$, 则有

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = -n^2 \sinh ny \sin nx, \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = n^2 \sinh ny \sin nx.$$

故 $\Delta u_1 = 0$, 这说明 u_1 调和. 同理可知 u_2 调和.

5.2 证明 2 维 Laplace 方程在极坐标 (r,θ) 下可以写成

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial u}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

证明 在极坐标变换 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ 之下, 有

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r} &= \cos\theta\frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial u}{\partial y},\\ \frac{\partial u}{\partial \theta} &= -r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y}.\end{aligned}$$

由此解出

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \cos\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = \Big(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\Big)u,\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \sin\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = \Big(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\Big)u.\end{aligned}$$

这样就得到算子之间的恒等关系:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}.$$

因此

$$\begin{aligned}\Delta u &= \Big(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\Big)^2 u + \Big(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\Big)^2 u\\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.\end{aligned}$$

5.3 证明 3 维 Laplace 方程在球面坐标 (r,θ,ϕ) 下, 可以写成

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\Big) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0.$$

证明 首先令 $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$. 利用习题 5.2 得

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}.$$

再令 $z = r\cos\theta$, $\rho = r\sin\theta$, 就有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

类似习题 5.2, 可以求出

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \sin\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

由此得到

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r\sin\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\Big) \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\Big) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}.
\end{aligned}
$$

5.4 证明用极坐标表示的下列函数都是调和函数 $(r>0)$：

(1) $\ln r$ 和 θ;

(2) $r^n\cos n\theta$ 和 $r^n\sin n\theta$, n 为常数；

(3) $r\ln r\cos\theta - r\theta\sin\theta$ 和 $r\ln r\sin\theta + r\theta\cos\theta$.

证明 由习题 5.2 知, 只要验证

$$
\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial u}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0
$$

即可.

(1) 显然成立.

(2) 记 $u_1 = r^n\cos n\theta$, $u_2 = r^n\sin n\theta$. 则有

$$
\frac{\partial u_1}{\partial r} = nr^{n-1}\cos n\theta, \quad \frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial u_1}{\partial r}\Big) = n^2 r^{n-1}\cos n\theta, \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} = -n^2 r^n\cos n\theta,
$$

于是

$$
\Delta u_1 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial u_1}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} = 0.
$$

同理可得 $\Delta u_2 = 0$.

(3) 记 $u_1 = r\ln r\cos\theta - r\theta\sin\theta$, $u_2 = r\ln r\sin\theta + r\theta\cos\theta$, 则

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u_1}{\partial r} = \cos\theta + \ln r\cos\theta - \theta\sin\theta, \quad \frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial u_1}{\partial r}\Big) = 2\cos\theta + \ln r\cos\theta - \theta\sin\theta, \\
&\frac{\partial u_1}{\partial \theta} = -r\ln r\sin\theta - r\sin\theta - r\theta\cos\theta, \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} = -r\ln r\cos\theta - 2r\cos\theta + r\theta\sin\theta.
\end{aligned}
$$

所以

$$
\Delta u_1 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial u_1}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} = 0.
$$

同理可得 $\Delta u_2 = 0$.

5.5 试在平面上证明第一 Green 公式, 第二 Green 公式以及调和函数的基本积分公式.

证明 设 Ω 是平面上一有界光滑区域, $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$. 在 Green 公式

$$
\int_\Omega (P_{x_1} + Q_{x_2})\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} (P\cos(n,x_1) + Q\cos(n,x_2))\mathrm{d}l
$$

中, 取 $P = vu_{x_1}$, $Q = vu_{x_2}$, 上式左边为

$$
\int_\Omega v\Delta u\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla v\cdot\nabla u\,\mathrm{d}x,
$$

右边为

$$\int_{\partial\Omega} v[u_{x_1}\cos(n,x_1)+u_{x_2}\cos(n,x_2)]\mathrm{d}l=\int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\,\mathrm{d}l.$$

这样就得到第一 Green 公式:

$$\int_{\Omega} v\Delta u\,\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\,\mathrm{d}l-\int_{\Omega}\nabla v\cdot\nabla u\,\mathrm{d}x. \tag{5.2}$$

在上式中互换 u 和 v, 得

$$\int_{\Omega} u\Delta v\,\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}\,\mathrm{d}l-\int_{\Omega}\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x. \tag{5.3}$$

(5.2) 式与 (5.3) 式相减, 即得第二 Green 公式:

$$\int_{\Omega}(u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}-v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\right)\mathrm{d}l.$$

下面推导平面上的调和函数的基本积分公式. 对于给定的函数 u, 点 $\xi\in\mathbb{R}^n$ 以及常数 $\varepsilon>0$, 用 $M_\xi^\varepsilon[u]$ 表示 u 在以 ξ 为心、以 ε 为半径的球面 $\partial B_\varepsilon(\xi)$ 上的平均, 即

$$M_\xi^\varepsilon[u]=\frac{1}{|\partial B_\varepsilon(\xi)|}\int_{\partial B_\varepsilon(\xi)} u(x)\mathrm{d}S_\xi.$$

因为 $n=2$, 容易验证函数 $\Gamma(x,\xi)=\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{|x-\xi|}$ 满足 Laplace 方程, 即

$$-\Delta_x\Gamma(x,\xi)=0,\qquad x\in\Omega,\quad x\neq\xi.$$

由于函数 $\Gamma(x,\xi)$ 在 $x=\xi$ 点有奇性, 需要在 Ω 中挖去一个以 ξ 为圆心、以 ε 为半径 (ε 很小) 的圆 $B_\varepsilon(\xi)$, 该圆的圆周记为 $\partial B_\varepsilon(\xi)$. 这样, 在 $\Omega_\varepsilon\triangleq\Omega\setminus B_\varepsilon(\xi)$ 内函数 $\Gamma(x,\xi)$ 满足 $\Delta_x\Gamma=0$. 由第二 Green 公式得

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon}\left(u\frac{\partial\Gamma(x,\xi)}{\partial\vec{n}}-\Gamma(x,\xi)\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\right)\mathrm{d}l=\int_{\Omega\varepsilon}(u\Delta\Gamma(x,\xi)-\Gamma(x,\xi)\Delta u)\mathrm{d}x=0.$$

因为 $\partial\Omega_\varepsilon=\partial\Omega\cup\partial B_\varepsilon(\xi)$, 并且在 $\partial B_\varepsilon(\xi)$ 上 $\dfrac{\partial}{\partial\vec{n}}=-\dfrac{\partial}{\partial r}$, 因此

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial\Gamma(x,\xi)}{\partial\vec{n}}-\Gamma(x,\xi)\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\right)\mathrm{d}l&=\int_{\partial B_\varepsilon(\xi)}\left(u\frac{\partial\Gamma(x,\xi)}{\partial r}-\Gamma(x,\xi)\frac{\partial u}{\partial r}\right)\mathrm{d}l\\&=\int_{\partial B_\varepsilon(\xi)}\left[u\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}\right)-\left(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}\right)\frac{\partial u}{\partial r}\right]\mathrm{d}l\\&=-\frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{\partial B_\varepsilon(\xi)}u\,\mathrm{d}l+\frac{\ln\varepsilon}{2\pi}\int_{\partial B_\varepsilon(\xi)}\frac{\partial u}{\partial r}\,\mathrm{d}l\\&=-M_\xi^\varepsilon[u]+\varepsilon\ln\varepsilon M_\xi^\varepsilon\Big[\frac{\partial u}{\partial r}\Big].\end{aligned} \tag{5.4}$$

又因为 $u,\nabla u$ 在 $\bar{\Omega}$ 上连续, 所以 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}M_\xi^\varepsilon[u]=u(\xi)$, $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\varepsilon\ln\varepsilon M_\xi^\varepsilon\Big[\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big]=0$. 在 (5.4) 式中令 $\varepsilon\to0^+$, 就有

$$\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial\Gamma(x,\xi)}{\partial\vec{n}}-\Gamma(x,\xi)\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\right)\mathrm{d}l+u(\xi)=0,$$

即

$$u(\xi)=\int_{\partial\Omega}\left(\Gamma(x,\xi)\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}-u\frac{\partial\Gamma(x,\xi)}{\partial\vec{n}}\right)\mathrm{d}l.$$

这就是平面上的调和函数的基本积分公式.

5.6 设 $\Omega=\{(x,y)\mid x^2+y^2<\pi^2/4\}$, $u\in C(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ 是定解问题

$$\begin{cases}\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=0, & (x,y)\in\Omega,\\ u=\sin x, & (x,y)\in\partial\Omega\end{cases}$$

的解. 试确定 u 在 $\bar{\Omega}$ 上的最大值和最小值.

解 由弱极值原理得

$$\begin{aligned}\max_{\bar{\Omega}} u &= \max_{\partial\Omega} u=\max_{x^2+y^2=\pi^2/4}\sin x=1,\\ \min_{\bar{\Omega}} u &= \min_{\partial\Omega} u=\min_{x^2+y^2=\pi^2/4}\sin x=-1.\end{aligned}$$

5.7 利用第一 Green 公式证明三维 Laplace 方程的 Robin 问题

$$\begin{cases}u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+u_{x_3x_3}=0, & (x_1,x_2,x_3)\in\Omega,\\ \left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial\vec{n}}+\sigma u\right)\right|_{\partial\Omega}=f, & \sigma>0\ \text{是常数}\end{cases}$$

解的惟一性.

证明 只要证明 $f=0$ 对应的齐次问题只有零解即可. 在第一 Green 公式

$$\int_\Omega v\Delta u\,\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\,\mathrm{d}S-\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x$$

中令 $v=u$, 便可得到

$$\int_{\partial\Omega}u\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\,\mathrm{d}S=\int_\Omega|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x.$$

利用 $\left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial\vec{n}}+\sigma u\right)\right|_{\partial\Omega}=0$, 得

$$0\le\int_\Omega|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x=-\sigma\int_{\partial\Omega}u^2\,\mathrm{d}S\le0.$$

因 σ 是正常数, 所以有

$$\int_\Omega|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}u^2\,\mathrm{d}S=0.$$

这说明 $u\equiv$ 常数, 且在 $\partial\Omega$ 上 $u\equiv0$. 于是, 在 $\bar{\Omega}$ 上 $u\equiv0$.

5.8 若 $u(r,\theta)$ 是单位圆上的调和函数, 且 $u(1,\theta)=\cos\theta$. 求函数 u 在原点的值.

解 由调和函数的球面平均值公式得

$$u(0,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial B_1(0)}u(1,\theta)\mathrm{d}S=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=0.$$

5.9 设 B_R 是平面上以原点为圆心、R 为半径的圆域. 证明圆域上的Green函数是

$$\begin{aligned}G(x,\xi) &= \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{|x-\xi|}-\ln\frac{R}{|\xi|\cdot|x-\xi^*|}\right)\\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{|x-\xi|}-\ln\frac{R|\xi|}{||\xi|^2x-R^2\xi|}\right),\quad x\ne\xi,\quad x\ne\xi^*=\frac{R^2}{|\xi|^2}\xi.\end{aligned}$$

如果圆域内的调和函数 u 在 ∂B_R 上取值 $\varphi(\phi)$, 则圆域上的调和函数 u 的Poisson公式是

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)\varphi(\phi)}{R^2+r^2-2Rr\cos(\phi-\theta)}\,\mathrm{d}\phi,$$

其中,(r,θ) 是圆域 B_R 内点的极坐标,(R,ϕ) 是圆周 ∂B_R 上动点的极坐标.

证明 在圆域 B_R 内任取一点 ξ, 它关于圆周 ∂B_R 的反演点为 $\xi^*=\dfrac{R^2}{|\xi|^2}\xi$. 不难验证三角形 $xO\xi$ 与三角形 ξ^*Ox 相似 (见图 5.1),

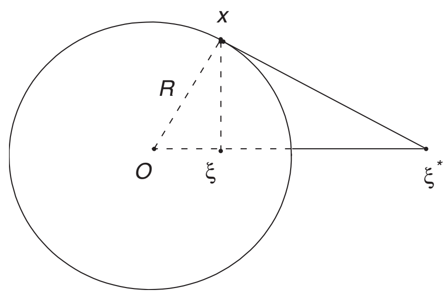

图 5.1

所以

$$\frac{|x-\xi^*|}{|x-\xi|}=\frac{R}{|\xi|},\qquad x\in\partial B_R.$$

这等价于

$$\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x-\xi|}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{R}{|\xi|\cdot|x-\xi^*|}=0,\quad x\in\partial B_R.$$

上式左端第一项为 $\Gamma(x,\xi)$, 记第二项 $\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{R}{|\xi|\cdot|x-\xi^*|}\triangleq v(x,\xi)$. 易证 $-\Delta_x v=0, x\in B_R$. 由定义知,Green 函数为

$$\begin{aligned}G(x,\xi) &= \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{|x-\xi|}-\ln\frac{R}{|\xi|\cdot|x-\xi^*|}\right)\\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{|x-\xi|}-\ln\frac{R|\xi|}{||\xi|^2x-R^2\xi|}\right).\end{aligned}$$

又当 $x\in\partial B_R$ 时

$$\left.\frac{\partial G}{\partial\vec{n}}\right|_{\partial B_R}=\sum_{i=1}^{2}G_{x_i}\frac{x_i}{R}=\sum_{i=1}^{2}\frac{x_i}{2\pi R}\left(-\frac{(x_i-\xi_i)}{|x-\xi|^2}+\frac{(x_i-\xi_i^*)}{|x-\xi^*|^2}\right)=-\frac{R^2-|\xi|^2}{2\pi R|x-\xi|^2}.$$

由此得圆域上 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}-\Delta u=0, & x\in B_R,\\ u=\varphi, & x\in\partial B_R\end{cases}$$

的解为

$$u(\xi)=-\int_{\partial B_R}\varphi(x)\frac{\partial G}{\partial\vec{n}}S_x=\frac{R^2-|\xi|^2}{2\pi R}\int_{\partial B_R}\frac{\varphi(x)}{|x-\xi|^2}\,\mathrm{d}S_x,\quad \xi\in B_R.$$

按习惯, 把上式写成

$$u(x)=\frac{R^2-|x|^2}{2\pi R}\int_{\partial B_R}\frac{\varphi(\xi)}{|x-\xi|^2}\,\mathrm{d}S_\xi,\quad x\in B_R.$$

采用极坐标, 上式又可写成

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)\varphi(\phi)}{R^2+r^2-2Rr\cos(\phi-\theta)}\,\mathrm{d}\phi.$$

5.10 求函数 u, 使其在半径为 a 的圆内调和, 在圆周 C 上分别取下列值：

(1) $u|_C=A\cos\phi$;

(2) $u|_C=A+B\sin\phi$,

其中 A, B 都是常数.

解 (1) 直接利用圆域上调和函数的 Poisson 公式, 便得

$$\begin{aligned}u(\rho,\theta)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}A\cos\phi\frac{a^2-\rho^2}{a^2+\rho^2-2a\rho\cos(\phi-\theta)}\mathrm{d}\phi\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}A\cos\phi\Big[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n\cos n(\phi-\theta)\Big]\mathrm{d}\phi\\&=\frac{A}{a}\rho\cos\theta.\end{aligned}$$

(2) 同样可得

$$\begin{aligned}u(\rho,\theta)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(A+B\sin\phi)\Big[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n\cos n(\phi-\theta)\Big]\mathrm{d}\phi\\&=A+\frac{B}{a}\rho\sin\theta.\end{aligned}$$

5.11 试用镜像法导出二维调和方程在上半平面的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}\Delta u=0, & x\in\mathbb{R}^1,\ y>0,\\ u(x,0)=f(x), & x\in\mathbb{R}^1\end{cases}$$

解的表达式, 并求出当 $f(x)$ 分别是下列函数时的解：

(1) 有界连续函数;

(2) $f(x)=\begin{cases}1, & x\in[a,b],\\ 0, & x\notin[a,b];\end{cases}$

(3) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

解 在上半平面内任取一点 (ξ,η), 在该点放置单位正电荷, 为使它产生的静电场在 x 轴上的电位为零, 需要在 (ξ,η) 关于 x 轴的对称点 $(\xi,-\eta)$ 上放置单位负电荷 (见图 5.2).

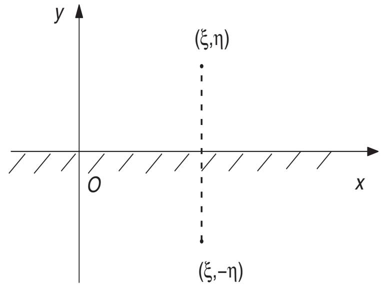

图 5.2

两电荷产生的静电场在平面上异于这两点的 (x, y) 处产生的电位是

$$G(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}.$$

容易看出,G 在 $y = 0$ 时等于零, 在 $y > 0$ 且 $(x, y) \neq (\xi, \eta)$ 时满足调和方程 $\Delta G = 0$, 这里 $\Delta = \partial_x \partial_x + \partial_y \partial_y$. 因此, 这个函数 G 就是二维调和方程在上半平面的 Green 函数.

下面推导上半平面的 Dirichlet 问题解的表达式. 因为

$$\frac{\partial G}{\partial \vec{n}}\Big|_{y=0} = -\frac{\partial G}{\partial y}\Big|_{y=0} = -\frac{\eta}{\pi} \frac{1}{(x-\xi)^2 + \eta^2},$$

所以

$$u(\xi, \eta) = -\int_{\mathbb{R}^1} f(x) \frac{\partial G}{\partial \vec{n}} \, \mathrm{d}x = \frac{\eta}{\pi} \int_{\mathbb{R}^1} \frac{f(x)}{(x-\xi)^2 + \eta^2} \, \mathrm{d}x.$$

习惯上, 我们将上式写成

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{\mathbb{R}^1} \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^2 + y^2} \, \mathrm{d}\xi. \tag{5.5}$$

(1) 当 $f(x)$ 是有界连续函数时, 其解的表达式就是 (5.5) 式.

(2) 利用 (5.5) 式, 我们有

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_a^b \frac{1}{(x-\xi)^2 + y^2} \, \mathrm{d}\xi = \frac{1}{\pi}\Big(\arctan \frac{b-x}{y} - \arctan \frac{a-x}{y} \Big).$$

(3) 利用 (5.5) 式及 Fourier 变换, 得

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \frac{y}{\pi} \int_{\mathbb{R}^1} \frac{1}{(1+\xi^2)[(\xi-x)^2 + y^2]} \, \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{y}{\pi} \frac{1}{1+x^2} * \frac{1}{x^2+y^2} \\
&= \frac{y}{\pi} \mathcal{F}^{-1} \left[\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+x^2}\right] \cdot \mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+y^2}\right] \right] \\
&= \mathcal{F}^{-1} [\pi \mathrm{e}^{-(y+1)|\lambda|}] \\
&= \frac{1+y}{x^2 + (1+y)^2}.
\end{aligned}$$

5.12 设 u 是区域 Ω 中的二次连续可微函数. 如果对于 Ω 中的任一球面 $\mathbb{S}$, 都成立

$$\int_{\mathbb{S}} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \,\mathrm{d}S = 0.$$

证明 u 是 Ω 中的调和函数.

证明 任取一个球 $B_R(x) \Subset \Omega$, 由奥高公式得

$$\int_{B_R(x)} \Delta u(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{\partial B_R(x)} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \,\mathrm{d}S_\xi = 0. \tag{5.6}$$

因为 $u \in C^2(\Omega)$, 故有 $\Delta u \in C(\Omega)$. 由连续函数的性质知, 对任意 $x \in \Omega$, 有

$$\Delta u(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{|B_\varepsilon(x)|} \int_{B_\varepsilon(x)} \Delta u(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

又由 (5.6) 式可知, 当 $\varepsilon < \operatorname{dist}\{x, \partial\Omega\}$ 时, $\displaystyle\int_{B_\varepsilon(x)} \Delta u(\xi)\mathrm{d}\xi = 0$, 所以 $\Delta u(x) \equiv 0$. 由 x 的任意性就可以推出结论.

5.13 证明第二边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < r < R, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = \varphi(\theta) \end{cases}$$

的解, 当 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\mathrm{d}\theta = 0$ 时可以写成

$$u(r,\theta) = -\frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\beta)\ln(R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\beta - \theta))\mathrm{d}\beta + C,$$

其中 C 为任意常数.

证明 定解问题化为极坐标形式

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\Big(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, & 0 < r < R,\ 0 < \theta < 2\pi, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = \varphi(\theta), & 0 \le \theta < 2\pi, \\ u(r,\theta) = u(r, 2\pi + \theta),\ |u(0,\theta)| < \infty, & 0 \le r \le R,\ 0 \le \theta < 2\pi. \end{cases}$$

令 $u(r,\theta) = T(r)\Phi(\theta)$, 代入方程并分离变量

$$\frac{r^2T'' + rT'}{r} = -\frac{\Phi''}{\Phi}.$$

设这个比值为常数 λ, 这样就得到两个常微分方程的定解问题

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0, \\ \Phi(\theta) = \Phi(2\pi + \theta) \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} r^2T'' + rT' - \lambda T = 0, \quad 0 < r < R, \\ |T(0)| < \infty. \end{cases}$$

先解第一个定解问题. 由周期边界条件知, 其特征值为 $\lambda_n = n^2,\ n = 0,1,2,\cdots$, 特征函数为

$$\Phi_0(\theta) = a_0,\quad \Phi_n(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta,\ n = 1,\ 2,\ \cdots.$$

将 $\lambda_n = n^2$ 代入 T 的方程, 得到满足 $|T(0)| < \infty$ 的通解

$$T_n(r) = C_n r^n,\ n = 0,1,2,\cdots.$$

叠加, 得

$$u(r,\theta) = C + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) r^n.$$

利用 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = \varphi(\theta)$ 确定出系数

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{n\pi R^{n-1}} \int_0^{2\pi} \varphi(\beta) \cos n\beta \,\mathrm{d}\beta, \\
B_n &= \frac{1}{n\pi R^{n-1}} \int_0^{2\pi} \varphi(\beta) \sin n\beta \,\mathrm{d}\beta.
\end{aligned}$$

由此得

$$\begin{aligned}
u(r,\theta) &= C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n\pi R^{n-1}} \int_0^{2\pi} \varphi(\beta) \cos n(\beta-\theta) \mathrm{d}\beta \\
&= C + \frac{R}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\beta) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\beta-\theta) \right) \mathrm{d}\beta.
\end{aligned}$$

利用恒等式 (证明见附注)

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} \cos n\theta = -\ln(1 - 2r\cos\theta + r^2),\ 0 \le r < 1$$

及 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi(\theta) \mathrm{d}\theta = 0$, 得原问题的解为

$$\begin{aligned}
u(r,\theta) &= C - \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\beta) \ln\left[1 - \frac{2r}{R}\cos(\beta-\theta) + \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \mathrm{d}\beta \\
&= C - \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\beta) \ln(R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\beta-\theta)) \mathrm{d}\beta.
\end{aligned}$$

注 当 $|\rho| < 1$ 时, 下面的等式成立:

$$\begin{aligned}
2\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos n\theta &= \sum_{n=1}^{\infty} (\rho^n \mathrm{e}^{in\theta} + \rho^n \mathrm{e}^{-in\theta}) \\
&= \frac{\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1 - \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} + \frac{\rho \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{1 - \rho \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}} \\
&= -\frac{2\rho^2 - 2\rho\cos\theta}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos\theta}.
\end{aligned}$$

上式两边除以 ρ, 得

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \rho^{n-1} \cos n\theta = -\frac{2\rho - 2\cos\theta}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos\theta}.$$

上式两边对 ρ 从 0 到 $r\,(|r|<1)$ 上积分, 得

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n}\cos n\theta=-\ln(1-2r\cos\theta+r^2).$$

5.14 设 $u(x)$ 在以原点为圆心、R 为半径的圆 B_R 内调和, 在 $\bar{B}_R$ 上连续. 记 $M=\displaystyle\int_{B_R}u^2\,\mathrm{d}x$. 试证明:

(1) $|u(0)|\le \dfrac{1}{R}\left(\dfrac{M}{\pi}\right)^{1/2}$;

(2) $|u(x)|\le \dfrac{1}{R-|x|}\left(\dfrac{M}{\pi}\right)^{1/2},\quad \forall\, x\in B_R$.

证明 (1) 由调和函数的球平均值公式知

$$u(0)=\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}u\,\mathrm{d}x.$$

再利用 Cauchy 不等式知

$$u^2(0)=\frac{1}{|B_R|^2}\left(\int_{B_R}u\,\mathrm{d}x\right)^2\le\frac{1}{|B_R|^2}\int_{B_R}u^2\,\mathrm{d}x\int_{B_R}\mathrm{d}x=\frac{M}{|B_R|}.$$

因此

$$|u(0)|\le\left(\frac{M}{|B_R|}\right)^{1/2}=\frac{1}{R}\left(\frac{M}{\pi}\right)^{1/2}.$$

(2) 对于任意的 $x\in B_R$, 记 $B_{R-|x|}(x)$ 是以 x 为圆心,$R-|x|$ 为半径的圆. 利用调和函数的球平均值公式及 Cauchy 不等式, 我们可以得到

$$\begin{aligned}u^2(x)&=\frac{1}{|B_{R-|x|}(x)|^2}\left(\int_{B_{R-|x|}(x)}u\,\mathrm{d}x\right)^2\\&\le\frac{1}{|B_{R-|x|}(x)|^2}\int_{B_{R-|x|}(x)}u^2\,\mathrm{d}x\int_{B_{R-|x|}(x)}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{|B_{R-|x|}(x)|}\int_{B_{R-|x|}(x)}u^2\,\mathrm{d}x\le\frac{M}{|B_{R-|x|}(x)|}.\end{aligned}$$

故有

$$|u(x)|\le\left(\frac{M}{|B_{R-|x|}(x)|}\right)^{1/2}=\frac{1}{R-|x|}\left(\frac{M}{\pi}\right)^{1/2}.$$

5.15 设 $u(\rho,\theta)$ 是圆 B_R 外的有界调和函数, 令 $v(r,\theta)=u\left(\dfrac{R^2}{r},\theta\right)$. 证明 $v(r,\theta)$ 是圆 B_R 内的调和函数, 并由此求解第一类外部边值问题

$$\begin{cases}\Delta u=0, & x\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{B}_R,\\ u=\varphi(\theta), & x\in\partial B_R,\\ u\text{有界}.\end{cases}$$

证明 因为 $u(\rho,\theta)$ 是圆 B_R 外的有界调和函数, 故有

$$\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}=0,\ \rho>R.$$

记 $\dfrac{R^2}{r}=\rho$, 则 $v(r,\theta)=u(\rho,\theta),\quad 0<r<R,\ \rho>R$. 直接计算知

$$\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{R^2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \rho},\quad \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}=\frac{2R^2}{r^3}\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{R^4}{r^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2},\quad \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2},$$

所以

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}=\frac{R^4}{r^4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right)=0.$$

这说明 $v(r,\theta)$ 是圆 B_R 内的调和函数.

下面求解第一类外部边值问题. 把它写成极坐标形式:

$$\begin{cases}\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \rho}+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0, & \rho>R,\quad 0\le\theta<2\pi,\\ u(R,\theta)=\varphi(\theta),\ |u(0,\,\theta)|<\infty, & 0\le\theta<2\pi,\\ u(\rho,\theta)=u(\rho,\theta+2\pi), & \rho\ge R,\quad 0\le\theta<2\pi.\end{cases}$$

在变换 $\dfrac{R^2}{r}=\rho$ 之下, 上述问题转化为 $v(r,\theta)$ 的定解问题

$$\begin{cases}\Delta v=\dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}=0, & 0<r<R,\quad 0\le\theta<2\pi,\\ v(R,\theta)=\varphi(\theta),\ |v(0,\,\theta)|<\infty, & 0\le\theta<2\pi,\\ v(r,\theta)=v(r,\theta+2\pi), & 0\le r\le R,\quad 0\le\theta<2\pi.\end{cases}$$

利用 Poisson 公式知, 该问题的解为

$$v(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)\varphi(\phi)}{R^2+r^2-2Rr\cos(\phi-\theta)}\,\mathrm{d}\phi.$$

因此第一类外部边值问题的解为

$$u(\rho,\theta)=v\Big(\frac{R^2}{\rho},\theta\Big)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(\rho^2-R^2)\varphi(\phi)}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\phi-\theta)}\,\mathrm{d}\phi.$$

5.16 判断以下问题是否有解, 若有解, 求出解来.

(1) $\begin{cases}\Delta u=1, & r<1,\\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}=0, & r=1;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\Delta u=1, & r<1,\\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}=\dfrac{1}{3}, & r=1,\end{cases}$

其中 $r=|x|$, $x\in\mathbb{R}^3$.

解 (1) 若 u 是非齐次边值问题的解, 则必然有

$$\int_\Omega \Delta u\,\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}S.$$

而本题中 $\displaystyle\int_\Omega \Delta u\,\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi$, $\displaystyle\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}S=0$. 故无解.

(2) 问题有解. 事实上, 取 $u_0 = \dfrac{1}{6}(x^2+y^2+z^2)$, 不难验证它满足方程. 又因 Laplace 方程的 Neumann 边值问题属于 $C^1(\bar{\Omega})\bigcap C^2(\Omega)$ 的解至多相差一个常数, 故其解可以写成

$$u = \frac{1}{6}(x^2+y^2+z^2)+C.$$

我们把一般的求解过程留在附注中.

注 这里, 我们推导 $n\ (\geq 3)$ 维Poisson方程轴对称解 $u=u(r)$ 的基本形式, 并给出Neumann边值问题有解的相容性条件和在此条件下的解. 设 u 满足方程

$$\Delta u = \frac{1}{r^{n-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big(r^{n-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\Big) = f(r), \quad 0<r<R,$$

则成立

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\Big(r^{n-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\Big) = r^{n-1}f(r), \quad 0<r<R.$$

两边积分得

$$r^{n-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = \int_0^r \rho^{n-1}f(\rho)\mathrm{d}\rho + C.$$

两边除以 r^{n-1}, 再次积分并交换积分次序, 得

$$\begin{aligned} u(r) &= \int_0^r \frac{1}{t^{n-1}}\,\mathrm{d}t\int_0^t \rho^{n-1}f(\rho)\mathrm{d}\rho + Er^{2-n} + D \\ &= \int_0^r \rho^{n-1}f(\rho)\mathrm{d}\rho\int_\rho^r \frac{1}{t^{n-1}}\,\mathrm{d}t + Er^{2-n} + D \\ &= \frac{r^{2-n}}{n-2}\int_0^r \rho(r^{n-2}-\rho^{n-2})f(\rho)\mathrm{d}\rho + Er^{2-n} + D. \end{aligned}$$

这里,C,D,E 都是常数. 要使解在 $r=0$ 有界, 必然有 $E=0$. 这就是 n 维Poisson方程轴对称解的基本形式. 在Neumann边界条件 $\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=R} = f_0$ 下, 问题有解的相容性条件是

$$\frac{1}{R^{n-1}}\int_0^R \rho^{n-1}f(\rho)\mathrm{d}\rho = f_0.$$

当该条件成立时,Neumann边值问题有如下形式的解

$$u(r) = \frac{r^{2-n}}{n-2}\int_0^r \rho(r^{n-2}-\rho^{n-2})f(\rho)\mathrm{d}\rho + D.$$

5.17 用球面平均值定理计算曲面积分 $\displaystyle\int_{\mathbb{S}}\frac{1}{|x-x_0|}\,\mathrm{d}S$, 其中 $\mathbb{S}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球面,$x_0\in\mathbb{R}^3$ 是固定点, 且 $|x_0|>1$.

解 容易验证函数 $|x|^{-1}$ 在 $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ 上调和. 又因 $|x_0|>1$, 故 $|x-x_0|^{-1}$ 在球 $B_1(0)$ 内调和. 由调和函数的球面平均值定理得

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}}\frac{1}{|x-x_0|}\,\mathrm{d}S = \frac{1}{|x_0|},$$

即

$$\int_{\mathbb{S}}\frac{1}{|x-x_0|}\,\mathrm{d}S = \frac{4\pi}{|x_0|}.$$

注 一般的结论是

$$\int_{\mathbb{S}} \frac{1}{|x-x_0|^{n-2}}\,\mathrm{d}S = \frac{\omega_n}{|x_0|^{n-2}},$$

其中 $\mathbb{S}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中单位球面,$\omega_n = \dfrac{2}{\Gamma(n/2)}\pi^{n/2}$ 是 $\mathbb{S}$ 的表面积,$|x_0| > 1$.

§5.3 补充习题与解答

5.18 如果 $f(x)$ 是关于 $x \in \mathbb{R}^n$ 的解析函数, 对于 $y \in \mathbb{R}^m$, 定义函数

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(y_1^{2k} + \cdots + y_m^{2k})\Delta^k f(x), \\ v(x,y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(y_1^{2k+1} + \cdots + y_m^{2k+1})\Delta^k f(x). \end{aligned}$$

证明 u, v 都是关于 $(x,y) \in \mathbb{R}^{n+m}$ 的调和函数.

证明 只验证 u 的调和性,v 的验证类似. 直接计算知

$$\begin{aligned} \Delta_x u(x,y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(y_1^{2k} + \cdots + y_m^{2k})\Delta^{k+1} f(x), \\ \Delta_y u(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-2)!}(y_1^{2k-2} + \cdots + y_m^{2k-2})\Delta^k f(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}(y_1^{2k} + \cdots + y_m^{2k})\Delta^{k+1} f(x). \end{aligned}$$

由此得 $\Delta_x u + \Delta_y u = 0$. 因此 u 是关于 $(x,y) \in \mathbb{R}^{n+m}$ 的调和函数.

5.19 设 u 为 $\mathbb{R}^n$ 中不恒为零的调和函数, 证明积分 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} u^2\,\mathrm{d}x$ 发散.

证明 若积分收敛, 则对任意 $x \in \mathbb{R}^n, R > 0$, 由调和函数的球平均值公式和 Cauchy 不等式知

$$\begin{aligned} u^2(x) &= \left(\frac{n}{\omega_n R^n}\int_{B_R(x)} u(\xi)\mathrm{d}\xi\right)^2 \le \left(\frac{n}{\omega_n R^n}\right)^2 \int_{B_R(x)} u^2(\xi)\mathrm{d}\xi \int_{B_R(x)} \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{n}{\omega_n R^n}\int_{B_R(x)} u^2(\xi)\mathrm{d}\xi \le \frac{n}{\omega_n R^n}\int_{\mathbb{R}^n} u^2(\xi)\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

在上式中令 $R \to \infty$ 得 $u(x) = 0$. 再由 $x \in \mathbb{R}^n$ 的任意性得 $u \equiv 0$. 此与已知条件矛盾.

5.20 如果 $u = u(r,\theta)$ 是调和函数, 证明 $v = ru_r$ 也是调和函数. 并由此证明第二边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < r < R, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} = \varphi(\theta) \end{cases}$$

的解, 当 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\mathrm{d}\theta = 0$ 时可以写成

$$u(r,\theta) = -\frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\beta)\ln(R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\beta - \theta))\mathrm{d}\beta + C,$$

其中 C 为任意常数.

证明 因 $u=u(r,\theta)$ 是调和函数, 故有

$$\Delta u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial u}{\partial r}\Big)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0.$$

由此可知

$$\Delta v=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial v}{\partial r}\Big)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial u}{\partial r}\Big)\Big)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\Big(r\frac{\partial u}{\partial r}\Big)=\frac{1}{r}(r^2\Delta u)_r=0.$$

上式表明 v 也是调和函数. 这样, 关于 u 的第二边值问题就转化为关于 v 的 Dirichlet 边值问题

$$\begin{cases}-\Delta v=0, \quad 0<r<R,\\ v=R\varphi(\theta), \quad r=R.\end{cases}$$

由 Poisson 公式知, 问题的解为

$$v(r,\theta)=\frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)\varphi(\beta)}{R^2+r^2-2Rr\cos(\beta-\theta)}\,\mathrm{d}\beta.$$

利用已知条件 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\mathrm{d}\theta=0$, 可以将 v 改写为如下形式

$$\begin{aligned}v(r,\theta)&=\frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\beta-\theta)}-1\right)\varphi(\beta)\mathrm{d}\beta\\&=-\frac{R}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2-Rr\cos(\beta-\theta)}{R^2+r^2-2Rr\cos(\beta-\theta)}\varphi(\beta)\mathrm{d}\beta.\end{aligned}$$

由此得原问题的解为

$$\begin{aligned}u(r,\theta)&=u(0,\theta)+\int_0^r\frac{v(\rho,\theta)}{\rho}\,\mathrm{d}\rho\\&=u(0,\theta)-\frac{R}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^r\frac{\rho-R\cos(\beta-\theta)}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\beta-\theta)}\,\mathrm{d}\rho\right)\varphi(\beta)\mathrm{d}\beta\\&=u(0,\theta)-\frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\beta)\ln(R^2+r^2-2Rr\cos(\beta-\theta))\mathrm{d}\beta.\end{aligned}$$

这里,$u(0,\theta)$ 可以是任意常数.

5.21 求区域 Ω 上调和方程 Dirichlet 问题的 Green 函数, 其中 Ω 分别为:

(1) 四分之一平面:$H_+=\{(x,y):\ x>0,\quad y>0\}$;

(2) 半球域:$B_R^+=\{x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3:\quad |x|<R,\quad x_3>0\}$;

(3) 层状空间:$H_h=\{x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3:\quad 0<x_3<h\}$.

解 (1) 在四分之一平面 H_+ 内任取一点 (ξ,η), 在该点放置单位正电荷, 见图 5.3. 为使它产生的静电场在 x 轴上的电位为零, 需要在 (ξ,η) 关于 x 轴的对称点 $(\xi,-\eta)$ 处放置单位负电荷.

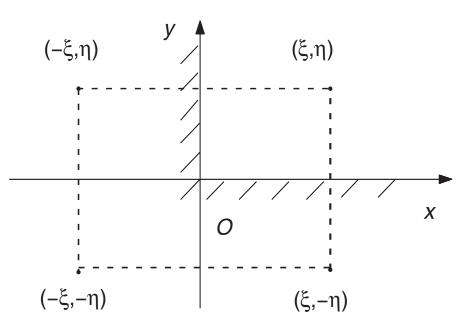

图 5.3

两电荷在平面上异于 $(\xi,\eta),(\xi,-\eta)$ 的点 (x,y) 处产生的电位为

$$G^*(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}.$$

显然此时 y 轴上的电位不为零, 为使 y 轴上的电位也为零，就需要在 (ξ,η) 关于 y 轴的对称点 $(-\xi,\eta)$ 处放置单位负电荷, 在 $(\xi,-\eta)$ 关于 y 轴的对称点 $(-\xi,-\eta)$ 上放置单位正电荷，四个电荷产生的静电场在异于上面四点的点 (x,y) 处的综合效应就是

$$\begin{aligned}G(x,y;\xi,\eta) &= G^*(x,y;\xi,\eta)-G^*(x,y;-\xi,\eta)\\ &= \frac{1}{4\pi}\ln\frac{[(x-\xi)^2+(y+\eta)^2][(x+\xi)^2+(y-\eta)^2]}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2][(x+\xi)^2+(y+\eta)^2]}.\end{aligned}$$

它在 x 轴和 y 轴上的值都为零, 因此 $G(x,y;\xi,\eta)$ 就是四分之一平面上调和方程 Dirichlet 问题的 Green 函数.

(2) 在半球域 B_R^+ 内任取一点 ξ, 在 ξ 点放置一单位正电荷 (见图 5.4)，它在点 $x\in\mathbb{R}^3\,(x\neq\xi)$ 处的电位是 $\dfrac{1}{4\pi|x-\xi|}$. 为了实现球面上电位为零，在点 ξ 关于球面的反演点 $\xi^*=\dfrac{R^2}{|\xi|^2}\xi$ 处放置 q 单位的负电荷,q 待定，它所产生的静电场在 x 点的电位是

$$v(x,\xi)=-\frac{q}{4\pi|x-\xi^*|},\qquad x\in\mathbb{R}^3,\quad x\neq\xi^*.$$

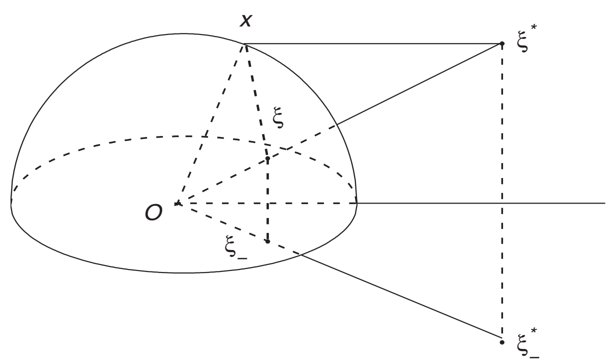

图 5.4

那么在每一点 $x\in\mathbb{R}^3(x\neq\xi,\xi^*)$ 处的电位之和是 $\dfrac{1}{4\pi|x-\xi|}-\dfrac{q}{4\pi|x-\xi^*|}$. 首先我们要选取适当的 q 使得当 $x\in\partial B_R$ 时这个和为零，即

$$\frac{1}{4\pi|x-\xi|}=\frac{q}{4\pi|x-\xi^*|},\quad \text{或者}\quad q=\frac{|x-\xi^*|}{|x-\xi|},\quad x\in\partial B_R.$$

这里,B_R 是 $\mathbb{R}^3$ 中以原点为球心、R 为半径的球. 因为三角形 $xO\xi$ 与三角形 ξ^*Ox 在点 O 有公共夹角，且此夹角的两相应边成比例 $|\xi^*|:R=R:|\xi|$, 所以这两个三角形相似. 故

$$\frac{|x-\xi^*|}{|x-\xi|}=\frac{R}{|\xi|},\qquad x\in\partial B_R.$$

结合以上分析，得出 $q=R/|\xi|$, 从而 $v(x,\xi)=-\dfrac{R/|\xi|}{4\pi|x-\xi^*|}$. 于是下面函数

$$G^*(x,\xi)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|x-\xi|}-\frac{R}{|\xi|}\cdot\frac{1}{|x-\xi^*|}\right).$$

在球面上取值为零, 但不满足在平面 $x_3=0$ 上取零值，为此在 ξ 关于平面 $x_3=0$ 的对称点 ξ_- 上放置单位负电荷, 在 ξ^* 关于平面 $x_3=0$ 的对称点上 ξ_-^* 放置电量为 q 的正电荷, 这样就得到 Green 函数

$$\begin{aligned}G(x,\xi)&=G^*(x,\xi)-G^*(x,\xi_-)\\&=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|x-\xi|}-\frac{R}{|\xi|}\cdot\frac{1}{|x-\xi^*|}-\frac{1}{|x-\xi_-|}+\frac{R}{|\xi|}\cdot\frac{1}{|x-\xi_-^*|}\right).\end{aligned}$$

(3) 在层状空间 $H_h=\{x:0<x_3<h\}$ 内任取一点 $P_0^+=\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$, 在 P_0^+ 点放置一单位正电荷 (见图 5.5), 它在点 $x\in\mathbb{R}^3\ (x\neq P_0^+)$ 处的电位是 $\dfrac{1}{4\pi|x-P_0^+|}$.

为满足 $G|_{x_3=0}=0$, 则必须在 P_0^+ 关于 $x_3=0$ 的对称点 $P_0^-=(\xi_1,\xi_2,-\xi_3)$ 处放置单位负电荷, 但此时边界条件 $G|_{x_3=h}=0$ 不能满足.

为满足边界条件 $G|_{x_3=h}=0$, 则必须在 P_0^+ 关于 $x_3=h$ 的对称点 $P_1^-=(\xi_1,\xi_2,2h-\xi_3)$ 处放置单位负电荷, 在 P_0^- 关于 $x_3=h$ 的对称点 $P_1^+=(\xi_1,\xi_2,2h+\xi_3)$ 处放置单位正电荷. 此时可以保证四电荷产生的静电场在平面 $x_3=h$ 上的电位为零, 但边界条件 $G|_{x_3=0}=0$ 又不能满足了.

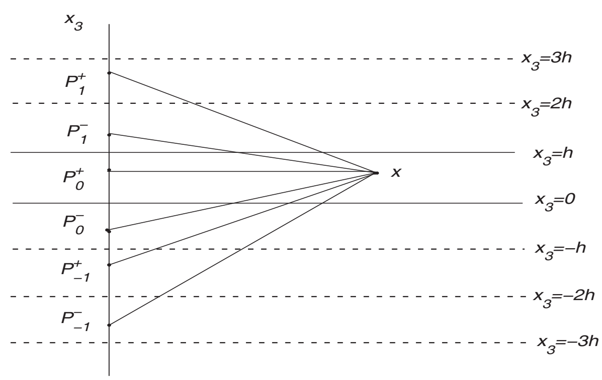

图 5.5

因此需要在 P_1^- 关于 $x_3=0$ 的对称点 $P_{-1}^+=(\xi_1,\xi_2,-2h+\xi_3)$ 处放置单位正电荷, 在 P_1^+ 关于 $x_3=0$ 的对称点 $P_{-1}^-=(\xi_1,\xi_2,-2h-\xi_3)$ 处放置单位负电荷. 但 $G|_{x_3=h}=0$ 又不能满足, 依次继续反复求之, 一直到对称点充满全空间为止.

每次放置电荷都需要在对称点处放置电性相反的电荷. 易知所有点 $P_n^+=(\xi_1,\xi_2,2nh+\xi_3)$ 处都放置单位正电荷, 所有点 $P_n^-=(\xi_1,\xi_2,2nh-\xi_3)$ 处都放置单位负电荷, 这里 n 从 $-\infty$ 计数到 ∞. 这样我们就得到 Green 函数为

$$G(x,\xi)=\frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{|x-P_n^+|}-\frac{1}{|x-P_n^-|}\right).$$

上式右端的级数对任意固定的 $\xi\in H_h$ 和 $x\in\mathbb{R}^3$ 都是收敛的, 这由下式可以看出

$$\frac{1}{|x-P_n^+|}-\frac{1}{|x-P_n^-|}=\frac{4(x_3-2nh)\xi_3}{|x-P_n^+|\cdot|x-P_n^-|(|x-P_n^+|+|x-P_n^-|)}=O(n^{-2}),\quad |n|\to\infty.$$

5.22 证明 Harnack 不等式: 若 u 在 n (≥ 3) 维球 $B_R(0)$ 内非负调和, 则对任意 $x \in B_R(0)$, 成立

$$\frac{R^{n-2}(R-|x|)}{(R+|x|)^{n-1}}u(0) \leq u(x) \leq \frac{R^{n-2}(R+|x|)}{(R-|x|)^{n-1}}u(0). \tag{5.7}$$

证明 无妨假设 $u \in C(\overline{B_R(0)})$, 否则用 $R-\varepsilon$ 代替 R 证明 (5.7) 式成立, 再令 $\varepsilon \to 0^+$ 即可. 假设 $u(x)|_{\partial B_R(0)} = \varphi(x) \geq 0$, 由 Poisson 公式知

$$u(x) = \frac{R^2-|x|^2}{\omega_n R}\int_{\partial B_R(0)} \frac{\varphi(\xi)}{|x-\xi|^n}\,\mathrm{d}S_\xi, \quad x \in B_R(0).$$

特别地

$$u(0) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}}\int_{\partial B_R(0)} \varphi(\xi)\mathrm{d}S_\xi.$$

利用不等式

$$R-|x| \leq |x-\xi| \leq R+|x|, \quad x \in B_R(0), \ \ \xi \in \partial B_R(0),$$

得

$$\begin{aligned}
u(x) &\leq \frac{R^2-|x|^2}{\omega_n R}\int_{\partial B_R(0)} \frac{\varphi(\xi)}{(R-|x|)^n}\,\mathrm{d}S_\xi \\
&= \frac{R+|x|}{\omega_n R(R-|x|)^{n-1}}\int_{\partial B_R(0)} \varphi(\xi)\mathrm{d}S_\xi \\
&= \frac{R^{n-2}(R+|x|)}{(R-|x|)^{n-1}}u(0), \\
u(x) &\geq \frac{R^2-|x|^2}{\omega_n R}\int_{\partial B_R(0)} \frac{\varphi(\xi)}{(R+|x|)^n}\,\mathrm{d}S_\xi \\
&= \frac{R-|x|}{\omega_n R(R+|x|)^{n-1}}\int_{\partial B_R(0)} \varphi(\xi)\mathrm{d}S_\xi \\
&= \frac{R^{n-2}(R-|x|)}{(R+|x|)^{n-1}}u(0).
\end{aligned}$$

因此, 不等式 (5.7) 成立.

注 利用Harnack不等式不难得到下面几个结论:

1. 若 u 在球 $B_R(0)$ 内非负调和, 则对任意 $x, y \in B_R(0)$, 成立

$$\frac{(R-|y|)^{n-1}(R-|x|)}{(R+|x|)^{n-1}(R+|y|)}u(y) \leq u(x) \leq \frac{(R+|y|)^{n-1}(R+|x|)}{(R-|x|)^{n-1}(R-|y|)}u(y).$$

由此可以推知, 对任意 $r \in (0, R)$, 成立不等式

$$\sup_{B_r(0)} u \leq \left(\frac{R+r}{R-r}\right)^n \inf_{B_r(0)} u.$$

2. 若 u 在球 $B_R(y)$ 内非负调和, 并且 $|x| < R$, 则成立

$$\frac{R^{n-2}(R-|x|)}{(R+|x|)^{n-1}}u(y) \leq u(x+y) \leq \frac{R^{n-2}(R+|x|)}{(R-|x|)^{n-1}}u(y).$$

事实上, 令 $v(x)=u(x+y)$, 则 $v(x)$ 在球 $B_R(0)$ 内非负调和, 对 $v(x)$ 利用Harnack不等式便得上式. 如果令 $z=x+y$, 则 $z\in B_R(y)$, 上式变形为

$$\frac{R^{n-2}(R-|z-y|)}{(R+|z-y|)^{n-1}}u(y)\le u(z)\le \frac{R^{n-2}(R+|z-y|)}{(R-|z-y|)^{n-1}}u(y),\ \forall z\in B_R(y).$$

3. 利用Harnack不等式, 我们可以证明Liouville定理: 全空间上有下界(或上界)的调和函数必为常数. 事实上, 若 u 有下界, 则存在正常数 M, 使 $v=u+M$ 非负调和, 则对任意 $x\in\mathbb{R}^n$, 利用Harnack不等式, 并令 $R\to\infty$, 就得到 $v(x)=v(0)$. 这说明 v 是常数. 因此 u 也是.